ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

Πρόλογος (*)

Ὑπὸ τὸν ὅρον *«ὕβωσις»* πλακῶν νοεῖται τὸ φαινόμενον τῆς μεταπτώσεως πλακῶν ἀπὸ τῆς εὐσταθοῦς εἰς τὴν ἀσταθῆ κατάστασιν ἰσορροπίας, ὅταν αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις—μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνονται καὶ συνιστῶσαι συνεπίπεδοι πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον τῆς πλακὸς—ὑπερβοῦν ὡρισμένον ὅριον, ὅπερ ὀνομάζομεν ὅριον ὑβώσεως. Εἶνα. φαινόμενον ἐντελῶς ἀνάλογον πρὸς τὸ τοῦ λυγισμοῦ τῶν ράβδων. Ἐπὶ τοῦ φαινομένου τούτου οὐδέν, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, ἔχει νὰ μᾶς πληροφορήσῃ ἡ ἑλληνικὴ τεχνικὴ βιβλιογραφία. Εἰς τὰς ἐν τῷ Ε.Μ.Π. παραδόσεις χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἀπόδοσιν τοῦ φαινομένου οἱ ὅροι κύρτωσις, ἢ λύγισις, ἢ στρέβλωσις, ἢ πτύχωσις, ἐξ ὧν οὐδεὶς δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπικρατῶν. Ἀντὶ αὐτῶν εἰσηγούμεθα τὴν εἰσαγωγὴν καὶ καθιέρωσιν τοῦ ὅρου «ὕβωσις», ὃν θεωροῦμεν ἐπιτυχέστερον.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως πλακὸς στηριζομένης καὶ φορτιζομένης καθ' ὡρισμένον τρόπον συνίσταται εἰς:

1) Τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως, ἤτοι τῆς τιμῆς ἐκείνης τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων, πέραν τῆς ὁποίας ἡ ἰσορροπία μεταπίπτει ἀπὸ τῆς εὐσταθοῦς εἰς τὴν ἀσταθῆ κατάστασιν, καὶ

2) Τὸν καθορισμὸν τῆς μορφῆς, τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως, ἤτοι τῆς μορφῆς, ἣν λαμβάνει τὸ μέσον ἐπίπεδον τῆς πλακὸς κατὰ τὴν ἰδεατὴν στιγμὴν τῆς μεταπτώσεως τῆς ἰσορροπίας εἰς κατάστασιν ἀσταθῆ.

Ὅπως εἰς τὸν λυγισμὸν τῶν ράβδων, οὕτω καὶ εἰς τὴν ὕβωσιν πλακῶν ὁ ἐπακριβὴς καθορισμὸς τῶν βελῶν ὑβώσεως δὲν εἶναι δυνατός, διὰ λόγον ὃν παραλείπομεν νὰ ἀναπτύξωμεν ἐνταῦθα, ἐκθέτομεν ὅμως εἰς τὴν ὑποσημείωσιν (9) τοῦ κειμένου.

Τὸ πρόβλημα τῆς ὑβώσεως παρουσιάζει πολὺ τεχνικὸν ἐνδιαφέρον, ἰδίως εἰς τὰς χαλυβδίνας κατασκευάς, ὅπου πολλάκις παρίσταται ἀνάγκη νὰ ἐξακριβωθῇ ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας ὑψηλῶν καὶ λεπτῶν κορμῶν συνθέτων διατομῶν, ὑποβαλλομένων εἰς ὁμοιόμορφον θλῖψιν, ἢ ὀρθὰς καμπτικὰς τάσεις, ἢ διατμητικὴν ἔντασιν. Τὸ μεταξὺ τῶν πελμάτων καὶ τῶν ἀνὰ ἀποστάσεις τιθεμένων ἐνισχύσεων τμῆμα τοῦ λεπτοῦ κορμοῦ δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς πλὰξ ὑποβαλλομένη εἰς συνεπίπεδον πρὸς τὸ μέσον της ἐπίπεδον φόρτισιν, ὑποκειμένη εἰς ὕβωσιν, ἄρα μετάπτωσιν εἰς ἀσταθῆ ἰσορροπίαν, ὅταν αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ὑπερβοῦν τὴν κρίσιμον τιμὴν ὑβώσεως.

Διὰ τὸν χειρισμὸν τῶν προβλημάτων εὐσταθείας, ἄρα καὶ ὑβώσεως, τίθενται εἰς διάθεσιν ἡμῶν δύο μέθοδοι: Ἡ πρώτη, ὀνομαζομένη ***ἀναλυτική***, συνίσταται εἰς τὴν ἀναζήτησιν λύσεως τῆς γενικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας κάμψεως τῆς πλακός, συμβιβαζομένης πρὸς τὰς συνοριακὰς συνθήκας τῆς ἐξεταζομένης περιπτώσεως. Ὁσάκις ὅμως ἡ ἐξεύρεσις τοιαύτης λύσεως καθίσταται ἀνέφικτος ἢ πολὺ δύσκολος—λόγῳ συνθετωτέρας φορτίσεως, ἢ πολυπλοκωτέρου γεωμετρικοῦ σχήματος, ἢ ποικιλωτέρων συνοριακῶν συνθηκῶν—ἐνδείκνυται ἡ ἐφαρμογὴ τῆς δευτέρας μεθόδου, ἣν καλοῦμεν ***ἐνεργειακήν***, πηγαζούσης ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων. Ἡ ἐνεργειακὴ μέθοδος εἶναι μέθοδος κατὰ προσέγγισιν ἀκριβής, συνίσταται δὲ εἰς τὴν ἐκλογὴν ***δυνατῆς*** τινος ἐπιφανείας ὑβώσεως, ἧς ἡ ἐξίσωσις ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν προσθετέων (τόσον περισσοτέρων, ὅσον ἡ ἐπιδιωκομένη ἀκρίβεια μεγαλειτέρα), ὑποκειμένων εἰς τὸν μόνον περιορισμόν, ὅτι δέον νὰ ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας στηρίξεως τῆς πλακός. Ἡ δυνατὴ αὕτη ἐπιφάνεια ὑβώσεως θὰ προσεγγίζῃ τόσῳ περισσότερον πρὸς τὴν πραγματικὴν κατὰ τὴν ἰδεατὴν στιγμὴν τῆς μεταπτώσεως τῆς ἰσορροπίας, ὅσῳ τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως τῆς πλακὸς τὸ ἐπιτελούμενον κατὰ τὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν αὐτῆς, καθ' ἣν τὸ μέσον ἐπίπεδον λαμβάνει τὴν μορφὴν τῆς ἐκλεγείσης δυνατῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως, καθίσταται μικρότερον, τείνει πρὸς ἐλάχιστον, μὲ ὁριακὴν τιμὴν τὸν μηδενισμόν. Ἐκ τῆς συνθήκης ταύτης τοῦ ἐλαχίστου προκύπτει ἡ ἐνεργειακὴ συνθήκη ὑβώσεως, ἐξ ἧς εἶναι ἐν γένει δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως.

Ἡ διατριβὴ χωρίζεται εἰς δύο μέρη: Τὸ πρῶτον ἀναφέρεται κυρίως εἰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ἐνῷ τὸ δεύτερον ἀφιεροῦται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ ἐφαρμογὴν τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου. ***Ἡ διατριβὴ ἔχει ἐν τῷ συνόλῳ αὐτῆς σύνθεσιν καθ' ὁλοκληρίαν πρωτότυπον.*** Ὡς κυριώτερα βοηθήματα ἐχρησιμοποιήσαμεν τὸ ἄριστον σύγγραμμα τοῦ A. Nádai ὑπὸ τὸν τίτλον «Elastischer Platten», καθὼς καὶ τὸ σύγγραμμα τοῦ καθηγητοῦ F. Hartmann ὑπὸ τὸν τίτλον «Knickung, Kippung, Beulung», ἀμφότερα προσφάτου σχετικῆς ἐκδόσεως. Κατὰ ἥσσονα λόγον ἐβοηθήθημεν ἐκ τοῦ συγγράμματος «Drang u. Zwang» τῶν A. u. L. Föppl.

Τὴν ἐνεργειακὴν συνθήκην ὑβώσεως διετύπωσε, βασισθεὶς εἰς τὰς ἐργασίας τοῦ Lord Rayleigh (1), ὁ G. H. Bryan (1891—1894), ἐχρησιμοποίησε δὲ ταύτην ἀργότερον εὐρύτατα ὁ Timoshenko πρὸς ἐπίλυσιν πολυπληθῶν περιπτώσεων ὑβώσεως (1921—31), ὡς καὶ οἱ Reissner, Schleicher κ. ἄ. Χωρὶς νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἐκφέρωμεν κρίσιν διὰ τὰς πηγάς, εἰς ἃς δὲν κατέστη δυνατὸν νὰ προσφύγωμεν (λ. χ. Bryan, Timoshenko), ἔχομεν ἐν τούτοις τὴν γνώμην, ὅτι ἡ ἀπόδειξις καὶ διατύπωσις τοῦ ἐνεργειακοῦ κριτηρίου, ὡς ἐκτίθεται εἰς τὰ εἰς τὴν διάθεσίν μας συγγράμματα, δὲν τυγχάνει ἀπολύτως ἱκανοποιητική: Ὁ μὲν Nádai μακρηγορεῖ ὑπὲρ τὸ δέον, ὡς νομίζομεν, ἐνῷ ὁ Hartmann ἐν τῇ συντομίᾳ του καθίσταται ἀσαφής. Διὰ τοῦτο θεωροῦμεν τὴν ἐν τῇ διατριβῇ γινομένην πρωτότυπον ἀνάπτυξιν τῶν § § 1 καὶ 13, ἐκπορευομένην ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων, ὡς προτιμητέαν, παρουσιάζουσαν ἐν σχέσει μὲ τὰς προηγουμένας τὰ πλεονεκτήματα τῆς ἁπλότητος, τῆς συντομίας καὶ σαφηνείας, ἐν συνδυασμῷ, ὡς νομίζομεν, μὲ ἀπόλυτον ἐπάρκειαν. Δέον νὰ ἀναφέρωμεν, ὅτι τὴν κεντρικὴν σκέψιν πρὸς ἐπίτευξιν τῆς ἁπλοποιήσεως ταύτης ἠρύσθημεν ἐκ τοῦ «Drang u. Zwang» § 12, Bd I.

Εἰς τὴν § 2 παρέχεται, παραδείγματος ἕνεκεν, ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλυτικῆς καὶ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κρισίμου φορτίου λυγισμοῦ τῆς θλιβομένης ράβδου, ἀμφότεραι δὲ αἱ μέθοδοι καταλήγουν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ἤτοι τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ Euler τῆς ἐλαστικῆς περιοχῆς. Ἡ ἀνάπτυξις αὕτη ἀπαντᾶται ὑπὸ οὐσιωδῶς διάφορον διατύπωσιν καὶ εἰς «Drang u. Zwang», § 105 κ. ἑ., Bd. II.

Διὰ τὴν διατύπωσιν τῆς ἀναλυτικῆς καὶ τῆς ἐνεργειακῆς συνθήκης ὑβώσεως τῆς πλακὸς ἀπαιτεῖται ὅμως ἡ γνῶσις τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως καὶ τῆς καταστάσεως παραμορφώσεως τῆς πλακός, ὑποβαλλομένης εἰς φόρτισιν κάθετον καὶ συνάμα συνεπίπεδον πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον, ὡς καὶ ἡ εὕρεσις τῶν τύπων ὑπολογισμοῦ τοῦ ἔργου παραμορφώσεως τῆς πλακός, πραγματικοῦ ἢ δυνατοῦ. Ἐκρίναμεν ἄρα σκόπιμον, ἀφοῦ ἄλλωστε ἡ ἑλληνικὴ βιβλιογραφία εἶναι ἐν προκειμένῳ εἰς ἄκρον πτωχή, νὰ παρεμβάλωμεν τὰς § § 4 ἕως 7, διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν ὁποίων κατ' ἐξοχὴν χρήσιμος ἀπέβη ὁ 1ος τόμος τῆς Στατικῆς τοῦ Καθηγητοῦ καὶ προπρυτάνεως κ. Ν. Κιτσίκη. Εἰς τὸ τέλος

(*) Ἡ ἀνὰ χεῖρας ἐργασία ἀποτελεῖ τὴν ἐπὶ ὑφηγεσίᾳ διατριβὴν τοῦ συγγραφέως, ὑποβληθεῖσαν ἐν χειρογράφῳ, ὁμοῦ μετὰ τῶν λοιπῶν ἐπιστημονικῶν αὐτοῦ ἐργασιῶν, εἰς τὴν Πρυτανείαν τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου κατὰ τὴν διεκδίκησιν τοῦ ὑφηγετικοῦ του τίτλου.

(1) Τὴν ὑπόδειξιν περὶ τῆς συμβολῆς τῶν ἐργασιῶν τοῦ Lord Rayleigh καὶ ἰδίως τοῦ κλασσικοῦ του συγγράμματος «The theory of Sound» εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ ἐνεργειακοῦ κριτηρίου ὀφείλω εἰς τὸν καθηγητὴν κ. Φ. Θεοδωρίδην.

τῆς § 7 δίδεται ἡ ὁριστικὴ μορφὴ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας κάμψεως λεπτῆς πλακός, ἐντεινομένης ἐν τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ αὐτῆς καὶ καθέτως πρὸς αὐτὸ (ἐξ. 92), ἥτις καὶ ἀποτελεῖ τὴν ἀφετηρίαν τῆς ἀναλυτικῆς διερευνήσεως τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως. Εἰς τὰς ἀμέσως προηγουμένας § § 5 καὶ 6 παρέχεται ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τῶν εἰς τὰς διαφόρους περιπτώσεις στηρίξεως τῆς πλακὸς (ἄρθρωσις, πάκτωσις, ἐλεύθερον σύνορον) ἀντιστοιχουσῶν συνοριακῶν συνθηκῶν, δίδεται δὲ ἀκόμη ἡ θεωρητικὴ δικαιολογία τῆς εἰς § 4 γενομένης θεμελιώδους παραδοχῆς, καθ' ἣν «αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον εὐθεῖαι διατηροῦνται εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως μετὰ τὴν παραμόρφωσιν», ἐφ' ὅσον ἡ πλὰξ εἶναι λεπτή. Ἡ ἐξ. (82) καὶ ἑπομένως αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι λύσεις τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως προϋποθέτουν, ὅτι τὸ πάχος τῆς πλακὸς εἶναι μικρόν, τάξεως ἀπειροστοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰς κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μέσου ἐπιπέδου διαστάσεις αὐτῆς. Διὸ καὶ ὁ τίτλος τῆς διατριβῆς ἀναφέρεται εἰς λεπτὰς πλάκας.

Εἰς τὰς § 8 καὶ 9 ἐξετάζονται κατὰ H. Reissner, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, πέντε περιπτώσεις ὑβώσεως ὀρθογωνικῆς πλακός, καθ' ἃς αἱ ὁμοιομόρφως θλιβόμεναι ἕδραι στηρίζονται ἀρθρωτῶς, αἱ λοιπαὶ εἴτε ἀρθρωτῶς, εἴτε διὰ πακτώσεως, εἴτε εἶναι ἐλεύθεραι στηρίξεως. Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ περιέχονται εἰς τὸν ἀνακεφαλαιωτικὸν πίνακα II. Χαρακτηριστικὴ εἶναι ἡ εἰσαγωγὴ τῆς ἰδεατῆς τάσεως σ_e (ἐξ. 90, 91), τῆς ὁποίας ἡ χρησιμοποίησις συνεχίζεται ἐφεξῆς δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις ὑβώσεως ὀρθογωνικῶν καὶ κυκλικῶν πλακῶν, ὅπως ἐπίσης αἱ εἰς τὸ τέλος τῆς παραγράφου 8 περιεχόμεναι παρατηρήσεις καὶ ἐξισώσεις (93), (94), (96), ἀναφορικῶς μὲ τὴν ἰσχὺν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ἐντὸς τῆς ἐλαστικῆς περιοχῆς καὶ τὴν εἰσαγωγὴν ὑποκαταστάτου θλιβομένης ράβδου, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ὑπολογισμὸς ἔναντι ὑβώσεως θλιβομένης χαλυβδίνης πλακός, στηριζομένης ἀρθρωτῶς καθ' ὅλον τὸ περίγραμμα αὐτῆς, δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς συνήθη ὑπολογισμὸν ἔναντι λυγισμοῦ ὑποκαταστάτου ράβδου μὲ λυγηρότητα 1,65 b/h, ἔνθα b τὸ πλάτος τῆς πλακὸς καὶ h τὸ πάχος αὐτῆς. Ὑποβάλλεται δὲ περαιτέρω ἐκεῖ πρότασις, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἦτο ἐνδεχομένως δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς ἔναντι ὑβώσεως καὶ εἰς τὴν πλαστικὴν περιοχήν. Βεβαίως ἡ πρότασις αὕτη χρήζει ἐλέγχου, δυναμένου, ὡς νομίζω, νὰ ἐπιτευχθῇ κυρίως διὰ τῆς πειραματικῆς ὁδοῦ.

Κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν πολυπλόκων ὑπολογισμῶν τῆς § 9α—9δ δὲν ἠρκέσθημεν εἰς τὴν ἐκ τῆς βιβλιογραφίας ἄντλησιν τῶν ἐκεῖ διδομένων ἄνευ ἀποδείξεως ἀποτελεσμάτων, ἀλλ' ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ ἐλέγξωμεν τὰ δεδομένα ταῦτα. Οὕτω λ. χ. παραθέτομεν πλήρη τὴν λύσιν τῶν συστημάτων (112), (119) καὶ (119') καὶ τῶν ἐξισώσεων (124), (132), ἐπιτυγχανομένην διὰ τῆς γραφικῆς ὁδοῦ, κατὰ τρόπον ἀρκετὰ ἐπίπονον. Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν μας συνεφώνησαν μὲ πολὺ ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν πρὸς τὰ ἐν τῇ βιβλιογραφίᾳ παρεχόμενα.

Εἰς τὰς ὑπολοίπους §§ 10 ἕως 12 τοῦ πρώτου μέρους ἐξετάζεται τὸ πρόβλημα τῆς ὑβώσεως κυκλικῶν πλακῶν, εἰσαγομένων πρὸς τοῦτο πολικῶν ἀντὶ καρτεσιανῶν συντεταγμένων καὶ ἐξευρισκομένης εἰς § 10 τῆς μορφῆς τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς πλακὸς εἰς πολικὰς συντεταγμένας. Ἐρευνᾶται εἶτα εἰς § 11α, β ἡ περίπτωσις ὑβώσεως κυκλικῆς πλακὸς ὑποβαλλομένης εἰς περιμετρικὴν θλῖψιν, στηριζομένης διὰ πακτώσεως ἢ ἀρθρώσεως. Ἡ κυριωτέρα δυσκολία ἀπαντᾶται κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (156), ὑπαγομένης εἰς τὴν μορφὴν Bessel, ἧς ἡ γενικὴ λύσις ἐκφράζεται τῇ βοηθείᾳ ἀτερμόνων ἐκθετικῶν σειρῶν. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως πολὺ χρήσιμοι καθίστανται οἱ πίνακες (Funktionentafeln) τῶν Jahnke u. Emde. Ἐξ ὁλοκλήρου πρωτότυπος εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς μορφῆς τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως (σχήματα 46 καὶ 48) ὡς καὶ τὸ σχῆμα 47. Ἐὰν ἐπιπροσθέτως ἐνεργῇ ἐπὶ τῆς πλακὸς καὶ φορτίον κατακόρυφον p (ὁμοιομόρφως κατανεμημένον) ἢ P (συγκεντρωμένον εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακός), ἡ τιμὴ τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως δὲν μεταβάλλεται. Ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωσις ὑβώσεως πλακὸς πεπακτωμένης κατὰ τὴν περίμετρον καὶ στηριζομένης συνάμα εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς, ὁπότε τὸ ἀναλυτικὸν κριτήριον ὑβώσεως λαμβάνει τὴν μορφὴν (196). Ὁ προσδιορισμός, βάσει τῆς ἐξισώσεως ταύτης, τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως ἐπιτυγχάνεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχ. 49 καὶ τοῦ πίνακος IV, εἶναι δὲ πρωτότυπος.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς διατριβῆς, μετὰ τὴν γενικὴν διατύπωσιν τοῦ ἐνεργειακοῦ κριτηρίου ὑβώσεως (ἐξ. 217), γίνεται ἐφαρμογὴ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου εἰς τέσσαρας τῶν ἐξετασθεισῶν περιπτώσεων τῶν §§ 8 καὶ 9, ἐπὶ πλέον εἰς τρεῖς ἀκόμη περιπτώσεις μὴ πραγματευομένας εἰς τὸ πρῶτον μέρος, διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου. Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν δύο μεθόδων καθίσταται ἐμφανὴς ἡ ἀξία τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου, παρουσιαζούσης συντομίαν καὶ σημαντικὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὑπολογισμῶν, ἄνευ ἀξιολόγου ἐλαττώσεως τῆς ἀκριβείας. Αἱ τρεῖς περαιτέρω ἐξεταζόμεναι περιπτώσεις ε, στ, ζ τῆς § 14 (σχ. 54, 55) εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου πρωτότυποι.

Ἡ § 15 πραγματεύεται ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν ὑβώσεως πλακὸς ὀρθογωνικῆς, ἀρθρωτῶς στηριζομένης, ὑποβαλλομένης εἰς περιμετρικὴν διάτμησιν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐμελετήθη καὶ ἐλύθη ὑπὸ τοῦ Timoshenko («Eisenbau» 1921), ἡ ἐκεῖ διδομένη ἀνάπτυξις εἶναι ὅμως τόσον σύντομος καὶ πυκνή, ὥστε ἐκρίναμεν ἀπαραίτητον νὰ εὐρύνωμεν ταύτην οὐσιωδῶς, βοηθηθέντες εἰς τοῦτο ἐκ τοῦ συγγράμματος τοῦ F. Hartmann. Ἐν τῇ διατριβῇ παρέχομεν τὴν λύσιν, τὸ μὲν κατὰ πρώτην προσέγγισιν, εἶτα τὴν ἀκριβεστέραν. Ἡ σύγκρισις τῶν δύο λύσεων ἀποδεικνύει, ὅτι ἐν προκειμένῳ ἡ κατὰ πρώτην προσέγγισιν λύσις ἀπέχει λίαν αἰσθητῶς τῆς ἀληθοῦς, ἰδίως διὰ λόγον πλευρῶν τῆς ὀρθογωνικῆς πλακὸς πολὺ διάφορον τῆς μονάδος. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ἰδιάζουσαν φόρτισιν τῆς πλακὸς καὶ τὴν ἐντεῦθεν δημιουργουμένην λίαν ἀκανόνιστον μορφὴν τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως.

Εἰς τὴν τελευταίαν § 16 ἐξετάζεται ἡ ὕβωσις ὀρθογωνικῆς πλακὸς ἀρθρωτῶς στηριζομένης, ὑποβαλλομένης εἰς ὀρθὰς καμπτικὰς τάσεις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς. Τὸ πρόβλημα ἐμελετήθη ὡσαύτως ὑπὸ τοῦ Timoshenko («Eisenbau» 1921). Στερούμενοι τῆς πηγῆς ταύτης, ἀνεζητήσαμεν τὴν λύσιν, βάσει τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου, κατὰ 1ην καὶ 2αν προσέγγισιν. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο προσεγγίσεων διαφορὰ δὲν εἶναι ἐν προκειμένῳ μεγάλη. Οὐχ ἧττον προέκυψε διαφορὰ σημαντικὴ ἐν σχέσει μὲ τὰ ἐν τῇ βιβλιογραφίᾳ διδόμενα ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς περιπτώσεως ταύτης.

