KLEINE MITTEILUNGEN

Die Verschiebungsellipsoide elastischer Körper – Konjugierte Ellipsoide – Die erzeugenden vektoriellen Dyaden. — Aus dem Gesetze von Betti (Theorie der Formänderungsarbeit) läßt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft des elastischen isotropen Körpers ableiten, welche ihren Ausdruck in zwei unten angegebenen Sätzen findet.

Der Zweckmäßigkeit und Übersichtlichkeit halber wird im nachstehenden die vektorielle Symbolik benutzt. Außer der bequemen und zeitersparenden Formulierung muß man auch anerkennen, daß die Vektoranalysis das geeignetste Mittel für die stereoskopische Darstellung der Elastizitätstheorie bildet. Im übrigen läßt sich jede vektorielle Gleichung in dreidimensionigem Koordinatensystem durch drei skalare Gleichungen auf einfache Weise ausdrücken [1]).

Im folgenden werden die vektoriellen Größen mit deutschen und die skalaren mit lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.

Das Gesetz von Betti liefert bekanntlich:

$$\Sigma \mathfrak{P}_m \mathfrak{s}_{mn} = \Sigma \mathfrak{P}_n \mathfrak{s}_{nm} \quad . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wobei $\mathfrak{s}_{mn}$ den Weg irgendeiner Belastung $\mathfrak{P}_m$ darstellt für den Fall, daß auf einen elastischen isotropen Körper nur die Belastung $\mathfrak{P}_n$ wirkt, während $\mathfrak{s}_{nm}$ den Weg irgendeiner Belastung $\mathfrak{P}_n$ infolge ausschließlicher Wirkung der Belastung $\mathfrak{P}_m$ bezeichnet.

Man betrachte drei nichtkomplanare Kräfte $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ von der Intensität „eins" und von beliebiger Richtung im Punkte m des Körpers wirkend, welche die entsprechenden Verschiebungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ in irgendeinem anderen Punkte n des Körpers hervorrufen; ferner sei $\mathfrak{V}$ eine beliebig gerichtete Einheitskraft im Punkte n und gesucht wird die der Kraft $\mathfrak{V}$ entsprechende Verschiebung $\mathfrak{u}$ des Punktes m.

Durch Kombination der Belastung $\mathfrak{V}$ mit jeder der Belastungen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ und durch dreimalige Anwendung der Gl. (1) erhalten wir:

$$\mathfrak{U}_1 \mathfrak{u} = \mathfrak{V} \mathfrak{v}_1 \qquad \mathfrak{U}_2 \mathfrak{u} = \mathfrak{V} \mathfrak{v}_2 \qquad \mathfrak{U}_3 \mathfrak{u} = \mathfrak{V} \mathfrak{v}_3 \quad . \quad (2).$$

Es ist selbstverständlich, daß das Symbol Σ der Gl. (1) sich nur auf ein Produkt der Form $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ für jedes Glied der Gl. (2) erstreckt.

Da nun aber $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ Einheitsvektoren sind, so bilden die linken Glieder der Gl. (2) und die, ihnen gleiche, rechte Glieder die Projektionen des Vektors $\mathfrak{u}$ auf die Richtungen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$.

Somit [2]):

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 \mathfrak{V} + \mathfrak{U}_2 \cdot \mathfrak{v}_2 \mathfrak{V} + \mathfrak{U}_3 \cdot \mathfrak{v}_3 \mathfrak{V} \quad . \; . \quad (3).$$

In dieser Gleichung sind $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ gegebene Vektoren, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{V}$ zwei beliebige, doch voneinander abhängige Vektoren.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$, wie auch $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ nichtkomplanare Vektoren sind, so bildet die Gl. (3) eine homogene lineare Vektorfunktion und speziell eine komplette Dyade (Dyadentripel [3])):

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{U}_1 \,;\, \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{U}_2 \,;\, \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{U}_3 \,;\, \mathfrak{v}_3)\, \mathfrak{V} = \Phi \mathfrak{V} \quad . \; . \quad (4).$$

In der Gl. (4) ist der veränderliche Vektor $\mathfrak{V}$ ein Einheitsvektor; deshalb folgt aus den bekannten Eigenschaften der Dyaden:

1. Wenn der Vektor $\mathfrak{V}$ alle möglichen Richtungen um den Punkt n nimmt, bewegt sich die Spitze der Verschiebung $\mathfrak{u}$ des Punktes m auf die Fläche eines Ellipsoides.