Ἡ ἀνὰ χεῖρας διατριβὴ δὲν ἐξαντλεῖ τὸ πρόβλημα τῆς ὑβώσεως. Πλεῖσται ἀκόμη ἐνδιαφέρουσαι περιπτώσεις συνθετωτέρας φορτίσεως καὶ γεωμετρικοῦ σχήματος, ἐρευνηθεῖσαι καὶ ἐπιλυθεῖσαι κατὰ τὴν διαρρεύσασαν δεκαετίαν παρὰ τῶν Timoshenko, Schleicher, Chwalla, Barbré, Nölke κ.ἄ., ἀπαιτήσασαι μακροὺς καὶ πολυπλόκους ὑπολογισμούς, δὲν περιελήφθησαν εἰς τὴν διατριβήν, ὡς ἐξερχόμεναι πλέον τοῦ πλαισίου καὶ τοῦ σκοποῦ αὐτῆς. Δέον συνάμα ν' ἀναφέρωμεν, ὅτι, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, ὅλαι αἱ μέχρι τοῦδε δοθεῖσαι λύσεις ἀναφέρονται κυρίως εἰς τὴν ἐλαστικὴν περιοχήν, ἐνῷ ἡ πλαστικὴ περιοχὴ δὲν ἀπετέλεσεν ἀκόμη ἀντικείμενον συστηματικῆς θεωρητικῆς ἢ πειραματικῆς ἐρεύνης.

Διὰ τὰς ἐν τῇ πράξει ἀπαντωμένας λεπτὰς χαλυβδίνας πλάκας ἡ ἐλαστικὴ περιοχὴ προβαδίζει βεβαίως εἰς σπουδαιότητα τῆς πλαστικῆς περιοχῆς, χωρὶς μὲ τοῦτο ἡ τελευταία νὰ χάνῃ τὴν σημασίαν της. Εἰς πλακοειδῆ ὅμως σώματα ἐξ ἄλλων ὑλικῶν, ὡς τὸ σκυρόδεμα, ὡπλισμένον ἢ οὔ, εἶναι φανερόν, ὅτι, λόγῳ τοῦ σχετικῶς μεγάλου πάχους αὐτῶν, τὴν μείζονα σπουδαιότητα θὰ ἔχῃ ἡ μελέτη τῆς πλαστικῆς περιοχῆς. Εἶναι ἑπόμενον ἡ θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς πλαστικῆς περιοχῆς νὰ προσκόψῃ εἰς πολλὰς δυσχερείας, ὡς ἐκ τοῦ μεταβλητοῦ τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος (Πρβλ. μέθοδον Engesser μελέτης τοῦ προβλήματος λυγισμοῦ ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ). Ἐξ ἄλλου εἶναι ἀμφισβητήσιμον κατὰ πόσον αἱ ἰσχύουσαι διὰ λεπτὰς πλάκας ἐξισώσεις ἐπιτρέπεται νὰ χρησιμοποιηθοῦν κατ' ἐπέκτασιν καὶ εἰς πλάκας μεγαλειτέρου πάχους. Ὡς ἐκ τούτων θεωροῦμεν ὡς καταλληλοτέραν ὁδόν, πρὸς ἐξέτασιν τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ, τὴν πειραματικήν, ἐφαρμοσθεῖσαν ἄλλωστε τόσον ἐπιτυχῶς εἰς τὸ παρελθὸν διὰ τὴν μελέτην τοῦ λυγισμοῦ ῥάβδων μικρᾶς λυγηρότητος. Τὰ πειράματα ταῦτα θὰ ἔδει κατὰ τὴν κρίσιν ἡμῶν νὰ ἐκταθοῦν κυρίως εἰς χαλυβδίνας ἢ γενικώτερον μεταλλικὰς πλάκας, πολὺ δὲ ὀλιγώτερον εἰς πλάκας ἐξ ὑλικοῦ ὡς τὸ σκυρόδεμα, ὅπου, λόγῳ τοῦ μεγάλου σχετικῶς πάχους αὐτῶν, εἶναι πολὺ ἐνδεχόμενον ὁ κίνδυνος θραύσεως συνεπείᾳ ὑπερβάσεως τοῦ ὁρίου ἀντοχῆς τοῦ ὑλικοῦ νὰ εἶναι μεγαλείτερος τοῦ κινδύνου ὑβώσεως.

Πρὸς τὸν καθηγητὴν κ. Α. Ρουσόπουλον, ὅστις ἐμελέτησε τὸ κείμενον τῶν χειρογράφων καὶ μὲ ἐτίμησε μὲ τὰς πολυτίμους ὑποδείξεις του καὶ τὰς συμβουλάς,—ὧν ἔκαμα εὐρεῖαν χρῆσιν—,ἐπιθυμῶ νὰ ἐκφράσω ἐνταῦθα τὰς θερμοτάτας εὐχαριστίας μου καὶ τὴν βαθεῖαν εὐγνωμοσύνην.

Ἀθῆναι, Ἰούνιος 1944

Πηγαί — Βιβλιογραφία

G. H. Bryan: Διατυπώνει, βασιζόμενος εἰς τὰς ἐργασίας τοῦ Lord Rayleigh (The theory of sound, 1894, τ. 1 καὶ 2), τὸ ἐνεργειακὸν κριτήριον εὐσταθείας λεπτῶν πλακῶν: Βλ. «Proceedings, Cambridge Phil. Society», τ. 6, 188, σελ. 199 καὶ 286.
Ἐπίσης: «Proceedings, London Math. Society», τ. 22, 1891, σελ. 54 καὶ τ. 25, 1894, σελ. 141.

Walter Ritz: Διατύπωσις τοῦ ἐνεργειακοῦ κριτηρίου εὐσταθείας ἐλαστικῶν πλακῶν καὶ μεθόδου ὁλοκληρώσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως καμπτομένης πλακός: Βλ. «Crelles Journal, Math.», τ. 135, 1909.

St. Timoshenko: Διατυπώνει, ἀνεξαρτήτως πρὸς G. Bryan, τὸ ἐνεργειακὸν κριτήριον εὐσταθείας καὶ ἐφαρμόζει τοῦτο τὸ πρῶτον διὰ τὴν λύσιν πολυαρίθμων προβλημάτων εὐσταθείας καὶ ὑβώσεως, μεγάλης πρακτικῆς σημασίας: Βλ. «Ἐπὶ τῆς εὐσταθείας ἐλαστικῶν συστημάτων», Κίεβον 1910, ἢ «Zeitschrift f. math. Physik», τ. 58, 1910, σελ. 337, ἢ «Annales des Ponts et Chaussées», τ. IX, 1913, ἢ «Θεωρία Ἐλαστικότητος», Πετρούπολις 1916.
Ἐπίσης: «Ὕβωσις ὑπὸ καθαρὰν διάτμησιν», Πρακτικὰ τοῦ Ἰνστιτούτου ὁδοποιῶν μηχανικῶν», Πετρούπολις, τ. 89, 1915 ἢ «der Eisenbau», τ. 12, 1921.
Ἐπίσης: «Über die Stabilität versteifter Platten», der Eisenbau 1921, τ. 12 καὶ «Handbuch der phys. und technischen Mechanik», τ. IV, 1931.
Ἐπίσης: «Τὸ πρόβλημα τῆς ὑβώσεως ὑπὸ καθαρὰν κάμψιν καὶ καθαρὰν διάτμησιν», Miscell. Papers pres. Amer. Soc. Mech. Engr., Meetings 1933, Paper Nr. 3, ἢ καὶ «Engineering», τ. 138, 1934, σελ. 207.

H. Reissner: Ἐφαρμόζει πρῶτος τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον πρὸς ἐπίλυσιν ἁπλῶν περιπτώσεων ὑβώσεως πλακῶν: Βλ. «Über die Knickfestigkeit ebener Bleche», Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, σελ. 93.
Διατυπώνει ἐπίσης τὸ ἐνεργειακὸν κριτήριον ὑβώσεως, βλ.: Zeitschrift f. angew. Mathematik u. Mechanik», τ. V, 1925, σελ. 475.
Ἐπίσης ἐξετάζει ὁμοῦ μετὰ τοῦ St. Bergmann τὸ πρόβλημα ὑβώσεως ὑπὸ καθαρὰν διάτμησιν, ὡς ἀπαντᾶται εἰς τὴν τεχνικὴν τῶν πετομηχανῶν, βλ.: «Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt», τ. 23, 1932.

F. Schleicher: Διατυπώνει κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τῶν τάσεων ὑβώσεως ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ, βλ.: «Schlussbericht, 1er Intern. Kongress f. Brückenbau, in Paris, 1932» ἢ καὶ «Abhandlungen der Inter. Vereinigung f. Brückenbau», τ. I, Zürich. 1932.
Ἐπίσης ἐρευνᾷ τὴν ὕβωσιν ὀρθογωνικῶν πλακῶν, ὧν αἱ θλιβόμεναι ἕδραι εἶναι πεπακτωμέναι, βλ.: «Mitteilungen aus den Forschungs-anstalten von Gutehoffnungshütte u. s. w.», τ. I, 1930—32.
Ἐπίσης ἐξετάζει τὸ πρόβλημα ὑβώσεως ἐνισχυμένων πλακῶν, βλ.: «Stabilitätsprobleme vollwandiger Stahltragwerke», der Bauingenieur, τ. 15, 1934.
Ἐπίσης διατυπώνει τὸ ἐνεργειακὸν κριτήριον ὑβώσεως, βλ.: «der Stahlbau», τ. 8, 1935.

E. Chwalla: Ἐξετάζει καὶ ἐπιλύει πολλὰς πολυπλόκους περιπτώσεις ὑβώσεως ἐνισχυμένων ἢ οὔ πλακῶν, βλ.: «Das allgemeine Stabilitätsproblem der gedrückten, durch Randwinkel verstärkten Platte», Ingenieur-Archiv, τ. 5, 1934, ἐπίσης «Die Formeln zur Berechnung der voll mittragenden Breite dünner Gurt-und Rippenplatten», der Stahlbau, τ. 9, 1936, ἐπίσης «Die Bemessung des Stegbleches im Endfeld vollwandiger Träger», der Bauingenieur, τ. 9/10, 1936, σελ. 81 καὶ «Vorbericht zum 2en Kongress der internationalen Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau», 1936.
Ἐπίσης ἐρευνᾷ τὴν ὕβωσιν ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ, βλ.: «Bericht, 2e Intern. Tagg. für Brückenbau in Wien, 1928», σελ. 321.

J. Bubnoff: Ἐρευνᾷ πρῶτος τὴν ὕβωσιν ὑπὸ καθαρὰν κάμψιν, «Θεωρία ναυπηγικῆς», Πετρούπολις 1912.

F. Bleich: «Theorie u. Berechnung der eisernen Brücken», Julius Springer, Berlin 1924, § 13, σελ. 216 κ. ἑ.

R. Southwell a. S. Skan: Ἐρευνοῦν καὶ ἐπιλύουν τὸ πρόβλημα τῆς ὑβώσεως πλακὸς ἀπείρου μήκους, ὑποβαλλομένης εἰς καθαρὰν διάτμησιν, βλ.: «On the stability under schearing forces of a flat elastic strip», Proceedings, Royal Society, London, Σειρὰ Α., τ. 105, 1924.

A. Nádai: «Elastische Platten», Julius Springer, Berlin 1925.

A. u. L. Föppl: «Drang u. Zwang», τ. I καὶ II, § 12 καὶ § 105 κ. ἑ., R. Ordenbourg, München u. Berlin 1928.

H. Wagner: Ὕβωσις ὀρθογωνικῆς πλακὸς ὑπὸ καθαρὰν θλῖψιν καὶ καθαρὰν διάτμησιν, βλ.: «Jahrbuch der wissensch. Gesellschaft f. Luftfahrt», 1928, σελ. 113.

Geckeler: Ἁπλῆ διατύπωσις τοῦ ἐνεργειακοῦ κριτηρίου εὐσταθείας, βλ.: «Handbuch der Physik», τ. VI, 1928.

Melan: Ὕβωσις χαλυβδίνων κορμῶν συνθέτων διατομῶν, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς μερικῆς πακτώσεως τοῦ κορμοῦ ἐπὶ τῶν πελμάτων, βλ.: «Verhandlungen des 3en intern. Kongresses f. technische Mechanik», Stockholm 1930.

E. Seydel: Ἀναθεώρησις ὑπολογισμῶν τῆς ἐργασίας τῶν Southwall—Skan (βλ. ἀνωτέρω) καὶ εἰδικὴ διερεύνησις τῆς ὑβώσεως τετραγώνου πλακός, ὑποβαλλομένης εἰς καθαρὰν διάτμησιν, βλ.: «Ingenieur—Archiv», τ. 4, 1933.

Rendulic: Ὕβωσις ἐνισχυμένων χαλυβδίνων διατομῶν Τ, βλ.: «Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften», 1933.

H. L. Cox: Ὕβωσις ὑπὸ καθαρὰν διάτμησιν διὰ πεπακτωμένας ἕδρας τῆς πλακός, βλ.: «Aeron. Res. Comm. and Mem., London 1933, Rep. No 1553».

F. Hartmann: Ὕβωσις πελμάτων διατομῆς Τ, βλ: «Die Berechnung von T—Gurten auf Ausbeulung», Stahlbau 1934, τ. 14. Ἐπὶ τῆς ἄνω περιπτώσεως διεξήγαγε καὶ πειράματα ἐν τῷ ἐργαστηρίῳ Ἀντοχῆς Ὑλικῶν τοῦ Πολυτεχνείου τῆς Βιέννης.
Ἐπίσης: «Knickung, Kippung, Beulung», κεφ. VIII, σελ. 152 κ. ἑ., F. Deuticke, Leipzig u. Wien, 1937.

F. Wansleben: Ἁπλοῦς κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸς ἔναντι ὑβώσεως πλακὸς ἀπείρου μήκους, ὑποβαλλομένης εἰς καθαρὰν θλῖψιν καὶ καθαρὰν διάτμησιν, βλ. «der Stahlbau», τ. 8, 1935.

A. S. Lokshin: Ὕβωσις πλακὸς ἐνισχυμένης δι' ὁσονδήποτε ἰσαπεχουσῶν ὁμοίων ἐνισχύσεων, βλ.: «On the calculation of plates with ribs», Appl. Math. a. Mech., τ. 2, 1935.

Ihlenburg: Ὕβωσις πελμάτων διατομῆς Τ, βλ.: «der Stahlbau», τ. 11,26, 1935.

Kollbrunner: Πειραματικὴ ἔρευνα ἔναντι ὑβώσεως θλιβομένου γωνιακοῦ ἐλάσματος, βλ.: «Das Ausbeulen des auf Druck beanspruchten freistehenden Winkels», Zürich u. Leipzing, Leemann & Co, 1936.

O. Stein: Ὕβωσις ὑπὸ καθαρὰν κάμψιν καὶ ἐπὶ πλέον ὑπὸ καθαρὰν διάτμησιν, βλ.: «der Stahlbau», τ. 7, 1934.

K. Girkmann: Ὕβωσις πλακῶν ὑπὸ κάμψιν καὶ διάτμησιν, θεωρητικὴ καὶ πειραματικὴ διερεύνησις, βλ.: «der Stahlbau», τ. 8, 1935.
Ἐπίσης ὕβωσις συνεπείᾳ μεμονωμένου φορτίου, βλ.: «Stegblechbeulung bei örtlichem Lastangriff», Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften», 1936.

K. Nölke: Ὕβωσις ὑπὸ κάμψιν διὰ πεπακτωμένας διαμήκεις ἕδρας, βλ.: «Biegungsbeulung der Rechteckplatte mit eingespannten Längsrändern», der Bauingenieur, τ. 13)14, 1936.

R. Barbré: Ὕβωσις ὀρθογωνικῶν πλακῶν ἐνισχυμένων διὰ διαμήκων ἐνισχύσεων, ὑποβαλλομένων εἰς ὁμοιόμορφον θλῖψιν, βλ.: «Beulspannungen von Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmässiger Druckbeanspruchung», der Bauingenieur 1936, τ. 25)26.

Ν. Κιτσίκη: «Στατικὴ Ι», Μέρος δεύτερον, ἐδάφ. 54 κ. ἑ., 1938. Ἐπίσης «Στατικὴ ΙΙΙ», κεφ. 1ον, ἐδάφ. 1—18, 1940.

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Μέρος πρῶτον

§ 1. *Εὐσταθὴς καὶ ἀσταθὴς ἐλαστικὴ ἰσορροπία.* Ἡ ἀρχὴ τῶν δυνατῶν ἔργων, προκειμένου περὶ ἐλαστικῶν σωμάτων, διατυποῦται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$\Sigma\, \overline{\mathrm{P}}\, \underline{\delta} = -\Sigma\Sigma\, \overline{\mathrm{J}}\, \underline{\delta} = \underline{\mathrm{A}}_\pi \tag{1}$$

ἔνθα $\overline{\mathrm{P}}$ = ἐξωτερικὴ δύναμις, $\overline{\mathrm{J}}$ = ἐσωτερικὴ δύναμις, $\underline{\delta}$ = δυνατὸς ἀπειροστὸς δρόμος τῶν σημείων ἐφαρμογῆς $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{J}}$ κατὰ τὴν θεωρουμένην ἀπειροστὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν, $\underline{\mathrm{A}}_\pi$ τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως. (1).

Συμφώνως πρὸς ἐξ. (1), ἐὰν δυνάμεις $\overline{\mathrm{P}}$ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ ἐλαστικοῦ σώματος ἀκολουθοῦντος οἱονδήποτε νόμον ἐλαστικότητος ἰσορροποῦν, ἔχουν δ' ἐπιτελεσθῆ αἱ εἰς τὰς δυνάμεις ταύτας ἢ καὶ εἰς ἄλλα αἴτια (λ.χ. μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας) ἀντιστοιχοῦσαι παραμορφώσεις, διὰ πᾶσαν ἀπείρως μικρὰν ***δυνατὴν*** παραμόρφωσιν τοῦ σώματος τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπὸ τῶν ἐξωτερικῶν δυνατῶν ἐπιτελουμένων ἔργων $\Sigma\overline{\mathrm{P}}\,\underline{\delta}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως $\underline{\mathrm{A}}\pi$, ὅπερ ἐπίσης εἶναι ἴσον ἀλλ' ἀντιθέτου σημείου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δυνατῶν ἔργων τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων $\Sigma\Sigma\overline{\mathrm{J}}\,\underline{\delta}$. (1)

Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι καὶ ἐπαρκής, ἐφ' ὅσον ἰσχύει δι' ὅλας τὰς δυνατὰς παραμορφώσεις.

Ἂν ἤδη καλέσωμεν Α τὸ πραγματικὸν ἔργον παραμορφώσεως τοῦ ἐλαστικοῦ σώματος, ὑποβαλλομένου εἰς τὴν φόρτισιν τοῦ ἰσορρόπου συστήματος ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\overline{\mathrm{P}}$, θεωρήσωμεν δὲ τὰς δυνατὰς μετακινήσεις $\underline{\delta}$ ὡς μεταβολὰς $\Delta\overline{\delta}$ τῶν ἐπιτελεσθεισῶν πραγματικῶν μετακινήσεων $\overline{\delta}$ καὶ συνεπῶς τὰς χαρακτηριστικὰς $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\gamma}$ τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως ὡς μεταβολὰς Δε, Δγ τῶν χαρακτηριστικῶν ε, γ τῆς πραγματικῆς παραμορφώσεως (1), τὸ δυνατὸν ἔργον $\underline{\mathrm{A}}\pi$ ἐμφανίζεται τότε ὡς μεταβολὴ ΔΑ τοῦ πραγματικοῦ ἔργου παραμορφώσεως (2), ἡ δὲ συνθήκη (1) γίνεται

$$\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\delta - \Delta\mathrm{A} = \mathrm{O}. \tag{2}$$

Ἡ ἐξ. (2), ἐκφράζουσα τὴν ἀρχὴν τῶν δυνατῶν ἔργων ὑπὸ μορφὴν διάφορον τῆς ἐξ. (1), θέλει χρησιμοποιηθῆ κατωτέρω, ἐπειδὴ παρουσιάζεται προσφορωτέρα τῆς ἐξ. (1) διὰ τὴν ἔρευναν ποὺ ἀκολουθεῖ.

Δέον νὰ ἰσχύῃ διὰ πάσας τὰς μικρὰς δυνατὰς παραμορφώσεις—πραγματοποιησίμους ἢ μὴ διὰ μικρᾶς αὐξήσεως τῶν φορτίων—, ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα τελεῖ ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν φορτίων $\overline{\mathrm{P}}$ ἐν τῇ καταστάσει εἰς ἣν ἀναφέρεται τὸ ἔργον παραμορφώσεως Α. Ἡ ἐξ. (2) ἑρμηνεύεται ἐξ ἄλλου καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, καθ' ὅσον ἐκφράζει, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπιτελούμενον κατὰ τὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν ἔργον ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀποταμιευομένην ἐν τῷ σώματι ἐλαστικὴν ἐνέργειαν. Παραλείπονται βεβαίως, ὡς ἀμελητέαι, ἄλλαι μορφαὶ ἐνεργείας (κινητική, θερμική), εἰς ἃς δυνατὸν νὰ μετατραπῇ μέρος τῆς προσδιδομένης ἔξωθεν ἐνεργείας.

Παρέχει κατὰ ταῦτα ἡ ἀρχὴ τῶν δυνατῶν ἔργων ἓν ἀσφαλὲς μέσον διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ἰσορροπίας τοῦ φορτιζομένου ἐλαστικοῦ σώματος. Δὲν εἴμεθα ὅμως ἀκόμη εἰς θέσιν νὰ ἐξακριβώσωμεν, ἂν ἡ τοιαύτη ἰσορροπία εἶναι ***εὐσταθὴς*** ἢ ***ἀσταθής***. Ἐν τούτοις τὸ σχετικὸν κριτήριον εὐκόλως δύναται νὰ διατυπωθῇ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κατωτέρω ἁπλοῦ συλλογισμοῦ.

Εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ ἰσορροπία ἐν τῇ καταστάσει τῇ χαρακτηριζομένῃ ὑπὸ τοῦ ἔργου παραμορφώσεως Α εἶναι εὐσταθής, δοθῇ δὲ πολὺ μικρὰ δυνατὴ παραμόρφωσις διὰ στιγμιαίας ἐξωτερικῆς ἐπενεργείας (λ. χ. ἐλαφρᾶς κρούσεως), τὸ σῶμα θὰ ἐπανέλθῃ ἀφ' ἑαυτοῦ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν καὶ κατάστασιν παραμορφώσεως, εὐθὺς ὡς ἀφεθῇ ὑπὸ τὴν ἐπιρροὴν τῶν ἀρχικῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\overline{\mathrm{P}}$. Κατὰ τὴν ἐπάνοδον ταύτην ἡ ἀποταμιευθεῖσα—πέραν τῆς ἀρχικῆς Α—δυνητικὴ ἐνέργεια ΔΑ ἀναλίσκεται, τὸ μὲν διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῶν ἀνθισταμένων ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\overline{\mathrm{P}}$, μέρος δὲ ταύτης μετατρέπεται κατ' ἀνάγκην εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, μεθ' ἧς τὸ σῶμα ἐπαναφέρεται εἰς τὴν κατάστασιν ἐκκινήσεως. Ἑπομένως, τὸ ὁλικὸν ἔργον παραμορφώσεως, δηλαδὴ ἡ ὁλικὴ δυνητικὴ ἐνέργεια $\mathrm{A}+\Delta\mathrm{A}$ ἐν τῇ θεωρουμένῃ γειτονικῇ θέσει, πρέπει νὰ μὴ εἶναι ἀκριβῶς ἴση πρὸς $\mathrm{A}+\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\overline{\delta}$, ἀλλὰ κατά τι μεγαλειτέρα καὶ δὴ κατὰ τὸ μέγεθος $\Delta^2\mathrm{A}$, ὥστε νὰ εἶναι $\Delta\mathrm{A}=\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\overline{\delta}+\Delta^2\mathrm{A}$, ὅπου τὸ πλεόνασμα $\Delta^2\mathrm{A}$ παριστᾷ τὸ μέρος τῆς δυνητικῆς ἐνεργείας ποὺ μετατρέπεται, κατὰ τὰ προειρημένα, εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν. Αἴρεται δὲ ἡ ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουσα ἀντίφασις μὲ τὴν ἐξ. (2)—ἥτις ὁπωσδήποτε δέον νὰ ἰσχύῃ—ἂν σημειωθῇ ὅτι τὸ πλεόνασμα $\Delta^2\mathrm{A}$ εἶναι μέγεθος ἀπειροστόν, τάξεως ἀνωτέρας ἢ τὰ ΔΑ καὶ $\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\overline{\delta}$.

Ἀντιθέτως, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀσταθοῦς ἰσορροπίας, ἂν δοθῇ εἰς τὸ σῶμα μικρὰ ἐλαστικὴ παραμόρφωσις, ἀφεθῇ δὲ εἶτα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἀρχικῶν φορτίων $\overline{\mathrm{P}}$, τοῦτο οὐ μόνον δὲν θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήντου θέσιν καὶ μορφήν, ἀλλὰ τοὐναντίον θὰ τείνῃ ἔτι μᾶλλον ν' ἀπομακρυνθῇ ταύτης, μέχρις οὗ φθάσῃ εἰς ἑτέραν θέσιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Ἡ προσδιδομένη ἔξωθεν ἐνέργεια $\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\overline{\delta}$ ἀποταμιεύεται κατὰ τὸ πλεῖστον ἐν τῷ σώματι ὑπὸ μορφὴν δυνητικῆς ἐνεργείας ΔΑ, ἐν μέρει ὅμως μετατρέπεται κατ' ἀνάγκην εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, μεθ' ἧς τὸ σῶμα συνεχίζει τὴν ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του μορφῆς ἀπομάκρυνσιν. Ἡ ὁλικὴ δυνητικὴ ἐνέργεια $\mathrm{A}+\Delta\mathrm{A}$ ἐν τῇ γειτονικῇ θέσει πρέπει νὰ εἶναι κατά τι μικροτέρα τῆς τιμῆς $\mathrm{A}+\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\overline{\delta}$ κατὰ τὸ μέγεθος $\Delta^2\mathrm{A}$, ὥστε νὰ εἶναι $\Delta\mathrm{A}=\Sigma\overline{\mathrm{P}}\,\Delta\overline{\delta}-\Delta^2\mathrm{A}$, ὅπου τὸ ἔλλειμμα $\Delta^2\mathrm{A}$ παριστᾷ τώρα τὸ μέρος τῆς ἔξωθεν προσδιδομένης ἐνεργείας ποὺ μετατρέπεται εἰς ἐπὶ τὰ πρόσω κινητικὴν ἐνέργειαν. Ὡς καὶ προηγουμένως, τὸ μέγεθος $\Delta^2\mathrm{A}$ εἶναι ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἐν σχέσει πρὸς τὰ ΔΑ καὶ $\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\Delta\overline{\delta}$, ὥστε νὰ ἐπαληθεύεται πάντοτε ἡ συνθήκη (2).

Ἡ ἐξ. (2) γράφεται οὕτω πληρέστερον ὡς ἑξῆς:

$$\Sigma\overline{\mathrm{P}}.\,\Delta\overline{\delta} + \Delta^2\mathrm{A} = \Delta\mathrm{A} \tag{3}$$

---

(1) Ν. Κιτσίκη: Στατική, Τόμος ΙΙΙ, ὑπερστατικοὶ φορεῖς.

(2) Παραλείπομεν ἐνταῦθα τὴν σχετικὴν ἀπόδειξιν, δι' ἣν παραπέμπομεν εἰς τὸ σύγγραμμα τῆς ὑποσ. (1).

ἔνθα $\Delta^2 A$ ἡ 2α μεταβολὴ τοῦ Α. Ἡ κατάστασις ἰσορροπίας εἶναι ***εὐσταθὴς ὅταν*** $\Delta^2 A > O$, τοὐναντίον ***ἀσταθὴς ὅταν*** $\Delta^2 A < O$. Κριτήριον δηλαδὴ εὐσταθείας ἢ οὔ τῆς θεωρουμένης καταστάσεως ἰσορροπίας εἶναι τὸ σημεῖον τῆς 2ας μεταβολῆς τοῦ ἔργου παραμορφώσεως Α. Εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν, ἥτις καὶ μᾶς ἐνδιαφέρει ἰδιαιτέρως, διότι ὁδηγεῖ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς κρισίμου φορτίσεως, πέραν τῆς ὁποίας ἡ ἰσορροπία μεταπηδᾷ ἀπὸ τῆς εὐσταθοῦς εἰς τὴν ἀσταθῆ κατάστασιν, θὰ εἶναι:

$$\Delta^2 A = O \qquad (4)$$

Ἐννοεῖται, ὅτι ἡ ἐξ. (4) ἰσχύει αὐστηρῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἐλαστικὴ ἰσορροπία τοῦ σώματος εἶναι ***ἀδιάφορος***, δηλαδὴ ὅλαι αἱ γειτονικαὶ πρὸς τὴν θεωρουμένην μορφαὶ τοῦ σώματος εἶναι ἐξ ἴσου εὐσταθεῖς.

Τὸ πρόβλημα ἐν γένει τοῦ ***λυγισμοῦ*** εἶναι πρόβλημα εὐσταθείας καὶ διὰ τοῦτο ἡ θεωρητική του διερεύνησις πρέπει νὰ γίνῃ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων. Εἰς περιπτώσεις εὐσταθοῦς ἰσορροπίας ἡ θραῦσις ἑνὸς σώματος λαμβάνει χώραν εἰς τὸ σημεῖον ἢ τὰ σημεῖα ἐκεῖνα, ὅπου ἡ ἐπιπόνησις τοῦ ὑλικοῦ ὑπερέβη ὡρισμένον ὅριον, ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ εἴδους τοῦ ὑλικοῦ [1]. Τοὐναντίον, ὁσάκις ἡ ἰσορροπία εἶναι ἀσταθής, τὸ σῶμα, ἐν τῇ ἀναζητήσει εὐσταθεστέρας μορφῆς, «ἐκφεύγει» ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος καὶ θέσεως, ὅπου αἱ ἀναπτυσσόμεναι ἐπιπονήσεις δὲν ἦσαν ἐπικίνδυνοι, πρὸς ἕτερον γεωμετρικὸν σχῆμα καὶ θέσιν, ὅπου αἱ ἐπιπονήσεις καθίστανται ἐπικίνδυνοι. Εἰς τὴν νέαν ταύτην θέσιν αἱ ἀναπτυσσόμεναι τάσεις γίνονται ἀπαραδέκτως μεγάλαι, ἐνῷ συνάμα μικρὰ διακύμανσις τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπιφέρει ἰσχυρὰν διακύμανσιν τῶν παραμορφώσεων. Γειτονικὴ θέσις εὐσταθείας, πρὸς ἣν ἐκφεύγει τὸ σῶμα, καὶ ἂν ἔτι ὑπάρχῃ, δὲν θὰ εἶναι ἐπομένως ἐπιτρεπτὴ διὰ λόγους πρακτικούς.

(1) Ν. Κιτσίκη: Στατικὴ Ι, § 93, σελ. 205: Θεωρίαι ἐπιπονήσεως τοῦ ὑλικοῦ.

Ἡ ἐκδήλωσις τοῦ φαινομένου τῆς «ἐκφυγῆς» ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα τοῦ σώματος καὶ τὸν τρόπον στηρίξεως καὶ φορτίσεως αὐτοῦ. Ἂν ληφθοῦν τὰ ἁρμόζοντα μέτρα, ἀνασταλτικὰ τῆς ἐκφυγῆς, τὸ σῶμα θὰ εἶναι εἰς θέσιν ν' ἀναλάβῃ ἀκινδύνως μεγαλείτερα φορτία. Ἐλλείψει καταλλήλου ἀντιστηρίξεως, τὸ σῶμα ἐκφεύγει καὶ θραύεται πολὺ ἐνωρίτερον ἢ ὅσον θὰ ἐδικαιούμεθα ν' ἀναμείνωμεν ὡς ἐκ τῶν ἰδιοτήτων ἀντοχῆς τοῦ ὑλικοῦ, ἐξ οὗ ἀποτελεῖται.

Κατὰ τὴν ὁριακὴν στιγμὴν τῆς μεταπτώσεως τῆς ἰσορροπίας ἀπὸ τῆς εὐσταθοῦς εἰς τὴν ἀσταθῆ κατάστασιν, καθ' ἣν ἡ ἐλαστικὴ ἰσορροπία καθίσταται ἀδιάφορος, θὰ πρέπει, πληρουμένων ὅλων τῶν ἀναλυτικῶν συνθηκῶν τῆς ἐξεταζομένης περιπτώσεως, νὰ παράγεται παραμόρφωσις ***ἀπροσδιόριστος***, ἤτοι οἱαδήποτε παραμόρφωσις νὰ εἶναι ἐπιτρεπτὴ καὶ νὰ ἱκανοποιῇ τὰς ἄνω ἀναλυτικὰς συνθήκας, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἀρκούντως μικρά.

Πλὴν τῆς συνθήκης $\Delta^2 A = O$, ἥτις, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἀποτελεῖ τὸ ἐνεργειακὸν κριτήριον μεταπτώσεως τῆς ἰσορροπίας, συνάγεται οὕτω καὶ τὸ ἀναλυτικὸν κριτήριον, ἐκφραζόμενον ὑπὸ τῆς συνθήκης, ὅτι ἡ παραμόρφωσις δέον νὰ καθίσταται ἀπροσδιόριστος. Ἐφαρμογὴ ἀμφοτέρων τῶν κριτηρίων γίνεται εἰς τὴν ἀκολουθοῦσαν § 2, ὅπου, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ ἐξεταζομένου παραδείγματος, ἐπεξηγοῦνται καὶ διευκρινίζονται ὅλαι αἱ λεπτομέρειαι τῆς ἀνωτέρω ἐρεύνης.

(Συνεχίζεται)

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΓΕΩΡΓ. Θ. ΚΑΚΡΙΔΗ, Ἠλεκτρ. Μηχανικοῦ

Εἰσαγωγή

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων εἶναι ἓν ἀπὸ τὰ συνήθη προβλήματα τῆς πράξεως, τὰ ὁποῖα καλεῖται νὰ λύσῃ ὁ ἠλεκτρολόγος μηχανικός. Τὸ βασικόν του ἐφόδιον εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀποτελοῦν οἱ ἀπὸ ἑκατονταετίας σχεδὸν γνωστοὶ νόμοι τοῦ Kirchhoff.

Ὁ ἐπιδιωκόμενος σκοπὸς εἶναι ἐν τούτοις πρακτικῶς ἀδύνατον νὰ ἐπιτευχθῇ πάντοτε διὰ μόνων τῶν νόμων τοῦ Kirchhoff. Τὰ κυκλώματα τῆς πράξεως εἶναι ἐνίοτε τόσον πολύπλοκα, ὥστε παρ' ὅλον ὅτι κατὰ θεωρίαν οἱ νόμοι τοῦ Kirchhoff εἶναι ἀπολύτως ἐπαρκεῖς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν οἱουδήποτε κυκλώματος, αἱ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν ἐμφανιζόμεναι λογιστικαὶ δυσκολίαι εἶναι συνηθέστατα ἀνυπέρβλητοι. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ κυκλώματα συνεχοῦς ρεύματος, ἰδιαιτέρως ὅμως διὰ τὰ κυκλώματα ἐναλλασσομένου.

Τὸ γεγονὸς τοῦτο ὡδήγησεν εἰς τὰς λεγομένας βοηθητικὰς μεθόδους ὑπολογισμοῦ, τινὲς τῶν ὁποίων εἶναι γνωσταὶ ἀπὸ πολλῶν ἐπίσης δεκαετιῶν. Ἡ συστηματικὴ ἐν τούτοις ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος προσέκρουε πάντοτε εἰς τὴν ἀπέραντον ποικιλομορφίαν τῶν ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων, καὶ οἱ ἠλεκτρολόγοι μηχανικοὶ ἐξακολουθοῦν πάντοτε νὰ ἀποφεύγουν τὸν ἀκριβῆ ὑπολογισμὸν οἱουδήποτε ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος ὀλίγον ἢ πολὺ πολυπλοκωτέρου ἀπὸ τὰ ἐντελῶς στοιχειώδη.

Διὰ τῆς ἀνὰ χεῖρας μελέτης δὲν αἴρονται βεβαίως ὅλαι ἀνεξαιρέτως αἱ σχετικαὶ δυσκολίαι.

Τὸ πρόβλημα, ὅπως τίθεται εἰς τὴν πρᾶξιν, εἶναι συνήθως πολύπλοκον καὶ οὐδεὶς δύναται νὰ τὸ μετατρέψῃ εἰς ἁπλοῦν. Σημαντικὴν ἐν τούτοις συμβολὴν εἰς τὴν τεχνικὴν θεωρίαν τῶν κυκλωμάτων νομίζομεν ὅτι πράγματι παρουσιάζει ἡ εἰς τὰ ἑπόμενα ἀναπτυσσομένη ἀνάλυσις τῶν κυκλωμάτων εἰς τὰ ἁπλούστατα αὐτῶν μέρη, καὶ ἡ μετάθεσις τοῦ προβλήματος ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συνήθους μορφῆς κυκλωμάτων, δηλαδὴ τῶν διπολικῶν διατάξεων, εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἁπλουστάτων συνιστώντων αὐτὰς μερῶν, τὰ ὁποῖα ἐκαλέσαμεν διπολικὰ στοιχεῖα. Τὰ διπολικὰ στοιχεῖα αὐτὰ παρουσιάζουν ἀσυγκρίτως μικροτέραν ποικιλίαν μορφῶν, ἐν ἀντιθέσει δὲ πρὸς τὰς διπολικὰς διατάξεις εἶναι ἐπιδεκτικὰ συστηματικῆς κατατάξεως, ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς μελέτης ταύτης.

Ἡ ἔννοια τοῦ διπολικοῦ στοιχείου, τοῦ ἀποτελοῦντος τρόπον τινὰ τὸ κύτταρον, δι' ἐπαναλήψεων τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ οἱονδήποτε κύκλωμα, ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς μελέτης ταύτης ἐκτιθεμένης μεθόδου ὑπολογισμοῦ, τὴν ὁποίαν ἐκαλέσαμεν μέθοδον δι' ἀλλαγῆς τῶν κόμβων τροφοδοτήσεως. Ἡ γενικὴ αὐτὴ μέθοδος βασίζεται εἰς ἓν παλαιὸν πόρισμα τῆς γενικῆς θεωρίας τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἀγωγῶν, διατυπωθὲν ὑπὸ τοῦ J.C. Maxwell εἰς τὸ βιβλίον του «A Treatise on Electricity and Magnetism» 1873, πρῶτος τόμος, διὰ συνεχὲς ρεῦμα. Μολονότι ὁ Maxwell ὑποδεικνύει τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἔχῃ διὰ τὴν πρᾶξιν τὸ πόρισμα τοῦτο, ἐν τούτοις δὲν ἀνεῦρον αὐτὸ εἰς τὴν μεταγενεστέραν βιβλιογραφίαν. Ἡ παράλειψις αὐτὴ νομίζω ὅτι ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι αἱ μέχρι τοῦδε χρησιμοποιούμεναι βοηθητικαὶ μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ἀναχωροῦν ἀπὸ τὴν τάσιν τροφοδοτήσεως τοῦ κυκλώματος, ὁπότε τὸ πόρισμα τοῦ Maxwell οὐδεμίαν παρουσιάζει δυνατότητα χρησιμοποιήσεως. Τοὐναντίον ἡ προτεινομένη εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀνὰ χεῖρας μελέτης μέθοδος δι' ἀλλαγῆς τῶν κόμβων τροφοδοτήσεως ἀναλύει πρῶτον μορφολογικῶς τὸ διπολικὸν στοιχεῖον, χρησιμοποιεῖ τὸ πόρισμα τοῦ Maxwell διὰ τὴν ἀνεύρε-

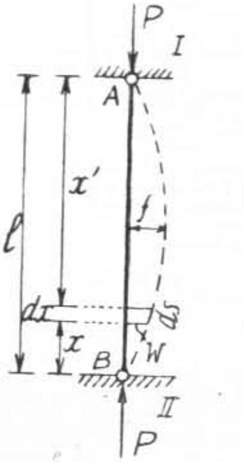
ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 300)

§ 2. *Τὸ παράδειγμα τῆς θλιβομένης ῥάβδου.* Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ἐκτεθέντα ἐν § 1 εἰς τὸ ἁπλούστατον καὶ γνωστότατον παράδειγμα τῆς εὐθυγράμμου, κεντρικῶς θλιβομένης ῥάβδου. Διὰ μῆκος τῆς ῥάβδου μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὴν διατομήν της, ἡ ἔντασις τοῦ φορτίου ὅπερ δύναται ἡ ῥάβδος νὰ μεταβιβάσῃ, ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς καὶ τῆς ἀντοχῆς εἰς θλῖψιν τοῦ ὑλικοῦ ἐξ οὗ ἀποτελεῖται.

Διὰ μῆκος ὅμως τῆς ῥάβδου πολὺ μεγάλον, ἐν συγκρίσει πάντοτε πρὸς τὴν διατομήν της, ἡ θραῦσις ἐπέρχεται δι' ἔντασιν φορτίου πολὺ μικροτέραν τῆς προηγουμένης. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπερνικᾶται τὸ ὅριον ἀντοχῆς εἰς θλῖψιν, ἀλλ' ἡ θραῦσις ἐπέρχεται ἐκ κάμψεως τῆς ῥάβδου, λόγῳ πλευρικῆς ἐκφυγῆς της ἐκ τῆς ἀρχικῆς εὐθυγράμμου θέσεώς της. Ἡ δυνατότης τοιαύτης ἐκφυγῆς εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἀσταθοῦς ἐλαστικῆς ἰσορροπίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν τελεῖ ἡ θλιβομένη ῥάβδος, παρέχεται δὲ ἀπὸ ἐξωτερικήν τινα ἀφορμήν, ἀσήμαντον ἔστω, τυχαίαν καὶ συνεπῶς ἀστάθμητον. Τὸ φαινόμενον καλεῖται «λυγισμός», χαρακτηρίζομεν δὲ τὴν ῥάβδον ὡς «λυγηράν».



Σχ. 1

Θεωρήσωμεν ῥάβδον ΑΒ, εὐθύγραμμον λ.χ. κατακόρυφον, σταθερᾶς διατομῆς, μεσολαβοῦσαν μεταξὺ τῶν σωμάτων I καὶ II καὶ προοριζομένην νὰ μεταβιβάσῃ κεντρικῶς τὴν δύναμιν θλίψεως P ἀπὸ τοῦ ἑνὸς σώματος εἰς τὸ ἄλλο (Σχ. 1).

Ὑποθέσωμεν περαιτέρω ὅτι ἡ ῥάβδος συνδέεται κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β μετὰ τῶν σωμάτων I καὶ II, δι' ἀρθρωτῶν κόμβων. Ἐφ' ὅσον ἡ ῥάβδος ἐκπληροῖ τὸν προορισμόν της, χωρὶς νὰ ὑπόκειται εἰς λυγισμόν, τὸ μῆκος αὐτῆς l θὰ βραχυνθῇ ἐλαστικῶς κατὰ Δl, καὶ ἡ ἐν αὐτῇ ἀποταμιευομένη δυνητικὴ ἐνέργεια, δηλαδὴ τὸ ἐπιτελούμενον πραγματικὸν ἔργον παραμορφώσεως, θὰ εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ

$$A_o = \frac{1}{2}\,P\Delta l = \frac{P^2 l}{2EF} \tag{5}$$

ἔνθα E, F τὸ μέτρον ἐλαστικότητος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τῆς ῥάβδου.

Ἐξετάσωμεν ἤδη, ἂν ἡ κατάστασις ἰσορροπίας τῆς οὕτω βραχυνθείσης κατὰ Δl ῥάβδου εἶναι εὐσταθὴς ἢ ἀσταθής. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἦτο δυνατὴ ἡ κύρτωσις τῆς ῥάβδου, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄξων της νὰ λάβῃ τὴν ἐν Σχ. 1 δι' ἐστιγμένης σημειουμένην θέσιν, ἀπείρως γειτονικὴν τῆς ἀρχικῆς καὶ συμβιβαζομένην μὲ τὰς συνθήκας τῆς ἀρθρωτῆς κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β στηρίξεως. Ὅθεν, ***θεωροῦμεν τὴν τοιαύτην μεταβολὴν μορφῆς ὡς ἀπειροστὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν τῆς ῥάβδου,*** καθ' ἣν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς Α καὶ Β τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων P παραμένουν ἀκίνητα, ἐφαρμόζομεν δὲ διὰ τὴν δυνατὴν ταύτην παραμόρφωσιν τὴν ἀρχὴν τῶν δυνατῶν ἔργων, ὑπὸ τὴν μορφὴν (3). Ἐξ ὑποθέσεως αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις P δὲν ἐπιτελοῦν ἔργον, ἐνῷ ἐξ ἄλλου τὰ σώματα I καὶ II οὐδαμῶς ἐπηρεάζονται ἐκ τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, ἑπομένως ἡ ἐξ. (3) γίνεται:

$$\Delta^2 A = \Delta A \text{ ἢ συμφώνως πρὸς ἐξ. (1) } \Delta^2 A = \underline{A}_\pi\,.$$

Ἔλθωμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\Delta^2 A$. Καλέσωμεν w τὸ βέλος λυγισμοῦ ἢ κάμψεως εἰς τὴν θέσιν x καὶ f τὸ βέλος κάμψεως εἰς τὸ μέσον τῆς ῥάβδου $x = l/_2$.

Τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως $\Delta^2 A = \underline{A}_\pi$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὅρους. Ὁ πρῶτος, ὃν θὰ παραστήσωμεν μὲ $\underline{A}_\mu$ ὀφείλεται εἰς τὴν δυνατὴν μήκυνσιν τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου dx, εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ μήκους του ἀπὸ dx εἰς ds. Ὁ δεύτερος, παριστώμενος μὲ $\underline{A}_\varkappa$, προέρχεται ἐκ τῆς δυνατῆς σχετικῆς στροφῆς $\underline{d\omega}$ δύο ἀπείρως γειτονικῶν διατομῶν, εἶναι προϊὸν τῆς ἀναπτυσσομένης ἐν πάσῃ διατομῇ δυνατῆς καμπτικῆς ῥοπῆς $\underline{M}$.