2. Das rechtwinklige System der drei Hauptthalbachsen dieses Ellipsoides entspricht drei bestimmten, rechtwinklig aufeinander stehenden Richtungen des Vektors $\mathfrak{V}$.

Wenn wir mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Haupthalbachse des Ellipsoides und mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die entsprechenden Werte von $\mathfrak{V}$ bezeichnen, so können wir die Dyade (4) in die Normalform bringen:

$$\boxed{\mathfrak{u} = (\mathfrak{a} \,;\, \mathfrak{i} + \mathfrak{b} \,;\, \mathfrak{j} + \mathfrak{c} \,;\, \mathfrak{k})\, \mathfrak{V} = \Phi \mathfrak{V}} \quad . \; . \quad (5),$$

wobei sowohl die Antezedenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, als auch die Konsequenten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, je ein orthogonales Tripel bilden. Was schließlich die Umwandlung der Dyade (4) in die Normalform (5) anbetrifft, so verweisen wir auf die in der Fußnote [2]) erwähnten Werke.

Aus obigem geht hervor:

Erster Satz: Wirkt in einem bestimmten Punkte eines ruhenden elastischen isotropen Körpers nach allen möglichen Richtungen eine dem Absolutbetrag nach konstante Kraft, so daß sich ihre Vektorspitze auf einer Kugelfläche bewegt, so bewegt sich jeder Punkt des Körpers auf der Fläche eines Ellipsoides **(des Verschiebungsellipsoides)**, dessen Mittelpunkt mit der ursprünglichen Lage jedes Punktes zusammenfällt. Die Verschiebung des beliebigen Punktes ergibt sich als Funktion der Kraftrichtung $\mathfrak{V}$ aus einer kompletten Dyade **(der Verschiebungs- erzeugender Dyade)**, die sich in der Normalform:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{a} \,;\, \mathfrak{i} + \mathfrak{b} \,;\, \mathfrak{j} + \mathfrak{c} \,;\, \mathfrak{k})\, \mathfrak{V} = \Phi \mathfrak{V}$$

schreiben läßt.

Die Antezedenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bilden das orthogonale Tripel der Haupthalb-

---

[1]) Bezüglich der benutzten Formeln der Vektorrechnung verweisen wir auf: E. Budde: Tensoren und Dyaden, Braunschweig 1914; C. Runge: Vektoranalysis, Leipzig 1926; S. Valentiner: Vektoranalysis, Berlin 1923 (Sammlung Göschen).

[2]) $\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 \mathfrak{V}$ bildet den Vektor, der sich durch Multiplikation des Vektors $\mathfrak{U}_1$ mit dem skalaren Produkte $\mathfrak{v}_1 \mathfrak{V}$ der Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{V}$ ergibt.

[3]) Nach Gl. (4) wird in einem beliebigen Koordinatensysteme der Betrag jeder Achsenkomponenten des Vektors $\mathfrak{u}$ eine lineare Funktion der Achsenkomponentenbeträge des Vektors $\mathfrak{V}$. Wenn wir ein Bezugssystem wählen, dessen Achsen (1), (2) und (3) mit den Richtungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ zusammenfallen und wenn wir die algebraischen Werte der Achsenkomponenten der Vektore $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{u}$ .... mit:

$U_1^{(1)}$, $U_1^{(2)}$, $U_1^{(3)}$, $U_2^{(1)}$, $U_2^{(2)}$, $U_2^{(3)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ usw.

bezeichnen, so wird:

$$u^{(1)} = U_1^{(1)} V^{(1)} + U_2^{(1)} V^{(2)} + U_3^{(1)} V^{(3)}$$

$$u^{(2)} = U_1^{(2)} V^{(1)} + U_2^{(2)} V^{(2)} + U_3^{(2)} V^{(3)}$$

$$u^{(3)} = U_1^{(3)} V^{(1)} + U_2^{(3)} V^{(2)} + U_3^{(3)} V^{(3)} \,.$$

In der Vektoranalysis wird diese Operation durch die Gl. (4) $\mathfrak{u} = \Phi \mathfrak{V}$ dargestellt, wobei Φ das Symbol eines Affinors ist:

$$\Phi = \begin{matrix} U_1^{(1)} & U_2^{(1)} & U_3^{(1)} \\ U_1^{(2)} & U_2^{(2)} & U_3^{(2)} \\ U_1^{(3)} & U_2^{(3)} & U_3^{(3)}. \end{matrix}$$

(Siehe S. Valentiner: Vektoranalysis.)

achse des Verschiebungsellipsoides und die Konsequenten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein ebenso orthogonales Tripel der diesentsprechenden Kraftrichtung.

Wenn die Verschiebungsdyade eine komplanare Dyade ist, wenn sie sich nämlich auf zwei Glieder reduzieren läßt:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j})\,\mathfrak{V} = \Phi\,\mathfrak{V} \quad . \; . \; . \; . \quad (6),$$

so bewegt sich der Punkt auf einer Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Wenn die Verschiebungsdyade eine kollineare Dynade ist, also mit nur einem Glied:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i})\,\mathfrak{V} = \Phi\,\mathfrak{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

so bewegt sich der Punkt auf einer Geraden von der Gesamtlänge $2\,a$.

Wenn endlich die Dyade $\Phi = 0$ ist, so bleibt der Punkt fest.

Der erste Fall umfaßt den ebenen Formänderungszustand.

Die Verschiebung $\mathfrak{u}$ des Punktes m, welche die im Punkte n wirkende Einheitskraft $\mathfrak{V}$ hervorruft, wurde bereits durch die Gl. (4) oder (5) angegeben.

Die Verschiebung $\mathfrak{v}$ des Punktes n infolge einer Einheitskraft $\mathfrak{U}$ auf dem Punkte m wirkend, kann man auf gleicher Weise ermitteln. Werden die Verschiebungen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ des Punktes m, welche den drei beliebigen Werten $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ der Einheitskraft $\mathfrak{V}$ entsprechen, als gegeben betrachtet, so folgt auf Grund der vorigen Rechnung und nach Gl. (4):

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{V}_1\,;\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{V}_2\,;\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{V}_3\,;\mathfrak{u}_3)\,\mathfrak{U} \quad . \; . \quad (8).$$

Soll nun jede der Verschiebungen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ die Gl. (5) erfüllen, es muß sein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 &= (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{k})\,\mathfrak{V}_1 \\ \mathfrak{u}_2 &= (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{k})\,\mathfrak{V}_2 \\ \mathfrak{u}_3 &= (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{k})\,\mathfrak{V}_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Führen wir diese Werte in die Gl. (8) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} = {} & [\mathfrak{V}_1\,;(\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{k})\,\mathfrak{V}_1 \\ & + \mathfrak{V}_2\,;(\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{k})\,\mathfrak{V}_2 \\ & + \mathfrak{V}_3\,;(\mathfrak{a}\,;\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{k})\,\mathfrak{V}_3]\cdot\mathfrak{U} \\ = {} & (\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{c}\,\mathfrak{U})\,\mathfrak{V}_1 \\ & + (\mathfrak{V}_2\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{c}\,\mathfrak{U})\,\mathfrak{V}_2 \\ & + (\mathfrak{V}_3\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{c}\,\mathfrak{U})\,\mathfrak{V}_3 \\ = {} & (\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{V}_3)\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{U} \\ & + (\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{V}_3)\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{U} \\ & + (\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{V}_3)\cdot\mathfrak{c}\,\mathfrak{U}\,. \end{aligned}$$