Ἐκ τοῦ Σχ. 1 προκύπτει

$$ds^2 = dx^2 + dw^2 = dx^2\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]$$

ἢ

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \cong dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right] \tag{6}$$

καθ' ὅσον ἡ σειρὰ

$$\sqrt{1+Z} = 1+\frac{1}{2}Z-\frac{1}{8}Z^2+\frac{1}{16}Z^3-\frac{5}{128}Z^4+\ldots..$$

συγκλίνει διὰ $|Z|<1$, ἐν προκειμένῳ δὲ $Z = \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$

Ἑπομένως

$$d\underline{A}_\mu = -P.\underline{\Delta ds} = -P\,(ds-dx)$$

ἤτοι

$$d\underline{A}_\mu = -\frac{P}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 . dx. \tag{7}$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τῆς ἐκφράσεως $d\underline{A}_\mu$ ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ στοιχείου $F\underline{dx}$ δύναμις εἶναι θλίβουσα, ἐνῷ κατὰ τὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν ἐπιμηκύνεται τὸ στοιχεῖον.

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξ. (7) λαμβάνομεν τὸ ὁλικὸν δυνατὸν ἔργον μηκύνσεως

$$\underline{A}_\mu = -\frac{P}{2}\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \tag{8}$$

Τὸ δυνατὸν ἔργον κάμψεως $\underline{A}_\varkappa$ δίδεται ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς σχέσεως

$$\underline{A}_\varkappa = \frac{1}{2}\int_A^B \underline{M}\,\underline{d\omega} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\underline{M}^2}{EJ}\,dx$$

καθ' ὅσον $\underline{d\omega} = \underline{M}dx/EJ$, ὅπου J ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τῆς διατομῆς ὡς πρὸς κύριον ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς δυνατῆς γραμμῆς κάμψεως [4]. Ἐὰν εἰσαγάγωμεν τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς καμπτομένης δοκοῦ $w'' = -M/EJ$ ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις τοῦ δυνατοῦ ἔργου κάμψεως γίνεται

$$\underline{A}_\varkappa = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \tag{9}$$

(4) Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ $\underline{A}_\varkappa$ δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τόσον ἡ ῥοπὴ κάμψεως $\underline{M}$ ὅσον καὶ ἡ στροφὴ $\underline{d\omega}$ εἶναι προϊόντα τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως. Εἶναι λοιπὸν ἀπαραίτητον νὰ τεθῇ πρὸ τοῦ ὁλοκληρώματος ὁ πολλαπλασιαστὴς 1/2, ἀφοῦ ἡ $\underline{M}$ δὲν εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιτελέσεως τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, ἀλλὰ συναυξάνει μετὰ τοῦ $\underline{d\omega}$ ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 μέχρι τῆς τελικῆς της.

τὸ δὲ ὁλικὸν ἔργον παραμορφώσεως

$$\Delta^2 A = \underline{A}_\pi = \underline{A}_\varkappa + \underline{A}_\mu = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \qquad (10)$$

Συμφώνως πρὸς § 1, ἡ ἰσορροπία τῆς κατὰ Δl βραχυνθείσης ῥάβδου θὰ εἶναι εὐσταθὴς ὅταν $\Delta^2 A = \underline{A}_\mu + \underline{A}_\varkappa > 0$, ἢ ἂν παραλείψωμεν πλέον, χάριν ἁπλουστεύσεως, τὰς κάτωθεν τῶν A_μ καὶ $A_\varkappa$ γραμμάς, δηλωτικὰς τοῦ **δυνατοῦ** τῆς παραμορφώσεως, ὅταν

$$A_\mu + A_\varkappa > 0. \qquad (11)$$

Ἡ ἐξ. (11) ἀποτελεῖ τὴν ***συνθήκην εὐσταθείας*** τῆς ῥάβδου. Ἐκλέξωμεν ἤδη ὡς νόμον μεταβολῆς τῶν τεταγμένων τῆς δυνατῆς γραμμῆς κάμψεως, τὸν ***ἡμιτονοειδῆ***, ἤτοι θέσωμεν

$$w = f.\,\eta\mu\frac{n\pi}{l}x\,.\ (n = 1, 2, 3, \ldots.) \qquad (12)$$

Ἡ ἀκριβεστέρα δικαιολογία τῆς τοιαύτης ἐκλογῆς θὰ δοθῇ κατωτέρω, παρατηροῦμεν ὅμως ἀπὸ τοῦδε, ὅτι ἡ ἐξ. (12) ἱκανοποιεῖ πλήρως τὰς συνθήκας στηρίξεως τῆς ῥάβδου τοῦ Σχ. 1.

Ἐκ τῆς ἐξ. (12) λαμβάνομεν

$$\frac{dw}{dx} = f.\frac{n\pi}{l}\,\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{l}x\ ,\quad \frac{d^2w}{dx^2} = -f.\frac{n^2\pi^2}{l^2}\,\eta\mu\frac{n\pi}{l}x$$

καὶ ἐπομένως

$$A_\varkappa = \frac{EJ}{2}f^2.\frac{n^4\pi^4}{l^4}\int_0^l \eta\mu^2\frac{n\pi}{l}x.dx = \frac{EJ}{4}f^2.\frac{n^4\pi^4}{l^3} \qquad (13)$$

καθ' ὅσον

$$\int_0^l \eta\mu^2\frac{n\pi}{l}x.dx = \frac{l}{n\pi}\int_0^l \eta\mu^2\frac{n\pi}{l}x.d\frac{n\pi}{l}x =$$

$$= \frac{l}{n\pi}\left[-\frac{1}{4}\eta\mu\frac{2n\pi}{l}x + \frac{1}{2}\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l = \frac{l}{2}$$

ἐνῷ

$$A_\mu = -\frac{P}{2}f^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}\int_0^l \sigma\upsilon\nu^2\frac{n\pi}{l}x\,dx = -\frac{P}{4}f^2\frac{n^2\pi^2}{l} \qquad (14)$$

δεδομένου ὅτι

$$\int_0^l \sigma\upsilon\nu^2\frac{n\pi}{l}x.dx = \int_0^l \eta\mu^2\frac{n\pi}{l}x.dx = \frac{l}{2}$$

Ἡ συνθήκη εὐσταθείας (11) λαμβάνει οὕτω τὴν διατύπωσιν [5]

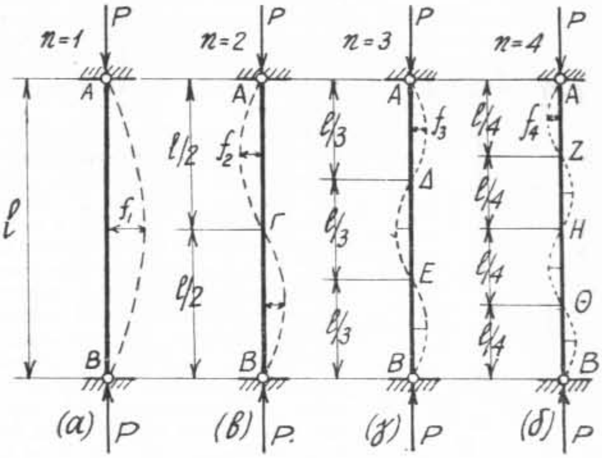
$$\frac{EJ}{4}f^2\frac{n^4\pi^4}{l^3} - \frac{P}{4}f^2\frac{n^2\pi^2}{l} > 0 \quad \text{ἢ} \quad P < \frac{n^2\pi^2}{l^2}EJ\,. \qquad (15)$$

Τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἀνισότητος (15) λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην πραγματικὴν τιμήν του διὰ $n=1$, ὁπότε συμφώνως πρὸς ἐξ. (12), ἡ δυνατὴ γραμμὴ κάμψεως ἔχει τὴν ἐν (Σχ. 2α) μορφήν. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν μὲ $P_\varkappa$ τὴν διὰ $n=1$ κρίσιμον τιμὴν τοῦ φορτίου P, ἣν τοῦτο δὲν πρέπει νὰ ὑπερβῇ χάριν ἐξασφαλίσεως ἔναντι παντὸς κινδύνου λυγισμοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$P_\varkappa = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \qquad (16)$$

ἤτοι τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ Euler, ἐξαχθέντα ἐνταῦθα ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων.

Διὰ $n \neq 1$, λ.χ. $n=2, 3, 4$, αἱ ἀντίστοιχοι δυναταὶ γραμμαὶ κάμψεως εἰκονίζονται εἰς τὰ Σχ. 2β, ἕως Σχ. 2δ, ὡς προέκυψαν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐξ. (12). Παρουσιάζονται οἱ ***κόμβοι*** Γ ($n=2$), Δ καὶ Ε ($n=3$), Ζ, Η καὶ Θ ($n=4$), ὧν ἡ πραγματοποίησις προϋποθέτει τὴν ἀκινησίαν τοῦ σημείου Γ ἢ τῶν Δ, Ε ἢ τῶν Ζ, Η, Θ, ἐπιτυγχανομένην διὰ πλευρικῆς ἀντιστηρίξεως. Γενικῶς παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἐξ. (16), μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὸν παρονομαστὴν θὰ εἰσάγωμεν τὸ μῆκος l/n (ἀντὶ τοῦ l) ἐφ' ὅσον διὰ καταλλήλου ἀντιστηρίξεως ἔχει ἐξασφαλισθῇ, ὥστε τὰ ἄκρα τῶν ἴσων μερῶν l/n, εἰς ἃ χωρίζεται τὸ μῆκος l, νὰ παραμένουν ἀμετάθετα.



Σχ. 2

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐξελέγη αὐθαιρέτως ὡς μορφὴ τῆς δυνατῆς γραμμῆς κάμψεως ἡ ἡμιτονοειδής. Δικαιολογεῖται ἐπομένως ὁ ἐνδοιασμός, ὅτι δι' ἄλλην τινὰ μορφὴν τῆς γραμμῆς κάμψεως, συμβιβαζομένην πάντοτε μὲ τὰς συνθήκας στηρίξεως καὶ βέλους ἴσου πρὸς τὸ τῆς ἡμιτονοειδοῦς, τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως $A_\varkappa + A_\mu$ θὰ προέκυπτεν ἐνδεχομένως μικρότερον τοῦ ὑπὸ τῶν ἐξ. (13) καὶ (14) διδομένου, ὁπότε ἡ κρίσιμος τιμὴ θὰ ἐγίνετο ἴσως μικροτέρα τῆς διδομένης ὑπὸ τῆς ἐξ. (16). Εἶναι ἄρα σκόπιμον νὰ ἐξετασθοῦν καὶ ἄλλαι μορφαὶ γραμμῆς κάμψεως, λ.χ. παραβολική, κυκλικὴ κλπ. Εἰς τὴν περίπτωσιν λ.χ. παραβολικοῦ τόξου, βέλους f (Σχ. 1) ἀντὶ τῆς ἐξ. (12) θὰ ἔχωμεν

$$w = \frac{4f}{l^2}\,x\,x' = \frac{4f}{l^2}\,x(l-x) \qquad (17)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l-2x)\ ,\quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}$$

ἄρα συμφώνως πρὸς ἐξ. (8) καὶ (9)

$$A_\mu = -\frac{P}{2}\int_0^l \frac{16f^2}{l^4}(l-2x)^2 dx = -\frac{8Pf^2}{3l}\ ,$$

$$A_\varkappa = \frac{EJ}{2}\int_0^l \frac{64f^2}{l^4}dx = \frac{32EJf^2}{l^3}$$

ὁπότε ἡ συνθήκη εὐσταθείας γίνεται

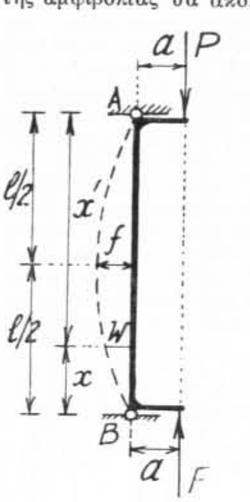
$$-\frac{8Pf^2}{3l} + \frac{32EJf^2}{l^3} > 0 \quad \text{ἢ} \quad P < \frac{12EJ}{l^2}\,. \qquad (18)$$

Συγκρίνοντες μὲ τὴν ἐξ. (16) διαπιστοῦμεν ὅτι διὰ παραβολικὴν γραμμὴν κάμψεως τὸ κρίσιμον φορτίον $P_\varkappa = \frac{12EJ}{l^2}$ προκύπτει μεγαλείτερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἡμιτονοειδῆ καμπύλην ($\pi^2 \cong 9{,}87$), ὅτι δηλαδὴ ὁ λυγισμὸς εὐ-

(5) Τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως $A_\mu + A_\varkappa$ ἐμφανίζεται ὡς συνάρτησις τοῦ f^2, ἤτοι ὡς ἀπειροστὸν μέγεθος ἀνωτέρας τάξεως —ἀφοῦ τὸ βέλος f εἶναι ἤδη ἀπειροστὸν—ἐν σχέσει πρὸς τὸ πραγματικὸν ἔργον παραμορφώσεως A_o, τὸ διδόμενον ὑπὸ τῆς ἐξ. (5).

χερέστερον θὰ πραγματοποιηθῇ κατὰ ἡμιτονοειδῆ καμπύλην ἢ κατὰ παραβολικήν.

Ἀναλόγως θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χειρισθῶμεν ἄλλας μορφὰς γραμμῶν κάμψεως καὶ νὰ συγκρίνωμεν τὰς οὕτω ἑκάστοτε προκυπτούσας τιμὰς κρισίμου φορτίου μὲ τὴν τιμὴν P_κ τῆς ἐξ. (16). Ἡ τοιαύτη ὅμως ἀναζήτησις δὲν θὰ ἀπέκλειε τὴν δυνατότητα ὑπάρξεως ἑτέρας τινὸς μορφῆς γραμμῆς κάμψεως, δι' ἣν ἡ τιμὴ P_κ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπὸ τῆς ἐξ. (16) διδομένης. Ὅθεν πρὸς ἄρσιν τῆς ἀμφιβολίας θὰ ἀκολουθήσωμεν, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἐξ. (16), ἄλλην ὁδόν, ἐντελῶς διάφορον τῆς ἤδη ἀκολουθηθείσης, εἰς τὴν ὁποίαν οὐδαμοῦ θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἄποψις τῆς εὐσταθοῦς ἢ οὐ ἐλαστικῆς ἰσορροπίας.



Σχ. 3

Θεωρήσωμεν τὴν ἀμφιαρθρωτὴν ῥάβδον AB ὑποβαλλομένην παραλλήλως τῷ ἄξονί της εἰς τὴν δύναμιν θλίψεως P ἐνεργοῦσαν οὐχὶ ὡς ἐν Σχ. 1 κεντρικῶς, ἀλλὰ μὲ ἐκκεντρότητα α (Σχ. 3). Λόγῳ τῆς ἐκκεντρότητος ταύτης μεταβιβάζεται εἰς πᾶσαν διατομὴν τῆς ῥάβδου, οὐ μόνον δύναμις θλίψεως, ἀλλ καὶ καμπτικὴ ῥοπή. Ὁσονδήποτε μικραὶ τιμαὶ τοῦ φορτίου P προκαλοῦν, πλὴν τῆς βραχύνσεως τῆς ῥάβδου καὶ κάμψιν αὐτῆς, ἔστω δὲ w ἡ τεταγμένη εἰς τὸ ὕψος x τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς κάμψεως.

Ἡ καμπτικὴ ῥοπὴ εἰς τὴν διατομὴν x εἶναι

$$M = P\,(\alpha + w)$$

καὶ ἑπομένως ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς κάμψεως θὰ εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ

$$EJ\,\frac{d^2w}{dx^2} = -P\,(\alpha + w) \text{ ἢ } EJ\,\frac{d^2w}{dx^2} + Pw = -P\alpha. \qquad (19)$$

Διὰ E, J σταθερά, μία μερικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως (19) θὰ εἶναι ἡ $w' = c$ (σταθερά), ἥτις εἰσαγομένη εἰς τὴν ἐξίσωσιν δίδει τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς $c = -\alpha$, ἤτοι τὴν μερικὴν λύσιν $w' = -\alpha$.

Ἐξ ἄλλου ἡ ὁμογενὴς διαφορικὴ ἐξίσωσις $EJ\,\frac{d^2w}{dx^2} + Pw = 0$ ἢ $\kappa^2\frac{d^2w}{dx^2} + w = 0$, ἔνθα

$$\kappa^2 = \frac{EJ}{P} \qquad (20)$$

ἔχει τὴν γενικὴν λύσιν

$$w_0 = A\,\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} + B\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{\kappa}$$

ὁπότε ἡ γενικὴ λύσις τῆς (19) διατυποῦται

$$w = w' + w_0 = A\,\eta\mu\frac{x}{\kappa} + B\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{\kappa} - \alpha. \qquad (21)$$

Αἱ σταθεραὶ A καὶ B ὑπολογίζονται εὐκόλως ἐκ τῶν συνθηκῶν στηρίξεως τῆς ῥάβδου, ἤτοι $w = 0$ διὰ $x = 0$ καὶ $x = l$. Προκύπτουν εὐκόλως $A = \frac{\alpha}{\eta\mu\frac{l}{\kappa}}\left(1 - \sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{\kappa}\right)$, $B = \alpha$ καὶ ἑπομένως

$$w = \frac{\alpha}{\eta\mu\frac{l}{\kappa}}\left(\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{\kappa}\,.\,\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} + \eta\mu\,\frac{l}{\kappa}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{\kappa}\right) - \alpha$$

ἤ, ἐὰν θέσωμεν $\eta\mu\,\frac{l}{\kappa}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{\kappa} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{\kappa}\,.\,\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} =$

$$= \eta\mu\,\frac{l-x}{\kappa} = \eta\mu\,\frac{x'}{\kappa}$$

$$w = \frac{\alpha}{\eta\mu\frac{l}{\kappa}}\left(\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} + \eta\mu\,\frac{x'}{\kappa}\right) - \alpha. \qquad (22)$$

Διὰ $x = x' = {}^{l}/_{2}$ θὰ εἶναι $w = f$, ἤτοι:

$$f = \frac{\alpha}{\eta\mu\frac{l}{\kappa}}\,.\,2\,\eta\mu\,\frac{l}{2\kappa} - \alpha = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa}} - \alpha \qquad (23)$$

ἡ δὲ μεγίστη τιμὴ τῆς καμπτικῆς ῥοπῆς

$$\max M = P\,(f + \alpha) = P\alpha\,.\,\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{2\kappa}} \qquad (24)$$

Ὁ 1ος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἐξ. (23) ὡς καὶ ἡ ἐξ. (24) περιέχουν, εἰς μὲν τὸν ἀριθμητὴν τὴν ἐκκεντρότητα α, εἰς δὲ τὸν παρονομαστὴν τὸ $\sigma\upsilon\nu(l/2\kappa)$.

Διὰ $\alpha = 0$ (ἐκκεντρότης $= 0$) καὶ συνάμα $\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} \neq 0$, τὸ βέλος κάμψεως καὶ ἡ μεγίστη ῥοπὴ κάμψεως γίνονται μονοτίμως ἴσα πρὸς μηδέν, ἡ ῥάβδος παραμένει εὐθύγραμμος. Εἰς ἣν περίπτωσιν ὅμως $\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} = 0$, ἐνῷ συνάμα $\alpha = 0$, τὰ f καὶ maxM λαμβάνουν τὴν ἀπροσδιόριστον τιμὴν $\frac{0}{0}$, ὅπερ σημαίνει ὅτι καίτοι ἡ ῥάβδος φορτίζεται κεντρικῶς, ἐν τούτοις τὸ βέλος κάμψεως καὶ ἡ μεγίστη ῥοπὴ κάμψεως δὲν μηδενίζονται, ἀλλ' ἔχουν τιμὰς διαφόρους τοῦ μηδενός, μὴ προσδιορισίμους.

Ἵνα $\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} = 0$ δέον $\frac{l}{2\kappa} = n\frac{\pi}{2}$ ($n = 1,3,5\ldots$) ἢ $\frac{l^2}{4\kappa^2} = n^2\frac{\pi^2}{4}$

καὶ εἰσάγοντες ἐκ τῆς ἐξ. (20) τὴν τιμὴν τοῦ κ^2, $\frac{l^2P}{4EJ} = n^2\frac{\pi^2}{4}$, ἐντεῦθεν δὲ ἐπιλύοντες πρὸς P

$$P = \frac{n^2\pi^2EJ}{l^2}\,.$$

Θέτοντες $n = 1$ λαμβάνομεν τὴν ἐλαχίστην ἢ ***κρίσιμον*** τιμὴν τοῦ φορτίου P, δι' ἣν $\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} = 0$, δηλαδὴ

$$P\kappa = \frac{\pi^2EJ}{l^2} \qquad (16)$$

ἤτοι τὴν αὐτὴν τιμὴν Pκ, ἣν κατ' ἐντελῶς διάφορον τρόπον προηγουμένως ὑπελογίσαμεν.

Ἐξ ἄλλου διὰ $\sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{2\kappa} = 0$, ἤτοι $\frac{l}{2\kappa} = n\,\frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 3, 5\ldots$) θὰ εἶναι $\frac{l}{\kappa} = n\pi$, $\eta\mu\,\frac{l}{\kappa} = \eta\mu n\pi = 0$, $\sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{\kappa} = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$.

Ἐὰν συνάμα ἡ θλῖψις εἶναι κεντρική, ἤτοι $\alpha = 0$, γίνεται $\frac{\alpha}{\eta\mu\frac{l}{\kappa}} = \frac{0}{0}$ = ἀπροσδιόριστος $= c$, ὁπότε ἡ ἐξ. (22) μετασχηματίζεται εἰς

$$w = c\left(\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{l}{\kappa}\,.\,\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} + \eta\mu\,\frac{l}{\kappa}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{\kappa}\right) =$$

$$= 2c\,\eta\mu\,\frac{x}{\kappa} = 2c\,\eta\mu\,\frac{n\pi}{l}\,x\,.$$

Διὰ $x = \frac{l}{2}$: $w = f = 2c\,\eta\mu\,\frac{n\pi}{2} = \pm 2c$ ($n = 1,3,5\ldots$)

ἐντεῦθεν $c = f/2$

καὶ $w = f\ \eta\mu \frac{n\pi}{l} x\ .\ (n = 1, 3, 5 \ldots .)$

Διὰ $\alpha \neq 0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu \frac{l}{2\kappa} \neq 0$ αἱ ἐξ. (23) καὶ (24) παρέχουν μονοτίμως ὡρισμένας τιμὰς f καὶ max M, ἐνῷ διὰ $\alpha \neq 0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu \frac{l}{2\kappa} = 0$ αἱ αὐταὶ ἐξισώσεις δίδουν $f = \infty$, $\max M = \infty$, ἐνῷ ἐξ ἄλλου $P = P_\kappa$ (6).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ $\sigma\upsilon\nu \frac{l}{2\kappa} = 0$ ἤτοι $P = P_\kappa$, αἱ τεταγμέναι τῆς γραμμῆς κάμψεως γίνονται εἴτε ἀπροσδιόριστοι $(\alpha = 0)$ εἴτε ἀπείρως μεγάλαι $(\alpha \neq 0)$. Ἡ ῥάβδος, ἔστω καὶ κεντρικῶς φορτιζομένη, κάμπτεται, ***ὑφίσταται λυγισμόν.***

Διὰ τιμὰς τοῦ φορτίου $P < P_\varkappa$ $\left(\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} \neq 0\right)$ δὲν ἔχει ἐμφανισθῆ εἰσέτι τὸ φαινόμενον ἀπροσδιορίστων ἢ ἀπείρως μεγάλων τιμῶν f καὶ max M, ἡ ῥάβδος παραμένει εὐθύγραμμος $(\alpha = 0)$, ἢ κάμπτεται κατὰ ἐντελῶς καθωρισμένον μέγεθος $(\alpha \neq 0)$. Ἡ περίπτωσις $P > P_\varkappa$ δὲν παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον, διότι μεσολαβεῖ τὸ στάδιον $P = P_\varkappa$, κατὰ τὸ ὁποῖον λαμβάνουν χώραν τὰ προειρημένα φαινόμενα τοῦ λυγισμοῦ.