Da aber $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ Einheitsvektoren, so sind $\mathfrak{V}_1\mathfrak{i}$, $\mathfrak{V}_2\mathfrak{i}$, $\mathfrak{V}_3\mathfrak{i}$ die Projektionen des Vektors $\mathfrak{i}$ auf den Richtungen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$; also:

$$\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{V}_3 = \mathfrak{i}\,;$$

ähnlich für $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$; dann ergibt sich schließlich:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{c}\,\mathfrak{U} \quad . \; . \; . \; . \quad (10),$$

oder, da das rechte Glied der letzten Gleichung eine komplette Dyade bildet:

$$\boxed{\mathfrak{v} = (\mathfrak{i}\,;\,\mathfrak{a} + \mathfrak{j}\,;\,\mathfrak{b} + \mathfrak{k}\,;\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{U} = \Phi_0\,\mathfrak{U}} \quad . \quad (11).$$

(11) ist die reziproke Dyade der Dyade (5). Dyade (11) läßt sich in die Normalform (d. h. mit Einheitsvektoren als Konsequenten) bringen, indem man entsprechend durch die Absolutbeträge der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Antezedenten multipliziert und die Konsequenten dividiert:

$$\mathfrak{v} = \left(a\,\mathfrak{i}\,;\frac{\mathfrak{a}}{a} + b\,\mathfrak{j}\,;\frac{\mathfrak{b}}{b} + c\,\mathfrak{k}\,;\frac{\mathfrak{c}}{c}\right)\mathfrak{U} \quad . \quad (12).$$

So wird die Dyade (11) in die Normalform:

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}_0\,;\mathfrak{i}_0 + \mathfrak{b}_0\,;\mathfrak{j}_0 + \mathfrak{c}_0\,;\mathfrak{k}_0)\,\mathfrak{U} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

gebracht, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_0 &= a\,\mathfrak{i} & \mathfrak{b}_0 &= b\,\mathfrak{j} & \mathfrak{c}_0 &= c\,\mathfrak{k} \\ \mathfrak{i}_0 &= \frac{\mathfrak{a}}{a} & \mathfrak{j}_0 &= \frac{\mathfrak{b}}{b} & \mathfrak{k}_0 &= \frac{\mathfrak{c}}{c} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14).$$

Aus obigem und besonders aus Gl. (11) und (14) folgt der:

Zweiter Satz[4]): Wenn in einem elastischen isotropen Körper E_m das Verschiebungsellipsoid (nach dem ersten Satze) des Punktes m, infolge entsprechend einer im Punkte n wirkender Kraft von konstanter Größe und veränderlicher Richtung und E_n das Verschiebungsellipsoid des Punktes n, infolge entsprechend der gleichen Wirkung derselben Kraft im Punkte m, so sind beide Ellipsoide einander gleich und so gegen einander gelegen, daß die Hauptachsen jedes Ellipsoides nach Größe und Richtung die Verschiebungen darstellen, welche den durch die Hauptachsen des anderen Ellipsoides angegebenen Kraftrichtungen entsprechen. **(Konjugierte Ellipsoiden.)** Diese Verschiebungsellipsoiden ergeben sich aus den reziproken Dyaden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s}_{mn} &= (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{f} + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{g} + \mathfrak{c}\,;\mathfrak{h})\,\mathfrak{P}_n \\ \mathfrak{s}_{nm} &= (\mathfrak{f}\,;\mathfrak{a} + \mathfrak{g}\,;\mathfrak{b} + \mathfrak{h}\,;\mathfrak{c})\,\mathfrak{P}_m \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15),$$

d. h. die erzeugenden Dyaden von zwei konjugierten Verschiebungsellipsoiden sind reziproke Dyaden.

A. Roussopoulos, Athen. 192

[4]) Den ersten Satz kann man auch aus dem Superpositionssatze direkt ableiten, es ist jedoch zweckmäßiger, beide Sätze aus dem Bettischen Gesetze zu erhalten.