Ἐκ τῆς ἐκτεθείσης ἐρεύνης προκύπτουν ἐν συμπεράσματι δύο τινά:

1) Δικαιολογεῖται πλήρως ἡ ἐκλογὴ τῆς ἡμιτονοειδοῦς γραμμῆς κάμψεως (βλ. ἐξ. (12)), γενομένη κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ προβλήματος λυγισμοῦ τῆς ἀμφιαρθρωτῆς ῥάβδου βάσει τῆς συνθήκης εὐσταθείας (11).

2) Διὰ τὴν ἔρευναν τῶν προβλημάτων λυγισμοῦ τίθενται εἰς διάθεσίν μας δύο μέθοδοι: Ἡ πρώτη, πηγάζουσα ὡς εἴδομεν ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων, καλουμένη διὰ τοῦτο ***μέθοδος ἐνεργειακή,*** συνίσταται εἰς τὴν κατάλληλον ἐκλογὴν τῆς μορφῆς τῆς γραμμῆς κάμψεως, ἱκανοποιούσης τὰς συνθήκας στηρίξεως, εἶτα δὲ εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς συνθήκης εὐσταθείας (11), ἢ ἂν θεωρήσωμεν τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν τῆς ἀδιαφόρου ἐλαστικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς καλουμένης ***συνθήκης λυγηρότητος.***

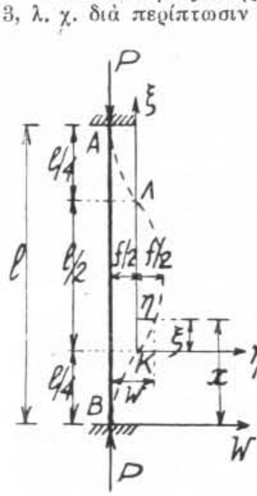
Ἔργον κάμψεως $A_\varkappa = -$ Ἔργον μηκύνσεως A_μ. (25).

Ἡ δευτέρα μέθοδος συνίσταται εἰς τὴν κατάστρωσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς γραμμῆς κάμψεως καὶ ἐντεῦθεν, δι' ὁλοκληρώσεώς της, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ***ἀντιστοίχου συνθήκης λυγηρότητος,*** δηλαδὴ τῆς συνθήκης ***δι' ἣν τὸ βέλος*** w ***λαμβάνει μορφὴν ἀπροσδιόριστον,*** καὶ ἥτις λ. χ. διὰ τὴν ἀμφιαρθρωτὴν εὐθύγραμμον ῥάβδον εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} = 0$. ***Εἶναι ἡ καλουμένη ἀναλυτικὴ μέθοδος.***

Ἀμφότεραι αἱ μέθοδοι εἶναι ἀπὸ ἀπόψεως ἐφαρμογῆς ἴσης ἀξίας.

Δέον ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἐνεργειακὴ μέθοδος παρέχει τὴν δυνατότητα βαθυτέρας, ἐνδελεχεστέρας κατανοήσεως τοῦ ὅλου φαινομένου τοῦ λυγισμοῦ, ὅπερ ἐπὶ μακρὸν ἐκαλύπτετο ὑπὸ εἴδους μυστηρίου, ἐδέχθη δὲ τὴν ἐξήγησίν του χάρις εἰς τὴν ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐν γενικότητι ἐκτεθεῖσαν ἐνεργειακὴν ἄποψιν. Ἀντιθέτως ἡ δευτέρα μέθοδος τυγχάνει διδακτικῶς ἁπλουστέρα καὶ ὁδηγεῖ, εἰς τὰς συνήθεις περιπτώσεις, ταχέως εἰς τὴν ἐπίλυσιν προβλήματος, πλὴν ἂν παρουσιασθῇ δυσχέρεια εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς γραμμῆς κάμψεως (7).

Διὰ συνθήκας στηρίξεως διαφόρους τῶν τοῦ Σχ. 1 ἢ 3, λ. χ. διὰ περίπτωσιν ῥάβδου πεπακτωμένης **κατὰ τὰ** ἄκρα αὐτῆς A καὶ B (Σχ. 5), δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ θεωρήσωμεν τὴν δυνατὴν γραμμὴν κάμψεως ὡς καμπύλην ἡμιτονοειδῆ, ἧς αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα καὶ τὸ μέσον εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἀρχικὸν εὐθύγραμμον ἄξονα τῆς ῥάβδου. Ἡ ἐξίσωσις τῆς τοιαύτης γραμμῆς κάμψεως ὡς πρὸς σύστημα συντεταγμένων ηκξ, ἔσεται



Σχ. 5

$$\eta = \frac{f}{2}\ \eta\mu \frac{\pi\xi}{l/2}$$

καὶ ἑπομένως, ὡς πρὸς τὸ σύστημα wBx, ἂν θέσωμεν

$$\eta = w - \frac{f}{2},\ \xi = x - \frac{l}{4}$$

$$w - \frac{f}{2} = \frac{f}{2}\ .\ \eta\mu \frac{2\pi}{l}\left(x - \frac{l}{4}\right) = \frac{f}{2}\ .\ \eta\mu \left(\frac{2\pi}{l} x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{f}{2}\ .\ \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{l} x$$

ἤτοι

$$w = \frac{f}{2}\left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{l} x\right) = f\ .\ \eta\mu^2 \frac{\pi x}{l}. \qquad (26)$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν $\frac{dw}{dx} = \frac{\pi f}{l}\ .\ \eta\mu \frac{2\pi}{l} x$, $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{2\pi^2 f}{l^2}\ .\ \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{l} x$,

(6) Ἀπείρως μεγάλαι τιμαὶ τῶν f καὶ max M δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παράγωνται εἰς τὴν πραγματικότητα. Ὄντως αἱ ἐξ (23) καὶ (24) πηγάζουσιν ἐκ τῆς ἁπλοποιημένης διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς γραμμῆς κάμψεως $EJw'' = -M$, ἐνῷ ἡ ἀκριβεστέρα αὐτῆς διατύπωσις εἶναι $EJ/\varrho = -M$, ἔνθα $\varrho = (1 + w'^2)/w''$ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς γραμμῆς κάμψεως. Διὰ πολὺ μικρὰς παραμορφώσεις w ἐπιτρέπεται νὰ τεθῇ $w'^2 = 0$, ἐνῷ διὰ τεταγμένας w ἂν ὄχι ἀπείρως μεγάλας, πάντως πολὺ μεγάλας (ὡς αἱ ἀνωτέρω προκύπτουσαι διὰ $\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{l}{2\kappa} = 0$), ἡ ἁπλοποίησις $w'^2 = 0$ δὲν εἶναι πλέον ἀνεκτή. Ὑπὸ τοιούτους ὅρους θὰ ἔδει νὰ ἐκκινήσωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $EJ/\varrho = -M$, εἰσάγοντες τὴν πλήρη τιμὴν $\varrho = (1 + w'^2)/w''$. Ὁ ὑπολογισμὸς ἀποδεικνύει, ὅτι διὰ $\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu \frac{l}{2\kappa} = 0$ αἱ τιμαὶ f καὶ maxM δὲν καθίστανται πλέον ἀπείρως μεγάλαι, ἀλλ' ἁπλῶς αἰσθητῶς μεγάλαι, ὥστε πρακτικῶς νὰ πρέπῃ ν' ἀποκλεισθοῦν.

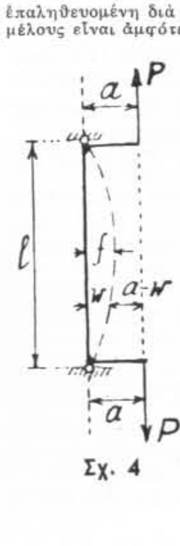
(7) Χάριν ἔτι πληρεστέρας διασαφηνίσεως παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. 1 αἱ δυνάμεις P, ἀντὶ νὰ εἶναι θλίβουσαι, ἐ φ ε λ κ ύ ο υ ν τὴν ῥάβδον AB, τότε τὸ ἔργον μηκύνσεως A_μ γίνεται θετικὸν (ἴδε ἐξ. (8) καὶ (14)) ἤτοι

$$A_\mu = +\frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = +\frac{P}{4} f^2 \frac{n^2\pi^2}{l}$$

ἀφοῦ ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ στοιχείου Fdx δύναμις εἶναι ἐφελκύουσα κατὰ τὴν δυνατὴν δὲ παραμόρφωσιν ἐπιμηκύνεται τὸ στοιχεῖον. Ἐξ ἄλλου τὸ ἔργον κάμψεως $A_\varkappa$ διατηρεῖ τὸ αὐτὸ σημεῖον (βλ. ἐξ. (9) καὶ (13)) καὶ ἑπομένως ἡ συνθήκη εὐσταθείας γίνεται

$$\frac{EJ}{4} f^2 \frac{n^4\pi^4}{l^3} + \frac{P}{4} f^2 \frac{n^2\pi^2}{l} > 0$$

ἐπαληθευομένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ P, ἀφοῦ οἱ ὅροι τοῦ ἀριστεροῦ μέλους εἶναι ἀμφότεροι θετικοί.



Σχ. 4

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. 3 δυνάμεις ἑλκυσμοῦ P προκαλοῦν κάμψιν τῆς ῥάβδου πρὸς τὸ μέρος τῶν δυνάμεων τούτων, ὡς ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι (4) δεικνύεται. Θὰ εἶναι τότε $M = P\ (\alpha - w)$, ὁπότε ἡ ἐξ. (19) γίνεται

$$EJw'' - Pw = -P\alpha$$

ἧς ἡ γενικὴ λύσις εἶναι ἐντελῶς διάφορος τῆς (21) καὶ δὴ

$$w = Ae^{x/\varkappa} - Be^{-x/\varkappa} + \alpha$$

ἔνθα $\varkappa^2 = EJ/P$ πρβλ. ἐξ. (20).

Εἰσάγοντες τὰς συνθήκας στηρίξεως προσδιορίζομεν τὰς σταθερὰς A, B καὶ ἐντεῦθεν

$$w = \alpha + \alpha(e^{-x/\varkappa} - e^{x/\varkappa})/(e^{l/\varkappa} - e^{-l/\varkappa})$$

$$f = \alpha - \alpha/2\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{l}{2\varkappa} = \alpha - \alpha/(e^{l/2\varkappa} + e^{-l/2\varkappa}).$$

Διὰ νὰ γίνῃ τὸ βέλος f ἀπροσδιόριστον ἢ ἀπείρως μέγα, δέον $e^{l/2\varkappa} + e^{-l/2\varkappa} = 0$ ἢ $e^{l/\varkappa} = -1$, ὅπερ ἀδύνατον διὰ τιμὰς l καὶ (ἢ P) πραγματικάς, ὁσονδήποτε μεγάλας.

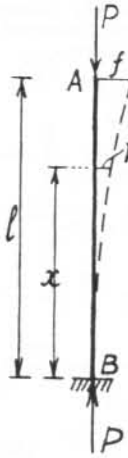
$$A_\kappa = \frac{EJ}{2}\cdot\frac{4\pi^4 f^2}{l^4}\int_0^l \sigma\upsilon\nu^2 \frac{2\pi}{l}x\,.\,dx = \frac{EJ}{2}\cdot\frac{4\pi^4 f^2}{l^4}\cdot\frac{l}{2} =$$

$$= EJ\,\frac{\pi^4 f^2}{l^3},$$

$$A_\mu = -\frac{P}{2}\cdot\frac{\pi^2 f^2}{l^2}\int_0^l \eta\mu^2 \frac{2\pi}{l}x\,.\,dx = -\frac{P}{2}\cdot\frac{\pi^2 f^2}{l^2}\cdot\frac{l}{2} =$$

$$= -\frac{P}{4}\cdot\frac{\pi^2 f^2}{l}.$$

Ἡ συνθήκη λυγηρότητος (25) γίνεται



Σχ. 6

$$EJ\,\frac{\pi^4 f^2}{l^3} = \frac{P}{4}\,\frac{\pi^2 f^2}{l}$$

καὶ ἐντεῦθεν

$$P = P_\kappa = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\,^1/_2\,)^2}\,. \qquad (27)$$

Συγκρίνοντες τὴν ἐξ. (27) μὲ τὴν ἐξ. (16) βλέπομεν, ὅτι τὸ κρίσιμον φορτίον δι' ἀμφίπακτον ῥάβδον μήκους l εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κρίσιμον φορτίον ἀμφιαρθρωτῆς ῥάβδου ἡμίσεος μήκους $\frac{l}{2}$.

Ἂν ἡ ῥάβδος εἶναι πεπακτωμένη κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρα δὲ κατὰ τὸ ἕτερον (Σχ. 6), ὁ νόμος μεταβολῆς τῶν τεταγμένων w τῆς δυνατῆς γραμμῆς κάμψεως γράφεται

$$w = f\left(1 - \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi x}{2l}\right) \qquad (28)$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{dw}{dx} = \frac{f\pi}{2l}\,\eta\mu\,\frac{\pi x}{2l}\,, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{f\pi^2}{4l^2}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi x}{2l}\,,$$

$$A_\kappa = \frac{EJ}{2}\cdot\frac{f^2\pi^4}{16 l^4}\int_0^l \sigma\upsilon\nu^2\,\frac{\pi x}{2l}\,dx = \frac{EJ}{64}\cdot\frac{f^2\pi^4}{l^3}\,,$$

$$A_\mu = -\frac{P}{2}\cdot\frac{f^2\pi^2}{4l^2}\int_0^l \eta\mu^2\,\frac{\pi x}{2l}\,dx = -\frac{P}{16}\cdot\frac{f^2\pi^2}{l}\,,$$

$$\delta\iota\acute{o}\tau\iota \int_0^l \eta\mu^2\,\frac{\pi x}{2l}\,dx = \int_0^l \sigma\upsilon\nu^2\,\frac{\pi x}{2l}\,dx = \frac{l}{2}\,.$$

Ἡ συνθήκη λυγηρότητος (25) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{EJ}{64}\cdot\frac{f^2\pi^4}{l^3} = \frac{P}{16}\cdot\frac{f^2\pi^2}{l}\,,$$

καὶ ἐντεῦθεν

$$P = P_\kappa = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}\,. \qquad (29)$$

Ἐκ τῆς ἐξ. (29) προκύπτει, ὅτι τὸ κρίσιμον φορτίον τοῦ ἀξονικῶς θλιβομένου προβόλου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κρίσιμον φορτίον ἀμφιαρθρωτῆς ῥάβδου διπλασίου μήκους [8].

(8) Βλ. A. u. L. Föppl: Zwang u. Drang, Band II 1928, § 105 u. 106.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ

ΕΦΗΜΕΡΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ, ΤΕΥΧΟΣ Α' Ἀριθ. φύλ. 172)1949

Περὶ τροποποιήσεως τοῦ ἀπὸ 13)3)1947 Β.Δ. «περὶ χορηγιῶν τοῦ Ταμείου Προνοίας ἐργοληπτῶν Δημοσίων Ἔργων».

ΠΑΥΛΟΣ

ΒΑΣΙΛΕΥΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 1, ἐδαφ. γ' καὶ τοῦ ἄρθρου 2, παραγρ. 8 τοῦ Ν.Δ. τοῦ 1946 «περὶ συστάσεως Ταμείου Προνοίας Ἐργοληπτῶν Δημοσίων Ἔργων», τὴν σύμφωνον γνώμην τοῦ Διοικητικοῦ Συμβουλίου ληφθεῖσαν κατὰ τὰς 58 καὶ 64 συνεδρίας αὐτοῦ τῆς 23.2.1949 καὶ 6.4.1949, ὡς καὶ τὴν ὑπ' ἀριθ. 271 ἐ. ἔ. γνωμοδότησιν τοῦ Συμβουλίου τῆς Ἐπικρατείας, προτάσει τοῦ Ἡμετέρου ἐπὶ τῶν Δημοσίων Ἔργων Ὑπουργοῦ ἀπεφασίσαμεν καὶ διατάσσομεν:

Ἄρθρον μόνον

Ἡ παράγραφος 3 τοῦ ἄρθρου 3 τοῦ ἀπὸ 13 Μαρτίου 1947 Β.Δ. «περὶ χορηγιῶν τοῦ Ταμείου Προνοίας Ἐργοληπτῶν Δημοσίων Ἔργων «δημοσιευθέντος εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 53 φύλλον τοῦ Α' τεύχους τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως τῆς 20)3)47 τροποποιεῖται ὡς ἀκολούθως, τροποποιουμένης ὁμοίως καὶ τῆς σχετικῆς διατάξεως τοῦ Ὀργαν. Δ)σεως καὶ λειτουργίας τοῦ Ταμείου τούτου (ἄρθρον 32) τοῦ δημοσιευθέντος εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 179 φύλλον τοῦ Β' τεύχους τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως τῆς 21 Νοεμβρίου 1947.

«3 Οἱ ἤδη ὑφιστάμενοι γάμοι καὶ τὰ τέκνα ἀνακοινοῦνται εἰς τὸ Ταμεῖον ὑπὸ τῶν μετόχων δι' αἰτήσεώς των, συνοδευομένης ὑπὸ τῶν σχετικῶν ληξιαρχικῶν πράξεων τελέσεως γάμου, γεννήσεως καὶ βαπτίσεως, ὑποβαλλομένης τὸ βραδύτερον μέχρι 31 Δεκεμβρίου 1949, οἱ δὲ ἀπὸ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ παρόντος καὶ ἐφεξῆς συναπτόμενοι τοιοῦτοι, ὡς καὶ αἱ λαμβάνουσαι χώραν γεννήσεις καὶ βαπτίσεις τέκνων, ἐντὸς ἔτους ἀπὸ τῆς ἡμέρας καθ' ἣν ἔλαβον χώραν».

Ἡ ἰσχὺς τοῦ παρόντος ἄρχεται ἀπὸ τῆς δημοσιεύσεώς του εἰς τὴν Ἐφημερίδα τῆς Κυβερνήσεως.

Εἰς τὸν αὐτὸν ἐπὶ τῶν Δημοσίων Ἔργων Ὑπουργὸν ἀνατίθεμεν τὴν δημοσίευσιν καὶ ἐκτέλεσιν τοῦ παρόντος Διατάγματος.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 6 Ἰουλίου 1949

ΠΑΥΛΟΣ Β.

Ὁ ἐπὶ τῶν Δημοσίων Ἔργων Ὑπουργὸς

ΣΤ. ΝΙΚΟΛΑΐΔΗΣ

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

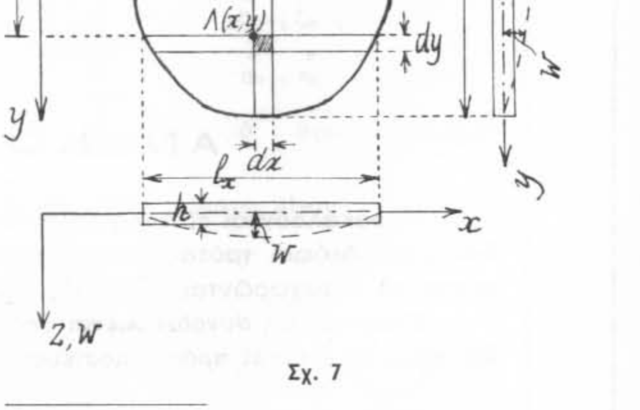
Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 304)

§ 3. *Λυγισμὸς ἢ «ὕβωσις» λεπτῶν πλακῶν.* Τὸ ἀνωτέρω πραγματευθὲν παράδειγμα τῆς θλιβομένης εὐθυγράμμου ῥάβδου παρενεβλήθη ἐνταῦθα ἐπὶ τῷ σκοπῷ, ὅπως δοθῇ μία ἁπλῆ ἐφαρμογὴ τῶν ἐν § 1 ἐκτεθέντων, καταστῇ δὲ συνάμα σαφὴς ὁ ἀκολουθητέος τρόπος ἐργασίας διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων λυγισμοῦ, ἢ γενικώτερον ἐλαστικῆς εὐσταθείας. Σημειωτέον ὅτι ἀρκετὰ τῶν ἐν § 2 διατυπωθέντων συμπερασμάτων ἢ παρατηρήσεων εἶναι ἐπιδεικτικὰ γενικεύσεως, ὡς ἐν τοῖς κατωτέρω θὰ ἴδωμεν.

Ὅπως ἡ ῥάβδος, οὕτω καὶ αἱ λεπταὶ πλάκες, ὑποβαλλόμεναι εἰς δυνάμεις θλίψεως, ἐνεργούσας κατὰ τὸ μέσον αὐτῶν ἐπίπεδον, δεικνύουν συμπτώματα ἀσταθοῦς ἐλαστικῆς ἰσορροπίας. Ἐὰν δὲν ληφθοῦν εἰδικὰ μέτρα πρὸς ἀποσόβησιν ἐγκαρσίου ἐκφυγῆς αὐτῶν, αἱ πλάκες ὑφίστανται λυγισμόν, ἢ ὅπως λέγομεν «ὕβωσιν». Ὅπως διὰ τὴν ῥάβδον οὕτω καὶ διὰ τὴν πλάκα, ἔχει μεγάλην πρακτικὴν σημασίαν ἡ δυνατότης προσδιορισμοῦ τῶν κρισίμων φορτίσεων, πέραν τῶν ὁποίων ἡ ἰσορροπία τῆς φορτιζομένης πλακὸς παύει νὰ παραμένῃ εὐσταθής. Λυγηραὶ ῥάβδοι καὶ λεπταὶ πλάκες δύνανται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὡρισμένου συστήματος ἐξωτερικῆς φορτίσεως, νὰ διατελοῦν ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ καταστάσεις παραμορφώσεως διαφόρους ἀλλήλων. Τελικῶς θὰ λάβουν τὴν μορφὴν ἐκείνην, ***δι' ἣν τὸ ἔργον παραμορφώσεως γίνεται ἐλάχιστον***, πάντως ἐν συγκρίσει πρὸς ἄλλας μορφὰς δυναμένας νὰ προκύψουν ἐκ τῆς περὶ οὗ ὁ λόγος τελικῆς μορφῆς, διὰ συνεχοῦς μεταβολῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἔργον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἰσοῦται πρὸς μηδέν. Πράγματι διὰ τὰς οὕτω συγκρινομένας μορφάς, δι' ἃς $\Sigma \overline{P}.\Delta\delta = 0$, ἡ ἐξ. (2) τῶν δυνατῶν ἔργων γίνεται $\Delta A = 0$, ἐνῷ ἐξ ἄλλου ἡ συνθήκη εὐσταθείας (4) ἐπιβάλλει $\Delta^2 A > 0$, ὅπερ σημαίνει, ὅτι ὑπὸ τὰς τεθείσας προϋποθέσεις ἡ θεωρηθεῖσα τελικὴ μορφὴ εὐσταθοῦς ἰσορροπίας εἶναι ἐκείνη, δι' ἣν τὸ ἔργον παραμορφώσεως καθίσταται ἐλάχιστον. Πέραν ὡρισμένης κρισίμου φορτίσεως τὸ σῶμα παύει νὰ τελῇ ἐν ἐλαστικῇ εὐσταθείᾳ, ἐπειδὴ ἀντεστράφη τὸ σημεῖον τοῦ $\Delta^2 A$, δι' ὃ καὶ μεταπίπτει εἰς ἄλλην μορφὴν ἐλαστικῆς ἰσορροπίας, εὐσταθεστέραν τῆς πρώτης. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι τὰ ὅρια ταῦτα τῶν κρισίμων φορτίσεων κατ' οὐδένα λόγον ἐπιτρέπεται νὰ ὑπερβῶμεν ἐν τῇ πράξει, εἴτε διότι αἱ ἀναπτυσσόμεναι τάσεις κατὰ τὴν μετάβασιν εἰς τὴν εὐσταθεστέραν μορφὴν εἶναι ἀπαραδέκτως μεγάλαι εἴτε λόγῳ τῆς ἰσχυρᾶς διακυμάνσεως τῶν παραμορφώσεων, συνεπείᾳ ἐλαχίστης ἔστω μεταβολῆς τῆς φορτίσεως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ κρισίμου αὐτῆς ὁρίου καὶ τέλος ἐπειδὴ ἡ νέα εὐσταθεστέρα μορφὴ θεωρεῖται διὰ λόγους πρακτικούς, ὡς ἐντελῶς ἀσυμβίβαστος πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τὰς προϋποθέσεις τῆς κατασκευῆς. Κατ' ἀναλογίαν τῆς περιπτώσεως τῆς ῥάβδου δύναται ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἰκασθῇ, ὅτι ὁ ἐξ ὑβώσεως κίνδυνος καταστροφῆς λεπτῶν πλακῶν εἶναι τόσον μεγαλείτερος, δηλαδὴ τὸ κρίσιμον φορτίον τόσον μικρότερον, ὅσον περισσότερον ἐλευθέρα εἶναι ἡ στήριξις τῆς πλακὸς κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἰσχύουν δηλαδὴ καὶ διὰ τὴν πλάκα ἀνάλογα πρὸς τὰ διὰ τὴν ῥάβδον, ἐν § 2 ἐκτεθέντα (ῥάβδος ἀμφιαρθρωτὴ ἢ ἀμφίπακτος κλπ.). Ἐλάττωσις τοῦ κινδύνου ὑβώσεως ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς προσθήκης διατάξεων ἀκαμψίας, ὧν ἡ λειτουργία καὶ ὁ ὑπολογισμὸς μόνον μετὰ λεπτομερῆ ἔρευναν τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως, δύναται νὰ ἐξετασθοῦν.

Εἰς ὅλα τὰ προβλήματα εὐσταθείας, ἄρα καὶ τὸ τῆς ὑβώσεως, δὲν ἐνδιαφέρει τόσον ἡ εὕρεσις τῆς ἀκριβοῦς νέας μορφῆς τοῦ σώματος, οὐδὲ ὁ προσδιορισμὸς τῶν τάσεων ἐν τῇ νέᾳ ταύτῃ ἀσταθεῖ μορφῇ, ἀλλὰ σχεδὸν ἀποκλειστικῶς ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαχίστου κρισίμου φορτίου, πέραν τοῦ ὁποίου τὸ σῶμα «ἐκφεύγει», ἡ πλὰξ ὑφίσταται ὕβωσιν ἢ ἡ ῥάβδος λυγισμὸν (9). Περιοριζόμεθα ἐφεξῆς εἰς τὴν ἐξέτασιν μόνον τῆς περιπτώσεως τῶν πλακῶν καὶ τοῦ φαινομένου τῆς ὑβώσεως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων ἐνεργουσῶν κατὰ τὸ μέσον ἐπίπεδον τῶν πλακῶν. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κρισίμων φορτίων ὑβώσεως τίθενται εἰς διάθεσιν ἡμῶν δύο μέθοδοι, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ λυγισμοῦ τῶν ῥάβδων εἴδομεν. Ἡ μία μέθοδος συνίσταται εἰς ἀναζήτησιν λύσεως τῆς γενικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς πλακὸς (βλ. ἑπομένας § 4 ἕως 12), συμβιβαζομένης πρὸς τὰς συνοριακὰς συνθήκας τοῦ ἐξεταζομένου ἑκάστοτε προβλήματος. Ὁσάκις ὅμως ἡ εὕρεσις τῆς λύσεως ταύτης καθίσταται ἀνέφικτος λόγῳ τῶν συναντωμένων μεγάλων ἢ μεγίστων δυσχερειῶν ὁλοκληρώσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, ὁ προσδιορισμὸς τῆς κρισίμου φορτίσεως ἐπιτυγχάνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς καλουμένης ἐνεργειακῆς μεθόδου, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἐκτεθέντα εἰς § 2, 3 ἀναφορικῶς πρὸς τὴν λυγηρὰν ῥάβδον. Αἱ εἰς § 1 διαλαμβανόμεναι γενικαὶ παρατηρήσεις ἐν σχέσει πρὸς τὴν εὐστάθειαν τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐλαστικῶν σωμάτων, ὁδηγήσασαι εἰς τὴν κατάστρωσιν τῆς ἐξ. (3) καὶ τῆς ὁριακῆς (4), ἀποτελοῦν τὴν ἀφετηρίαν πρὸς διατύπωσιν τῆς ***συνθήκης εὐσταθείας τῆς πλακός***, ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς τὴν ὑπὸ τῆς ἐξ. (11) ἐκφραζομένην συνθήκην εὐσταθείας τῆς ῥάβδου. Ἀπαιτεῖται ὅμως διὰ τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τῆς συνθήκης ταύτης, ἡ ἐγγυτέρα καὶ αὐτοτελὴς ἔρευνα τῆς ἐντάσεως



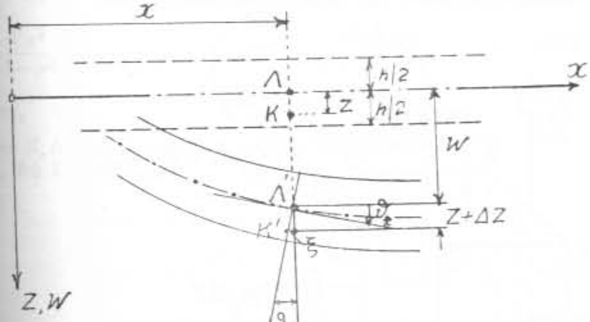
Σχ. 7

(9) Ἐφ' ὅσον ἡ ἔρευνα περιορίζεται εἰς ἀπείρως μικρὰς παραμορφώσεις, ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς καμπτομένης πλακός, περὶ ἧς ἐκτενῶς κατωτέρω, προσαρμοζομένη εἰς τὰς ἑκάστοτε συνοριακὰς συνθήκας τοῦ προβλήματας, παρέχει τὰς τιμὰς τῶν κρισίμων φορτίων ὑβώσεως καὶ τὸν νόμον μεταβολῆς τῶν παραμορφώσεων, χωρὶς νὰ δίδῃ συνάμα τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν παραμορφώσεων τούτων, τὴν τιμὴν τοῦ βέλους ὑβώσεως καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἀνηγμένων τάσεων, αἵτινες παραμένουν ἀπροσδιόριστοι. Τοῦτο δέον ν' ἀποδοθῇ εἰς τὸ ὅτι ἡ δύναμις, ἢ τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων ποὺ προκαλεῖ τὴν ὕβωσιν, ἐκφραζόμενον συναρτήσει τῶν π ε π ε ρ α σ μ έ ν ω ν μετακινήσεων, παρουσιάζει εἰς τὴν γειτονίαν τῆς μηδενικῆς παραμορφώσεως ἀναλυτικὸν ἐλάχιστον, ὡς εἶναι ἑπόμενον, καὶ δι' ἀ π ε ί ρ ω ς μ ι κ ρ ὰ ς π α ρ α μ ο ρ φ ώ σ ε ι ς ἡ φόρτισις ὑβώσεως ἐμφανίζεται οὕτω ἀνεξάρτητος τῶν παραμορφώσεων τούτων (βλ. A. Nádai : Elastische Platten, Berlin 1925, § 58)

καὶ τῆς παραμορφώσεως τῆς καμπτομένης πλακὸς καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὑπὸ τῶν ἐν αὐτῇ ἀναπτυσσομένων ἐσωτερικῶν δυνάμεων ἐπιτελουμένου ἔργου παραμορφώσεως, πραγματικοῦ ἢ δυνατοῦ. Ἡ ἔρευνα αὕτη ἦτο διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς καμπτομένης ράβδου περιττή, διότι οἱ χρησιμοποιηθέντες διὰ τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τῆς συνθήκης εὐσταθείας τύποι (8) καὶ (9), ἦσαν ἁπλούστατοι καὶ λίαν γνωστοί.

§ 4. *Ἡ θεμελιώδης διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπτομένης λεπτῆς πλακός.* Θεωρήσωμεν πλάκα—ἤτοι σῶμα τοῦ ὁποίου ἡ μορφὴ καθορίζεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἐλάχιστα ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων [10] — μὲ τυχὸν περίγραμμα, στηριζομένην ὁπωσδήποτε κατὰ τὴν περίμετρον αὐτῆς (Σχ. 7.) Ἀναφέρομεν τὴν πλάκα εἰς δεξιόστροφον σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων Oxyz, ὅπερ τηροῦμεν ἀκίνητον, μὴ παρακολουθοῦν τὴν πλάκα κατὰ τὴν παραμόρφωσίν της καὶ καλέσωμεν h τὸ πάχος τῆς πλακός, λογιζόμενον ὡς ἐλέχθη πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὰς κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐπιπέδου xOy διαστάσεις τῆς πλακός. Φαντασθῶμεν ἀγόμενον εἰς ἀπόστασιν $\frac{h}{2}$ ἀπὸ τοῦ συνοριακοῦ ἐπιπέδου τῆς πλακός, τὸ ***μέσον ἐπίπεδον*** ($z=0$) αὐτῆς, συμπίπτον μὲ τὸ συντεταγμένον ἐπίπεδον xOy, καὶ τὴν πλάκα προσβαλλομένην ὑπὸ συστήματος ἐξωτερικῶν φορτίων διευθυνομένων ***καθέτως*** πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον. Ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν φορτίων τούτων ἡ πλὰξ παραμορφοῦται καὶ τὸ μέσον αὐτῆς ἐπίπεδον καμπυλοῦται εἰς συνεχῆ ἐπιφάνειαν, ἥν, ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρὸς τὴν γραμμὴν κάμψεως τῆς ράβδου, ὀνομάζομεν ***ἐπιφάνειαν κάμψεως τῆς πλακός.*** Τὰς τεταγμένας τῆς ἐπιφανείας κάμψεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος $+z$, ἢ ἄλλως βέλη κάμψεως, παριστῶμεν μὲ $W=\varphi(x,y)$.

Ὡς πόρισμα τῆς προϋποθέσεως περὶ ἐλαχίστου πάχους h τῆς πλακὸς ἐν σχέσει πρὸς τὰς διαστάσεις l_x, l_y



Σχ. 8

αὐτῆς, δέον νὰ θεωρηθῇ ἡ ἀκόλουθος πρότασις, ἀναφερομένη εἰς τὸν τρόπον παραμορφώσεως τῆς πλακὸς καὶ ἀποτελοῦσα ἀφετηρίαν τῆς περαιτέρω διερευνήσεως [11], ἤτοι: ***τὰ σημεῖα τῆς πλακός, ἅτινα πρὸ τῆς παραμορφώσεως κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καθέτου πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον, παραμένουν μετὰ τὴν παραμόρφωσιν ἐπ' εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως.*** Ἡ πρότασις αὕτη δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀντίστοιχος πρὸς τὴν ὑπόθεσιν Bernouilli περὶ διατηρήσεως τῆς ἐπιπεδότητος τῶν διατομῶν τῆς καμπτομένης δοκοῦ. Ἐξ ἄλλου τὰ βέλη W θεωροῦνται πολὺ μικρά, ὄχι μόνον ἐν σχέσει πρὸς τὰς διαστάσεις τῆς πλακὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xOy, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὸ πάχος h αὐτῆς. Ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους, αἱ συνεπείᾳ τῆς καμπυλώσεως τῆς πλακὸς ἐπιτελούμεναι κατὰ τὰς διευθύνσεις x καὶ y μηκύνσεις τῶν γραμμικῶν στοιχείων dx, dy τοῦ μέσου ἐπιπέδου, καθίστανται ἀπειροσταὶ ἀνωτέρας τάξεως ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς μηκύνσεις τῶν αὐτῶν γραμμικῶν στοιχείων εἰς ἀπόστασιν z ἀπὸ τοῦ μέσου ἐπιπέδου. Ἐπιτρέπεται ἄρα ἡ παραδοχή, ὅτι ***αἱ μηκύνσεις ἐν τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας x καὶ y παραλείπονται ὡς πολὺ μικραί, ἔναντι τῶν εἴς τινα ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ μέσου ἐπιπέδου ἐπιτελουμένων, ἐφ' ὅσων αἱ μετακινήσεις W θεωρηθοῦν μικραὶ ἔναντι τοῦ πάχους*** h.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀξόνων x καὶ y τοῦ τυχόντος σημείου Λ (x,y,o) κειμένου ἐπὶ τοῦ μέσου ἐπιπέδου (Σχ. 7, 8), δύνανται κατὰ ταῦτα νὰ θεωρηθοῦν ἴσαι πρὸς μηδέν, ἡ δὲ ὅλη μετακίνησις τοῦ σημείου Λ ὡς ἐπιτελουμένη παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα z, ὁπότε ἡ μετὰ τὴν κάμψιν νέα θέσις τοῦ σημείου Λ θὰ εἶναι ἡ Λ' (Σχ. 8). Τὸ σημεῖον K (x,y,z), κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον εἰς ἀπόστασιν z ἀπ' αὐτοῦ, θὰ λάβῃ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν θέσιν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Λ' καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως, προβαλλομένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xOz κατὰ τὸ σημεῖον K', καὶ θὰ ὑποστῇ ἐλαστικὰς μετακινήσεις, ὄχι μόνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος z, ἀλλὰ καὶ τὰς ξ, η παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας x,y. Εἰς τὸ σχ. 8 παρίσταται ἡ τομὴ τῆς πλακὸς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου y=σταθ., πρὸ καὶ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν. Ὅμοιον σχῆμα δέον νὰ νοηθῇ σχεδιασθὲν καὶ διὰ τομὴν τῆς πλακὸς ὑπὸ ἐπιπέδου x=σταθ.

Ἐκ τοῦ σχ. 8 προκύπτει $\xi = -(z+\Delta z)\,\text{εφ}\vartheta_x$, ἔνθα Δz ἡ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος z μεταβολὴ τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων Λ καὶ K, πολὺ μικρὰ ἐν σχέσει πρὸς z, καὶ ϑ_x ἡ γωνία, ἣν ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας κάμψεως εἰς τὸ σημεῖον Λ σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα x. Παραλείποντες τὴν μεταβολὴν Δz ἔναντι τοῦ z καὶ θέτοντες $\text{εφ}\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως

$$\xi = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \tag{30}$$

καὶ ἐντελῶς ἀναλόγως, ἐὰν ἀναφερθῶμεν εἰς τὴν τομὴν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου x = σταθ.

$$\eta = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \tag{31}$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τῶν ἐξ. (30) καὶ (31) ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι αἱ μετακινήσεις ξ καὶ η κατευθύνονται, διὰ $z>0$, πρὸς τ' ἀρνητικὰ x καὶ y.

Αἱ ἓξ χαρακτηριστικαὶ τῆς παραμορφώσεως εἰς τὴν θέσιν K (x,y,z), ἤτοι αἱ εἰδικαὶ μηκύνσεις ε_x, ε_y, ε_z κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων καὶ αἱ ὀλισθήσεις (μεταβολαὶ γωνιῶν) γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zy}, δίδονται συναρτήσει τῶν συντεταγμένων ξ, η, ζ, τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων τοῦ σημείου K, ὑπὸ τῶν γνωστῶν γενικῶν σχέσεων [12]

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_x = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\ ,\quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\ ,\quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\ ,\quad \gamma_{yz} = \dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\ , \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{32}$$

ἐξ ὧν αἱ δύο πρῶται καὶ ἡ δίδουσα τὴν τιμὴν γ_{xy} μετατρέπονται τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (30), (31), εἰς τὰς

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_x = -z \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\quad \varepsilon_y = -z \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ , \\ \gamma_{xy} = -2z \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y} \end{array}\right\} \tag{33}$$

Ἀλλ' αἱ ἓξ χαρακτηριστικαὶ τῆς παραμορφώσεως ἐκφράζονται ἐπίσης συναρτήσει τῶν ἓξ παραμέτρων τῆς ἐντάσεως, ἤτοι τῶν ὀρθῶν τάσεων σ_x, σ_y, σ_z κατὰ τοὺς ἄξονας συντεταγμένων καὶ τῶν διατμητικῶν τάσεων τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων [13]

---

10) N. Κιτσίκη: Στατική, Τόμος 1, 1938, § 11, σελ. 13.
(11) Ἡ ἀπόδειξις δίδεται εἰς § 6.

(12) N. Κιτσίκη: Στατική 1, 1938, § 71.
(13) N. Κιτσίκη: Στατική 1. § 85.

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\ \sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\ \right], \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\ \sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\ \right], \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\ \sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\ \right], \\
\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy}\ &,\quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\,\tau_{yz}\ ,\quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\,\tau_{zx}
\end{aligned}\right| \qquad (34)
$$

ἔνθα E τὸ μέτρον ἐλαστικότητος, $\mu = \frac{1}{m}$ ὁ λόγος τοῦ Poisson καὶ

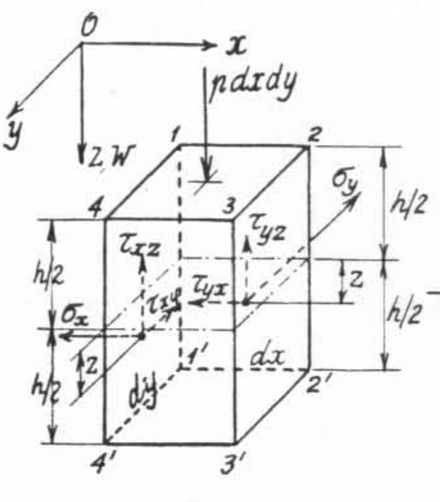
$$
G = \frac{mE}{2(m+1)} = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (35)
$$

τὸ μέτρον ὀλισθήσεως τοῦ ὑλικοῦ.

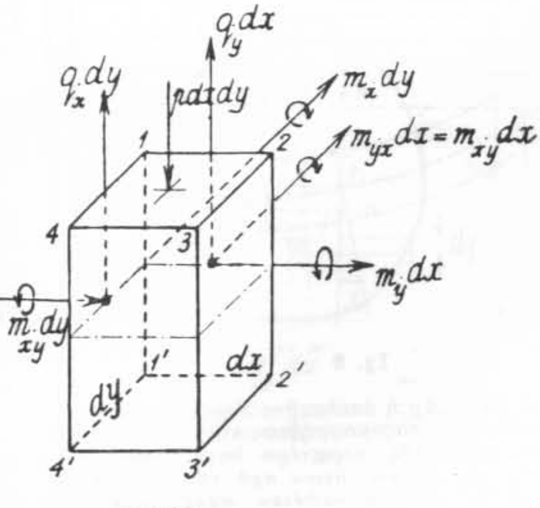
Εἰσάγομεν ἤδη μίαν περαιτέρω ἁπλοποίησιν, ἐπιτρεπομένην εἰς λεπτὰς πλάκας, ἐκείνην δηλαδή, καθ' ἣν ἡ ***ὀρθὴ τάσις*** σ_z κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος z, ***λογίζεται ἴση πρὸς μηδὲν καθ' ὅλον τὸ πάχος τῆς πλακός.*** Εἰς τὴν ἀφόρτιστον, λ.χ. τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πλακὸς $z = +h/_2$, εἶναι πράγματι $\sigma_z = 0$, ἐτῷ εἰς τὴν φορτισμένην ἄνω ἐπιφάνειαν $z = -h/_2$ θὰ εἶναι ἐν γένει $\sigma_z = -p$, ἔνθα p ἡ τιμὴ τῆς κατὰ τὴν κατεύθυνσιν $+z$ ἀνηγμένης εἰς τὴν μονάδα ἐπιφανείας φορτίσεως, ἐνεργούσης ἐπὶ τῆς πλακός. Διὰ λεπτὰς πλάκας ἡ τιμὴ p εἶναι πολὺ μικροτέρα τῶν σ_x, σ_y, τ_{xy}, δι' ὃ καὶ καθίσταται ἀκωλύτως ἀνεκτὴ ἡ ὁλοσχερὴς παράλειψις τῆς σ_z [14].

Μὲ $\sigma_z = 0$ αἱ τρεῖς πρῶται ἐξ. (34) γίνονται

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right)\ ,\quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right)\ , \\
\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (36)
$$



Σχ. 9



Σχ. 9 α

ἐνῷ ἡ τετάρτη, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (35), γράφεται

$$
\gamma_{xy} = \frac{2\,(1+\mu)}{E}\,\tau_{xy} \qquad (37)
$$

ἐξ ὧν, δι' ἐπιλύσεως πρὸς σ_x, σ_y, τ_{xy} λαμβάνομεν

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right)\ ,\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right)\ , \\
\tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\mu)}\,\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \qquad (38)
$$

(14) Ἐξαίρεσιν ἀποτελοῦν αἱ γειτονικαὶ πρὸς τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς συγκεντρωμένων φορτίων περιοχαί, ἔνθα αἱ καταστάσεις, ἐντάσεις καὶ παραμορφώσεις γίνονται πολυπλοκώτεραι.

Εἰσάγοντες εἰς ἐξ. (38) τὰς τιμὰς ε_x, ε_y, γ_{xy} ἐκ τῶν ἐξ. (33) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς σ_x, σ_y, τ_{xy} συναρτήσει τῆς τεταγμένης w τῆς ἐπιφανείας κάμψεως, ἤτοι:

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{(1+\mu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (39)
$$

Ἀποχωρίσωμεν ἀπὸ τῆς ὅλης πλακός, τῇ βοηθείᾳ δύο ζευγῶν τομῶν παραλλήλων πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα yoz καὶ xoz, πρῖσμα ὕψους ἴσου πρὸς τὸ πάχος τῆς πλακὸς h καὶ μὲ βάσιν dx.dy καὶ ἔστωσαν σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}, σ_y, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, τ_{yz} αἱ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν 141'4' καὶ 121'2' εἰς ἀπόστασιν z ἀπὸ τοῦ ἄνω μέσου ἐπιπέδου ἀναπτυσσόμεναι τάσεις (Σχ. 9). Ἐπὶ τῆς ἄνω ἕδρας dx.dy τοῦ πρίσματος ἐνεργεῖ τὸ ὁμόρροπον τῷ ἄξονι z ἐξωτερικὸν φορτίον p dx dy. Αἱ τάσεις σ_x, σ_y, τ_{xy} κατανέμονται καθ' ὕψος τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν γραμμικῶς (βλ. ἐξ. (39)), μηδενιζόμεναι διὰ $z = 0$ καὶ ἀποκτῶσαι τὰς ἀπολύτως μεγίστας ἀντιθέτως ἴσας τιμάς των διὰ $z = \pm h/_2$. Θετικαὶ κατευθύνσεις τῶν τάσεων σ, τ ἐκλέγονται αἱ ἐν τῷ σχήματι 9 σημειούμεναι ἀντίθετοι πρὸς τὰς φορὰς τῶν ἀξόνων x, y, z. Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν 343'4', 232'3' πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῶν αὐξουσῶν συντεταγμένων x, y, αἱ θετικαὶ κατευθύνσεις τῶν σ, τ, θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα αἱ ἀντίθετοι τῶν ἀνωτέρω.

Εἶναι σκόπιμον, ἀντὶ τῶν τάσεων σ_x, σ_y, τ_{xy} νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ συνιστάμενα αὐτῶν ζεύγη, τὰ μεταβιβαζόμενα ἐπὶ τῶν ἑδρῶν hdy, hdx τῆς πλακός. Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν τὰς προσδιοριστικὰς σχέσεις

$$
\left.\begin{aligned}
m_x = \int_{-h/_2}^{+h/_2} \sigma_x \,.\, z dz\ ,\quad m_y = \int_{-h/_2}^{+h/_2} \sigma_y \,.\, z dz\ , \\
m_{xy} = \int_{-h/_2}^{+h/_2} \tau_{xy} \,.\, z dz
\end{aligned}\right| \qquad (40)
$$

ἔνθα m_x, m_y αἱ ἀνὰ μονάδα πλάτους τῶν ἑδρῶν hdy, hdx ἀνηγμέναι ῥοπαὶ τῶν ὀρθῶν τάσεων σ_x, σ_y περὶ τὰς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων y, x, καλούμεναι ***ῥοπαὶ κάμψεως τῆς πλακὸς*** ὡς πρὸς τὰς διευθύνσεις ταύτας (Σχ. 9). Οἱ δεῖται x, y τῶν καμπτικῶν ῥοπῶν m_x, m_y ἀναφέρονται εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐδραν, ἐφ' ἧς ἐνεργοῦν. Τὰς ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἑδρῶν ἐνεργούσας ῥοπὰς τῶν διατμητικῶν τάσεων τ_{xy}, τ_{yx}, ἀνηγμένας εἰς τὴν μονάδα πλάτους τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν, παριστῶμεν μὲ m_{xy}, m_{yx} καὶ καλοῦμεν ***ῥοπὰς συστροφῆς*** τῆς πλακός. Ἐπειδὴ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ θὰ εἶναι καὶ $m_{xy} = m_{yx}$, αἱ ῥοπαὶ συστροφῆς, ποὺ μεταβιβάζονται ἐπὶ δύο καθέτων πρὸς ἀλλήλας ἑδρῶν εἶναι συνεπῶς ἴσαι μεταξύ των.

Εἰς Σχ. 9α παρίστανται μὲ τὰς θετικάς των κατευθύνσεις αἱ καμπτικαὶ ῥοπαὶ καὶ αἱ ῥοπαὶ συστροφῆς τῆς πλακὸς ὡς διανύσματα, ὧν τὸ βέλος κατευθύνεται πρὸς ἐκείνην τὴν φοράν, ἀφ' ἧς ἡ ῥοπὴ θεᾶται στρέφουσα κατὰ τὴν ἀντίθετον τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἔννοιαν. Αἱ ῥοπαὶ m_x, m_y, m_{xy} σημειοῦνται πολλαπλασιασμέναι ἐπὶ dy, dx, ἵνα οὕτω ἐκφρασθοῦν αἱ ὁλικαὶ καμπτικαὶ ῥοπαὶ καὶ ῥοπαὶ συστροφῆς, αἱ μεταβιβαζόμεναι ἐπὶ τῶν ἑδρῶν hdy, hdx τῆς πλακός.

Ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς τὰς ἐξ. (40) παριστῶμεν διὰ q_x, q_y τὰς ἀνὰ μονάδα πλάτους τῶν ἑδρῶν hdy, hdx ἀνηγμένας συνισταμένας τῶν διατμητικῶν τάσεων τ_{xz}, τ_{yz} ἤτοι

$$q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz}\,dz \quad , \quad q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz}\,.\,dz \qquad (41)$$

τὰς ὁποίας καλοῦμεν ***τεμνούσας δυνάμεις*** τῆς πλακός. Οἱ δεῖκται x, y τῶν q_x, q_y ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν, ἣν καὶ οἱ τῶν m_x, m_y. Εἰς σχ. 9α ἔχουν σχεδιασθῆ ὡσαύτως μὲ τὰς θετικάς των κατευθύνσεις, αἱ ὁλικαὶ τέμνουσαι δυνάμεις q_x. dy, q_y. dx ποὺ μεταβιβάζονται ἐπὶ τῶν θεωρηθεισῶν δύο ἑδρῶν τῆς πλακός.

Εἰσάγοντες εἰς ἐξ. (40) τὰς τιμὰς σ_x, σ_y, τ_{xy} ἐκ τῶν ἐξ. (39) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ μὲν τεταγμένη w τῆς ἐπιφανείας κάμψεως εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ z, ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{Ez^2}{1-\mu^2}\,dz = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{h^3}{12} = N \qquad (42)$$

ἔνθα N ὁ καλούμενος ***συντελεστὴς ἀκαμψίας*** τῆς πλακός, θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ m_y &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial w^2}{\partial x^2}\right) \\ m_{xy} &= -N(1-\mu)\,.\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

καὶ

$$\sigma_x = \frac{m_x\,.\,z}{h^3/_{12}}\ ,\quad \sigma_y = \frac{m_y\,.\,z}{h^3/_{12}}\ ,\quad \tau_{xy} = \frac{m_{xy}\,.\,z}{h^3/_{12}} \qquad (43')$$

περαιτέρω δὲ

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= -(1+\mu)\,N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \\ &= -(1+\mu)\,N.\,\Delta w \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

ἔνθα

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ , \qquad (45)$$

Διατυπώσωμεν ἤδη τὰς ἐξισώσεις ἰσορροπίας τοῦ ἐν Σχ. 9, 9α εἰκονιζομένου πρίσματος dx.dy.h καὶ δὴ κατ' ἀρχὰς τὰς ἐξισώσεις ἰσορροπίας τῶν ἐπὶ τοῦ πρίσματος ἐφαρμοζομένων ῥοπῶν ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας x, y. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ ῥοπαὶ m_x, m_y, m_{xy} μεταβάλλονται κατὰ τὸ διαφορικόν των, ὅταν ἀπὸ τῶν ἑδρῶν x, y μεταβῶμεν εἰς τὰς ἔναντι τούτων ἕδρας, x+dx, y+dy. Ὡσαύτως δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἐπὶ τῶν τελευταίων τούτων ἑδρῶν ἡ θετικὴ κατεύθυνσις τῶν m, q, εἶναι ἀντίθετος τῶν ἐπὶ τῶν πρώτων ἑδρῶν ἀσκουμένων. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς εὐθεῖαν ἀγομένην διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἕδρας 223'2' παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y παρέχει

$$-m_x\,dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy - m_{xy}\,dx +$$
$$+\left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy\right)dx - q_x\,dy\,dx = 0\ ,$$

ἤ

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \qquad (46)$$

καὶ ἀναλόγως ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς εὐθεῖαν διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἕδρας 343'4' παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \qquad (46')$$

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (43) αἱ ἐξ. (46), (46') μετασχηματίζονται εἰς

$$q_x = -N\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right) - (1-\mu)\,N\,.\,\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} =$$
$$= -N\,.\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$q_y = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ = -N\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

ἤτοι, δυνάμει τῆς ἐξ. (45), εἰς τὰς

$$q_x = -N\,.\,\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)\quad ,\quad q_y = -N\,.\,\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) \qquad (47)$$

οἵτινες παρέχουν τὰς τεμνούσας δυνάμεις τῆς πλακὸς συναρτήσει τῆς τεταγμένης w τῆς ἐπιφανείας κάμψεως.

Ἐκφράσωμεν τέλος τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐπὶ τοῦ πρίσματος h.dx.dy ἐνεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα z, λαμβάνοντες καὶ πάλιν ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ τέμνουσαι δυνάμεις q_x, q_y μεταβάλλονται κατὰ τὸ διαφορικόν των $\frac{\partial q_x}{\partial x}dx$, $\frac{\partial q_y}{\partial y}dy$ ὅταν ἀπὸ τῶν ἑδρῶν x, y μεταβῶμεν εἰς τὰς x+dx, y+dy. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$-q_x\,dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy - q_y\,dx +$$
$$+\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx + p\,dx\,dy = 0$$

ἤ

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

εἰσάγοντες δὲ τὰς τιμὰς q_x, q_y ἐκ τῶν ἐξ. (47) λαμβάνομεν τὴν γραμμικὴν μερικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν 4ης τάξεως.

$$-N\,.\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta w) - N\,.\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Delta w) + p = 0$$

ἤτοι

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{N} \qquad (48)$$

ὅπου, ὡς εἴδομεν ὁ διαφορικὸς ἐκτελεστὴς Δ εἶναι

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (49)$$

Ἡ ἐξ. (48) εἶναι ἡ ***θεμελιώδης διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπτομένης λεπτῆς πλακός.***[15] Συμφώνως πρὸς

(15) Ἡ ἐξ. (48) μετὰ τῶν (43) (47) εἶναι γνωσταὶ καὶ ὡς ἐξισώσεις τοῦ Kirchoff. Βλ. σχετικῶς A. Nádai: Elastische Platten, 1925, § 10.

ἐξ. (45), (49) τὸ ἀριστερὸν αὐτῆς μέλος ἀναπτύσσεται ὡς ἑξῆς

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \tag{50}$$

ἐνῷ εἰς τὸ δεξιὸν μέλος $p = f(x, y)$ δύναται νὰ εἶναι τυχοῦσα γνωστὴ συνάρτησις τῶν συντεταγμένων x, y. Εἰς πᾶσαν λύσιν w τῆς ἐξ. (48) ἀντιστοιχεῖ ἐντατικὴ κατάστασις τῆς πλακὸς ἀντιπροσωπευομένη ὑπὸ τῶν καμπτικῶν ῥοπῶν καὶ ῥοπῶν συστροφῆς τῆς ἐξ. (43) καὶ τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων τῶν ἐξ. (47). Ἀντιθέτως εἰς τὴν περίπτωσιν δοθείσης πλακός, φορτιζομένης καὶ στηριζομένης καθ' ὡρισμένον τρόπον, ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξ. (48) δέον νὰ προσαρμοσθῇ εἰς τὰς συνοριακὰς συνθήκας τῆς ἐξεταζομένης περιπτώσεως.

Διὰ $\mu = 0$ (περίπτωσις πορωδῶν ὑλικῶν μὲ μικρὸν συντελεστὴν πλευρικῆς ἢ ἐγκαρσίου συστολῆς, ὡς τὸ σκυρόδεμα), αἱ ἐξ. (43) ἁπλοποιοῦνται εἰς

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad m_y = -N\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ m_{xy} &= -N\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

ἐνῷ αἱ ἐξ. (47) καὶ (48) παραμένουν ὡς ἔχουν.

Ἐὰν σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} παριστοῦν τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν σ_x, σ_y, τ_{xy}, ἀναπτυσσομένας συμφώνως πρὸς ἐξ. (39) εἰς τὰς ἀκραίας ἶνας $z = \pm h/_2$ τῶν τιμῶν x=σταθ., y=σταθ. τῆς πλακός, θὰ ἰσχύουν, λόγῳ τῆς ἀποδειχθείσης γραμμικῆς κατανομῆς τῶν τάσεων σ_x, σ_x, τ_{xy} καθ' ὕψος τῆς πλακός, αἱ σχέσεις $\sigma'_x : \sigma_x = \sigma'_y : \sigma_y = \tau'_{xy} : \tau_{xy} = \pm h : 2z$, αἵτινες εἰσαγόμεναι εἰς τὰς ἐξ. (40), δίδουν

$$m_x = \pm \int_{-h/_2}^{+h/_2} \sigma'_x \cdot \frac{2z^2}{h}\, dz = \pm \frac{2\sigma'_x}{h} \int_{-h/_2}^{+h/_2} z^2 dz =$$

$$= \pm\, \sigma'_x \cdot \frac{h^2}{6}$$

ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} &\sigma'_x = \pm 6 m_x : h^2 \\ &\text{καὶ ἐντελῶς ἀναλόγως} \\ &\sigma'_y = \pm 6 m_y : h^2 \quad , \quad \tau'_{xy} = \pm 6 m_{xy} : h^2 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Διατυπώσωμεν ἀκόμη τὰς ἐξισώσεις ἰσορροπίας προβολῶν ἐπὶ τοὺς ἄξονας συντεταγμένων x καὶ y τοῦ ἀπειροστοῦ παραλληλεπιπέδου dx. dy. dz, ἀποχωριζομένου νοερῶς ἐκ τῆς πλακός, ἰσορροποῦντος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ ἐνεργουσῶν ὀρθῶν καὶ διατμητικῶν δυνάμεων. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας x καὶ y αἱ συνιστῶσαι τῶν μαζικῶν δυνάμεων ἰσοῦνται πρὸς μηδέν, αἱ προειρημέναι δύο ἐξισώσεις ἰσορροπίας γίνονται ([16])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Τῇ βοηθείᾳ τῆς 1ης καὶ τῆς 3ης τῶν ἐξ. (39) ἢ 1η τῶν ἐξ. (53) μετασχηματίζεται εὐκόλως εἰς

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

ἐξ ἧς, δυνάμει τῆς 1ης τῶν ἐξ. (47) καὶ τῆς (42), λαμβάνομεν

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = -q_x \cdot \frac{12z}{h^3}$$

Ἐπειδὴ q_x εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ z, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἄνω ἐξισώσεως, τὸν νόμον κατανομῆς τῶν διατμητικῶν τάσεων τ_{zx} καθ' ὕψος τῆς πλακὸς εἰς τὴν θέσιν x, y αὐτῆς. Θὰ ἔχωμεν $\tau_{zx} = -q_x \cdot \frac{6z^2}{h^3} + C$, ἔνθα C = σταθερά, προσδιοριζομένη εὐκόλως ἴση πρὸς $+q_x \cdot \frac{3}{2h}$ ἐκ τῆς ὁριακῆς συνθήκης $\tau_{zx} = 0$ διὰ $z = \pm\frac{h}{2}$. Ἡ τιμὴ τῆς τ_{zx} γίνεται οὕτω

$$\tau_{zx} = -\frac{q_x}{h}\left(\frac{6z^2}{h^2} - \frac{3}{2}\right) \tag{54}$$

καὶ ἐντελῶς ἀναλόγως ἡ τῆς διατμητικῆς τάσεως τ_{zy}, ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς 2ας τῶν ἐξ. (53)

$$\tau_{zy} = -\frac{q_y}{h}\left(\frac{6z^2}{h^2} - \frac{3}{2}\right) \tag{54'}$$

Αἱ διατμητικαὶ τάσεις τ_{zx}, τ_{zy} ἢ τ_{xz}, τ_{yz} κατανέμονται ἄρα καθ' ὕψος τῆς πλακὸς κατὰ νόμον παραβολικόν, ἀποκτοῦν δὲ τὴν μεγίστην αὐτῶν τιμὴν τ'_{xz}, τ'_{yz} ἐπὶ τοῦ μέσου ἐπιπέδου, ἐνῷ εἰς τὴν ἄνω καὶ κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πλακὸς μηδενίζονται.

Συμφώνως πρὸς ἐξ. (54), (54'), θὰ εἶναι

$$\max\tau_{xz} = \tau'_{xz} = \frac{3q_x}{2h}, \quad \max\tau_{yz} = \tau'_{yz} = \frac{3q_y}{2h} \tag{55}$$

(16) Βλ. Ν. Κιτσίκη: Στατική, τόμος 1. § 56, σελ. 111. ἐξ. (36).

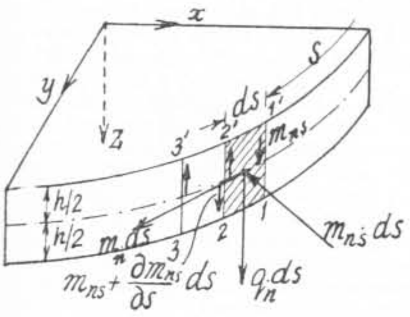
(Συνεχίζεται)

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 307)

§. 5. ***Αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι τῆς πλακός.*** Θεωρήσωμεν τμῆμα τῆς ὅλης πλακὸς περατούμενον κατὰ κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν (σχ. 10) καὶ ἔστω 11΄22΄ ἀπειροστὸν ὀρθογώνιον στοιχεῖον τῆς συνοριακῆς ταύτης ἐπιφανείας, ἐμβαδοῦ $h ds$. Ἐὰν n παριστᾷ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ στοιχεῖον $h ds$ εἰς τὴν θέσιν s θὰ ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ στοιχείου τούτου ἡ καμπτικὴ ροπὴ $m_n\,ds$, ἡ ροπὴ συστροφῆς $m_{ns}\,ds$ καὶ ἡ τέμνουσα δύναμις $q_n\,ds$, ὧν αἱ θετικαὶ κατευθύνσεις σημειοῦνται εἰς σχ. 10, ὁρισθεῖσαι συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα ἐν § 4, σχ. 9, 9α. Εἰς πᾶσαν λύσιν w τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως $\Delta\Delta w = p/N$ ἀντιστοιχοῦν ὡρισμέναι τιμαὶ τῶν m_n, m_{ns}, q_n, δυνάμεναι νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ τῶν ἐξ. (43) καὶ (47). Ἀντιστρόφως, ἐν τῇ πράξει τίθεται τὸ πρόβλημα νὰ προσδιορισθῇ ἡ



Σχ. 10

ἐλαστικὴ ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς ἐκ τῶν συνοριακῶν τιμῶν τῶν ροπῶν κάμψεως καὶ συστροφῆς καὶ τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον λόγον, ὅτι τὰ συνοριακὰ δεδομένα δύνανται ἀπὸ τῶν τριῶν νὰ περιορισθοῦν εἰς ***δύο***. Σύμφωνα πρὸς τὴν γνωστὴν ἀρχὴν τοῦ Saint — Venant ἐπιτρέπεται ὄντως ν᾽ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ροπὴν συστροφῆς $m_{ns}.ds$ διὰ τοῦ ἰσοδυνάμου ζεύγους δύο δυνάμεων ἐντάσεως m_{ns}, ἐνεργουσῶν παρὰ τὰς πλευρὰς 11΄ καὶ 22΄ τοῦ στοιχείου $h ds$ (βλ. σχ. 10). Ἡ τοιαύτη ἀντικατάστασις, γινομένη εἰς ἀπείρως μικρὰν περιοχὴν τοῦ συνόρου τῆς πλακός, ἐπηρεάζει αἰσθητῶς τὴν ἐντατικὴν κατάστασιν μόνον εἰς τὴν ἄμεσον γειτονίαν τοῦ στοιχείου $h ds$, ἐνῷ εἰς πεπερασμένην ἀπὸ τούτου ἀπόστασιν ἡ ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως ἐπιρροὴ ταχύτατα ἐλαττοῦται καὶ πρακτικῶς μηδενίζεται, μάλιστα ὅταν τὸ πάχος τῆς πλακὸς h εἶναι μικρόν, ὡς ἐν τῇ παρούσῃ ἐρεύνῃ προϋπετέθη [17]. Ὁμοίως ἐπιτρέπεται ν᾽ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ γειτονικοῦ πρὸς τὸ 11΄22΄ συνοριακοῦ στοιχείου 22΄33΄ ἐνεργοῦσαν ροπὴν συστροφῆς $\left(m_{ns} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}\,ds\right) ds$ διὰ τοῦ ζεύγους τῶν δύο δυνάμεων $m_{ns} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}\,ds$, ἐνεργουσῶν παρὰ τὰς πλευρὰς 22΄ καὶ 33΄. Ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους αἱ παρὰ τὴν κοινὴν πλευρὰν 22΄ τῶν δύο γειτονικῶν στοιχείων ἐνεργοῦσαι δυνάμεις m_{ns} καὶ $m_{ns} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}\,ds$, συντίθεται εἰς τὴν $\frac{\partial m_{ns}}{\partial s}\,ds$ κατευθυνομένην πρὸς τὰ κάτω, ἡ δὲ τελευταία αὕτη, ὁμοῦ μὲ τὴν τέμνουσαν δύναμιν $q_n\,ds$, παρέχει τελικῶς τὴν ὁλικὴν συνοριακὴν τέμνουσαν δύναμιν τοῦ στοιχείου 11΄22΄, ἤτοι τὴν $\left(q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}\,ds\right)$.

(17) Ν. Κιτσίκη: Στατικὴ Ι. § 50

Συμπεραίνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ***ἡ συνοριακὴ ροπὴ συστροφῆς*** m_{ns} ***δύναται ν᾽ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ συνοριακῆς τεμνούσης δυνάμεως ἐντάσεως*** $\frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$ ***ἀνὰ μονάδα μήκους, ὁπότε τὰ συνοριακὰ δεδομένα τῆς πλακὸς θ᾽ ἀποτελοῦνται ἐκ τῆς ροπῆς κάμψεως*** m_n ***καὶ τῆς ἀνὰ μονάδα μήκους ἀντιδράσεως στηρίξεως ἢ ὁλικῆς τεμνούσης δυνάμεως***

$$\alpha_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \tag{56}$$

Τιθεμένου ἄρα τοῦ προβλήματος τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἐλαστικῆς ἐπιφανείας τῆς πλακὸς ἐκ τῶν συνοριακῶν δεδομένων q_n, m_n, m_{ns} αὐτῆς, δέον κατὰ τὰ ἀνωτέρω ν᾽ ἀναζητηθῇ ἡ λύσις τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως (48) ἥτις παρέχει τιμὰς q'_n, m'_n, m'_{ns} εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ συνόρου τοιαύτας, ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$m_n = m'_n, \quad q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = q'_n + \frac{\partial m'_{ns}}{\partial s} \tag{57}$$

Εἰς τὰς ἐξ. (57) q'_n, m'_n, m'_{ns} παριστοῦν τὰς συνοριακὰς τιμὰς τῆς τεμνούσης δυνάμεως καὶ τῶν ροπῶν κάμψεως καὶ συστροφῆς, τὰς προκυπτούσας ἐκ τῆς τιμῆς w, δι᾽ ἐφαρμογῆς τῶν ἐξ. (43) καὶ (47).

Ἐὰν ἡ διεύθυνσις n ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μὲ τὸν ἄξονα x ἢ y, αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως ἐπὶ συνοριακῶν ἑδρῶν $x =$ σταθ. ἢ $y =$ σταθ., γίνονται συμφώνως πρὸς ἐξ. (56):

$$\alpha_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}, \quad \alpha_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \tag{58}$$

ἢ συμφώνως πρὸς ἐξ. (57), κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῶν q'_x, m'_{xy}, q'_y διὰ τῶν διαφορικῶν ἐκφράσεων (43) καὶ (47)

$$\alpha_x = -N.\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - N(1-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x.\partial y^2} =$$
$$-N\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x.\partial y^2} + (1-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x.\partial y^2}\right]$$

ἤτοι

$$\alpha_x = -N\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] \tag{59}$$

καὶ ἀναλόγως

$$\alpha_y = -N\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] \tag{59'}$$

Ἐπὶ τῶν συνοριακῶν ἐπιφανειῶν $x =$ σταθ. ἢ $y =$ σταθ. ἐνεργοῦν ἀντιστοίχως, πλὴν τῶν συνοριακῶν καμπτικῶν ροπῶν m_x ἢ m_y καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα z ἀντιδράσεις στηρίξεως α_x ἢ α_y, διδόμεναι ὑπὸ τῶν ἐξ. (59) ἢ (59΄). Εἰς τὰ δεξιὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων δέον, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαφορίσεως, νὰ τεθῇ $x =$ σταθ. ἢ $y =$ σταθ. ὁπότε αἱ ἀντιδράσεις α_x ἢ α_y προκύπτουν τελικῶς ὡς συναρτήσεις τοῦ y ἢ τοῦ x. Θετικὴ κατεύθυνσις τῶν α_x α_y λογίζεται, συμφώνως πρὸς τ᾽ ἀνωτέρω καὶ τὸ σχ. 10, ἡ πρὸς τὰ κάτω ὁμόρροπος πρὸς τὸν ἄξονα z.

Αἱ δύο συνοριακαὶ συνθῆκαι, διατυπούμεναι γενικῶς ὑπὸ τῶν ἐξ. (57), λαμβάνουν ἁπλουστέραν διατύπωσιν ὁσάκις ἡ συνοριακὴ ἐπιφάνεια συμπίπτει μὲ ἕδρας $x =$ σταθ. ἢ $y =$ σταθ., ὡς λ. χ. εἰς τὴν συνηθεστάτην περίπτωσιν τῶν ὀρθογωνικῶν πλακῶν. Διακρίνομεν τὰς κάτωθι συνήθεις περιπτώσεις στηρίξεως :

α) Τελεία πάκτωσις τῆς πλακὸς κατὰ τὴν συνοριακὴν ἕδραν $x =$ ***σταθ.*** Ἡ τεταγμένη w τῆς ἐλαστικῆς ἐπιφανείας δέον νὰ ἱκανοποιῇ κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου τὰς συνθήκας

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial w} = 0 \tag{60}$$

β) *Ἐλευθέρα συνοριακὴ ἕδρα* x = σταθ. Κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου δέον $m_x = 0$, $\sigma_x = 0$, αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι γίνονται ἄρα, συμφώνως πρὸς ἐξ. (43) καὶ (59)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x . \partial y^2} = 0 \qquad (61)$$

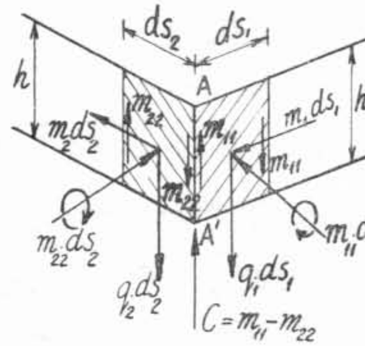
γ) *Ἁπλῆ καὶ ἀρθρωτὴ στήριξις κατὰ τὴν συνοριακὴν ἕδραν* x = σταθ.

Αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι εἶναι τότε $w=0$, $m_x = 0$ ἢ

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \qquad (62)$$

Κατὰ τὴν διατύπωσιν τῆς συνθήκης $w = 0$ γίνεται ἡ σιωπηρὰ προϋπόθεσις, ὅτι ἡ στήριξις εἶναι ἀρθρωτή, ὅτι δηλαδὴ τὰ σημεῖα τοῦ συνόρου ὄχι μόνον πρὸς τὰ κάτω, ἀλλ' οὐδὲ πρὸς τὰ ἄνω εἶναι δυνατὸν νὰ μετακινηθοῦν, ἢ ἄλλως ὅτι ἡ ἀντίδρασις στηρίξεως α_x δύναται ν' ἀλλάσσῃ σημεῖον κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου. Ἀποδεικνύεται δὲ πράγματι, ὅτι πλὰξ ὀρθογωνική, ἑδραζομένη ἐλευθέρως κατὰ τὴν περίμετρον αὐτῆς καὶ φορτιζομένη καθολικῶς δι' ὁμοιομόρφως κατανεμημένου φορτίου, δὲν ἀκουμβᾷ ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματός της καθ' ὅλην τὴν περίμετρον τοῦ συνόρου, ἀλλὰ μόνον ἐπὶ τμήματος αὐτῆς, ἀνασηκουμένη παρὰ τὰς γωνίας, ὅπερ σημαίνει, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ συνθῆκαι $w = 0$, $m_x = 0$ δὲν εἶναι αἱ ἀληθεῖς συνοριακαί. Ἀντιστρόφως, ἐὰν εἰς ὀρθογωνικὴν πλάκα, φορτιζομένην ὡς ἀνωτέρω, τηρήσωμεν ὡς συνοριακὰς συνθήκας τὰς ἐξ. (62), ὁ ὑπολογισμὸς δεικνύει ὅτι τὸ σημεῖον τῶν ἀντιδράσεων α_x, α_y ἀντιστρέφεται εἰς τὰς ἐγγὺς τῶν γωνιῶν τῆς πλακὸς συνοριακὰς περιοχάς.

Διὰ τοὺς ὑπολογισμούς, ποὺ ἀκολουθοῦν, λαμβάνονται ὡς ἰσχύουσαι αἱ ἐξ. (62) ὡς συνοριακαὶ συνθῆκαι τῆς ἀρθρωτῶς στηριζομένης συνοριακῆς ἕδρας x=σταθ. Θὰ εἶναι τότε κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου τούτου $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ καὶ ἑπομένως $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, ὁπότε ἐκ τῆς 2ας τῶν ἐξ. (62) προκύπτει ὡσαύτως $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Αἱ συνθῆκαι (62) δύνανται ἑπομένως νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῶν



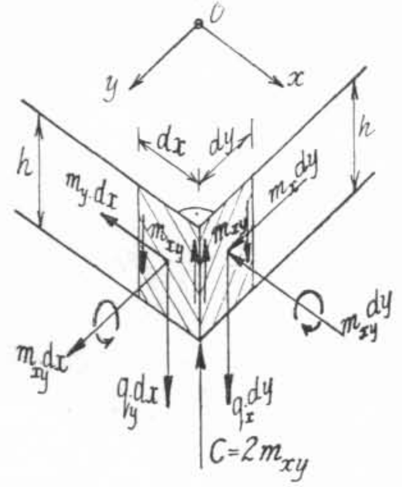
Σχ. 11

$$w = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (62')$$

αἵτινες ἀποτελοῦν τὰς καλουμένας συνοριακὰς συνθήκας τοῦ Navier. Ἐπειδὴ δὲ θὰ εἶναι καὶ χωριστὰ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ συνάγομεν ὅτι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας κάμψεως ὑπὸ ἐπιπέδου y=σταθ. δέον νὰ παρουσιάζει εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀρθρωτῆς στηρίξεως *σημεῖον καμπῆς*. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι, κατὰ τὴν ἀναζήτησιν δυνατῶν ἐπιφανειῶν κάμψεως ἀρθρωτῶς στηριζομένης πλακός, δέον νὰ περιορίζωμεν τὴν ἐκλογήν μας εἰς ἐπιφανείας μὲ τομὰς x = σταθ. ἢ y = σταθ., παρουσιαζούσας σημεῖον καμπῆς εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀρθρωτῆς στηρίξεως. Τοιαῦται καμπύλαι εἶναι λ. χ. αἱ ἡμιτονοειδεῖς, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς παραβολικὰς ἢ κυκλικάς. (*)

Αἱ συνθῆκαι Navier $w = 0$, $\Delta w = 0$ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν ὡς συνοριακαὶ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν πλακὸς μὲ περίμετρον πολυγωνικὴν (ὄχι μόνον ὀρθογωνικήν), ὁπότε ὁμιλοῦμεν περὶ ἐν ἐπιπέδῳ ἀρθρωτῶς στηριζομένης πλακός.

Εἰς τὰς θέσεις, ἔνθα ἡ περίμετρος τοῦ συνόρου παρουσιάζει ἀσυνέχειαν καὶ δὴ ἀκμὰς (γωνίας), ἡ ἀντικατάστασις τῶν ροπῶν συστροφῆς διὰ τῶν ὑποκαταστάτων τεμνουσῶν δυνάμεων παρέχει ἐπὶ τῶν γειτονικῶν τῇ ἀμκῇ ΑΑ' συνοριακῶν στοιχείων $ds_1 . h$, $ds_2 . h$ τὰς τεμνούσας δυνάμεις m_{11}, m_{22}, ἐνεργούσας παρὰ τὴν ἀκμὴν καὶ παραλλήλως αὐτῇ (Σχ. 11), συντιθεμένας εἰς τὴν συγκεντρωμένην δύναμιν $C = m_{11} - m_{22}$, συγγραμμικὴν τῇ ἀκμῇ ΑΑ'. Ἡ δύναμις αὕτη, ὁμοῦ μὲ τὰς ἀνηγμένας ἀντιδράσεις α_1, α_2 καὶ τὰς καμπτικὰς ῥοπὰς m_1, m_2, ἀποτελοῦν τὰ παρὰ τὴν ἀκμὴν ΑΑ' συνοριακὰ δεδομένα. Ἐὰν τὰ θεωρηθέντα συνοριακὰ στοιχεῖα σχηματίζουν μεταξύ των ὀρθὴν γωνίαν (Σχ. 12), ἡ τιμὴ τῆς συγκεντρωμένης δυνάμεως C γίνεται ἴση πρὸς $2\, m_{xy}$, διότι αἱ ἐπὶ τῶν στοιχείων $dy . h$, $dx . h$ ἐνεργοῦσαι ῥοπαὶ συστροφῆς εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ στρέφουν, διὰ παρατηρητὴν θεώμενον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς, κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν. Διὰ $m_{xy} = 0$ θὰ εἶναι καὶ $C = 0$ καὶ ἀντιστρόφως εἰς πᾶσαν ἐλευθέραν γωνίαν τῆς πλακὸς ἔνθα $C=0$, θὰ ἔχωμεν καὶ $m_{xy} = 0$, ἤτοι συμφώνως πρὸς ἐξ. (43)



Σχ. 12

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y} = 0 \qquad (63)$$

Εἰς πᾶσαν ἐλευθέραν ὀρθὴν γωνίαν τῆς πλακὸς θὰ ἰσχύσουν ἑπομένως αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι (61), ἐπὶ πλέον δὲ καὶ ἡ (63).

(Συνεχίζεται)

(*) Τὴν σημαντικὴν αὐτὴν παρατήρησιν ὀφείλω εἰς τὸν καθηγητὴν κ. Α. Ρουσόπουλον.

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

§ 6. ***Ἐπίπεδος παραμόρφωσις πλακῶν.*** Ἐπίπεδος παραμόρφωσις ἐλαστικοῦ σώματος καλεῖται ἐκείνη, καθ' ἣν αἱ ἐλαστικαὶ μετακινήσεις παντὸς σημείου τοῦ σώματος τελοῦνται παραλλήλως πρὸς ἓν ὡρισμένον ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον τῆς παραμορφώσεως, καὶ εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραμορφώσεως. Δεχθῶμεν λ. χ. ὡς ἐπίπεδον τῆς παραμορφώσεως τὸ συντεταγμένον xz. Αἱ κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ z συντεταγμέναι ξ καὶ ζ τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων τοῦ τυχόντος σημείου (x, y, z), θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα ἀνεξάρτητοι τῆς y, ἤτοι $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$. Ἡ κατὰ τὸν ἄξονα y συντεταγμένη τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων η εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Δὲν ἐπηρεάζονται ὅμως αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἐπιπέδου παραμορφώσεως, ἂν τεθῇ $\eta = \varphi(y)$, ἤτοι ἀνεξάρτητος τῶν x καὶ z, ὁπότε $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$. Πλὴν τῆς περιπτώσεως $\eta = 0$, συνήθης εἶναι καὶ ἡ μορφὴ $\eta = ky$ ἔνθα k = σταθερά, ἤτοι ἡ περίπτωσις τῆς ὁμοιομόρφου μηκύνσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y. Εἰς τὴν γενικὴν ἐπίπεδον παραμόρφωσιν καθ' ἣν $\eta = \varphi(y)$, τὰ σημεῖα τοῦ σώματος, ἅτινα πρὸ τῆς παραμορφώσεως, κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ τῆς παραμορφώσεως, θὰ κεῖνται καὶ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν ἐπὶ τοιούτου ἐπιπέδου, ἐνῷ εἰς τὴν εἰδικὴν ἐπίπεδον παραμόρφωσιν, καθ' ἣν $\eta = 0$ τὰ παράλληλα πρὸς τὸ τῆς παραμορφώσεως ἐπίπεδον παραμένουν μετὰ τὴν παραμόρφωσιν ἀναλλοίωτα.

Δεχθῶμεν, χάριν ἁπλότητος, $\eta = 0$. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ὡς εἴδομεν $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν ἐξ. (32), § 4:

$$\varepsilon_y = 0 \ , \ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

καὶ περαιτέρω ἐκ τῶν ἐξ. (34)

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \ , \ \sigma_y = \mu(\sigma_x + \sigma_z) \tag{64}$$

ἄρα, τῇ βοηθείᾳ καὶ τῆς ἐξ. (35)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[(1-\mu^2)\,\sigma_x - \mu(1+\mu)\,\sigma_z\right] = \\ &= \frac{1}{2G}\left[(1-\mu)\,\sigma_x - \mu\sigma_z\right] = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G}\left[(1-\mu)\,\sigma_z - \mu\sigma_x\right] = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου παραμορφώσεως, παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον παραμορφώσεως xz, αἱ ὀρθαὶ τάσεις σ_x, σ_z καὶ ἡ διατμητικὴ τ_{xz} δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῆς ἐντατικῆς συναρτήσεως F (x,z) τοῦ Airy, ὑπὸ τῶν σχέσεων [18]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \ , \ \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \ , \ \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \,.\, \partial z} \tag{66}$$

ἔνθα F (x, z) συνάρτησις διαρμονική, ἤτοι

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \,.\, \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} \equiv \Delta\Delta F = 0\,. \tag{67}$$

Κατὰ ταῦτα πᾶσα συνάρτησις διαρμονική, ἱκανοποιοῦσα τουτέστι τὴν ἐξ. (67), δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐντατικὴ συνάρτησις ἐλαστικοῦ σώματος, ὑποβαλλομένου εἰς ἐπίπεδον παραμόρφωσιν, τοῦ ὁποίου αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξ. (66).

α) Θεωρήσωμεν λ. χ. τὴν συνάρτησιν

$$F = c \,.\, z^3 \tag{68}$$

ἔνθα c=σταθ., ἥτις, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦμεν, τυγχάνει διαρμονική. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἐξ. (66) λαμβάνομεν

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 6cz \ , \ \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \,.\, \partial z} = 0 \end{aligned}\right. \tag{69}$$

ἐνῷ ἐκ τῆς ἐξ. (64) εὑρίσκομεν $\sigma_y = 6\mu cz$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον xy ἕδραι εἶναι ἐλεύθεραι τάσεων, ἀφοῦ ἐπ' αὐτῶν αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$. Δυνάμεθα ἑπομένως, ἄγοντες τὰς ἐπιπέδους τομὰς $z = +\,h/_2$ καὶ $z = -\,h/_2$, νὰ ἀποχωρίσωμεν ἐκ τοῦ ὅλου σώματος τμῆμα αὐτοῦ ὑπὸ μορφὴν πλακός, δι' ὃ τὰ ἐπίπεδα $z = \pm\,h/_2$ ἀποτελοῦν τὴν ἄνω καὶ κάτω ἀφόρτιστον ἐπιφάνειαν. Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν x=σταθ. ἐνεργεῖ μόνον ἡ ὀρθὴ τάσις $\sigma_x = 6cz$, ἐνῷ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν y = σταθ. ἐνεργεῖ μόνον ἡ $\sigma_y = 6\mu cz$. Αἱ σ_x, σ_y εἶναι κύριαι τάσεις, μεταβαλλόμεναι μόνον συναρτήσει τῆς z, κατὰ νόμον γραμμικόν.

Εἰσάγοντες εἰς τὰς ἐξ. (65) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς σ_x, σ_z εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{3(1-\mu)c}{G} \,.\, z \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{3\mu c}{G} \,.\, z$$

ἐξ' ὧν δι' ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς x καὶ z λαμβάνομεν

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(z) + \frac{3(1-\mu)c}{G} + z \,.\, x \\ \zeta &= \varphi_2(x) + \frac{3\mu c}{2G}\, z^2 \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

ἔνθα $\varphi_1(z)$ καὶ $\varphi_2(x)$ τυχοῦσαι συναρτήσεις τῆς z καὶ τῆς x, καθ' ὅσον ξ καὶ ζ ἐθεωρήθησαν ἐξ ὑποθέσεως ἀνεξάρτητα τῆς y. Ἐξ ἄλλου, συμφώνως πρὸς ἐξ. (32), (34) καὶ (69), θὰ ἔχωμεν

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{G}\,\tau_{zx} = 0$$

καὶ ἑπομένως τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (70)

$$\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{3(1-\mu)c}{G}\, x = 0$$

ἢ

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{3(1-\mu)c}{G}\, x\,.$$

Ἐπειδὴ φ_2 ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν x, τὸ δεξιὸν μέλος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι συνάρτησις τῆς x. Ἀλλ' ἡ φ_1 ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ z καὶ ἑπομένως $\frac{d\varphi_1}{dz}$ εἶναι συνάρτησις τῆς z, ἢ σταθερά. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις συμβιβάζεται ἄρα πρὸς τὰς παρατηρήσεις ταύτας μόνον ἂν $\frac{d\varphi_1}{dz}$ = σταθερὰ = c_1. Ἐντεῦθεν συνάγομεν

$$\varphi_1 = c_1 z + c_2$$

καὶ

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = -\frac{3(1-\mu)c}{G}\, x - c_1\,, \quad \text{ἤτοι}$$

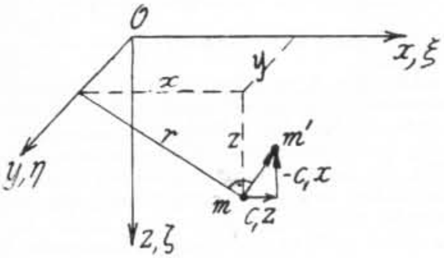
$$\varphi_2 = -\frac{3(1-\mu)c}{2G}\, x^2 - c_1 x + c_3\,.$$

(18) Ν. Κιτσίκη: Στατικὴ Ι, § 96.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων δίδονται τελικῶς ὑπὸ τῶν σχέσεων.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= c_1 z + c_2 + \frac{3\,(1-\mu)\,c}{G}\,z\,x, \quad \eta = 0 \\ \zeta &= -c_1 x + c_3 - \frac{3c}{2G}\left[(1-\mu)x^2+\mu z^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μερικαὶ συνιστῶσαι $\xi_1 = c_2$, $\zeta_1 = c_3$ τῶν ὁλικῶν μετακινήσεων ξ, ζ ἀνταποκρίνονται πρὸς μετάθεσιν τοῦ σώματος ὡς στερεοῦ, παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον xz, ἐνῷ αἱ μερικαὶ συνιστῶσαι $\xi_2 = c_1 z$,

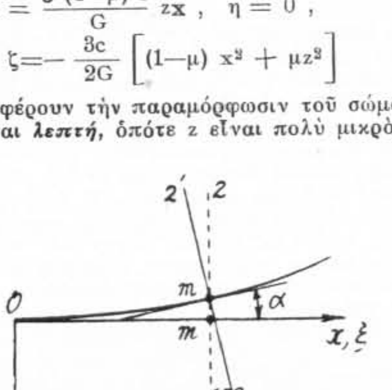


Σχ. 13

$\zeta_2 = -c_1 x$ συμβιβάζονται μὲ στροφὴν τοῦ σώματος ὡς στερεοῦ περὶ τὸν ἄξονα y, κατὰ γωνίαν c_1 (Σχ. 13). Πράγματι εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ἡ μετακίνησις m m′ τοῦ τυχόντος σημείου m εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{\xi_2^2 + \zeta_2^2} = c_1 \sqrt{x^2 + z^2} = c_1 \cdot r$, διευθυνομένη καθέτως πρὸς τὴν ἀπόστασιν r τοῦ σημείου m ἀπὸ τοῦ ἄξονος y. Αἱ συνιστῶσαι $\xi' = \xi_1 + \xi_2 = c_1 z + c_2$, $\zeta' = \zeta_1 + \zeta_2 = -c_1 x + c_3$ παρέχουν ἑπομένως μετακίνησιν τοῦ σώματος ὡς στερεοῦ, ἄνευ παραμορφώσεως τινός, δι' ὃ καὶ δύνανται νὰ παραλειφθοῦν. Ἀπομένουν αἱ συνιστῶσαι

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{3\,(1-\mu)\,c}{G}\,zx\,, \quad \eta = 0\,, \\ \zeta &= -\frac{3c}{2G}\left[(1-\mu)\,x^2 + \mu z^2\right] \end{aligned} \qquad (71')$$

αἵτινες ἐπιφέρουν τὴν παραμόρφωσιν τοῦ σώματος. Ἐὰν ἡ πλὰξ εἶναι *λεπτή*, ὁπότε z εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς x, ὁ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ὅρος μz^2 τῆς 3ης τῶν ἐξ (71′) δύναται νὰ παραλειφθῇ ὡς ἔτι μικρότερος ἔναντι τοῦ ὅρου $(1-\mu)\cdot x^2$. Αἱ ἐξ. (71′) ἁπλοποιοῦνται οὕτω εἰς τὰς



Σχ. 14

$$\xi = \frac{3\,(1-\mu)\,c}{G}\,zx\,,\ \eta = 0\,,\ \zeta = -\frac{3\,(1-\mu)\,c}{2G}\,x^2\,. \qquad (72)$$

Διὰ $z = 0$ γίνεται $\xi = 0$, τὰ σημεῖα τοῦ μέσου ἐπιπέδου ὑφίστανται μόνον κατακορύφους μετακινήσεις ζ, ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ ἴχνους τῆς ἐπιφανείας κάμψεως ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ xz θὰ εἶναι $\zeta = -\frac{3\,(1-\mu)\,c}{2G}\,x^2$ (Σχ. 14). Ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xz ἢ xζ ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας κάμψεως σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα x γωνίαν α προσδιοριζομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right| = \frac{3\,(1-\mu)\,c}{G}\,x\,.$$

Ἐξ ἄλλου διὰ $x =$ σταθ. ἡ συνιστῶσα ξ καθίσταται ἀνάλογος τῆς z, ἐνῷ ἡ $\zeta =$ σταθ. Τὰ σημεῖα τῆς τυχούσης καθέτου 1—2 ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον μετακινοῦνται κατὰ τρόπον, ὥστε μετὰ τὴν παραμόρφωσιν νὰ κεῖνται πάλιν ἐπ' εὐθείας, τῆς 1′—2′, σχηματιζούσης γωνίαν β μὲ τὴν 1—2, ὁριζομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως $\varepsilon\varphi\,\beta = \frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{3\,(1-\mu)\,c}{G}\,x$. Θὰ εἶναι ἄρα $\alpha = \beta$ καὶ 1′—2′ ***κάθετος*** ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως. Κατὰ τὴν θεωρουμένην παραμόρφωσιν τοῦ πλακοειδοῦς σώματος ἡ ***τυχοῦσα εὐθεῖα, κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον, διατηρεῖται εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως. Αἱ διατομαὶ x = σταθ. τῆς πλακὸς παραμένουν μετὰ τὴν παραμόρφωσιν ἐπίπεδοι***, ὑποβάλλονται δὲ εἰς ἀνὰ μονάδα μήκους τῆς διατομῆς καμπτικὴν ῥοπὴν $m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\, z\, dz = \frac{1}{2}\, c\, h^3 =$ σταθ. Ἡ ἀνηγμένη καμπτικὴ ῥοπὴ m_y ἐπὶ τῶν ἑδρῶν $y =$ σταθ. προκύπτει ἀντιστοίχως ἴση πρὸς $\frac{1}{2}\,\mu\, c\, h^3$. Ἔχομεν τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου παραμορφώσεως πλακοειδοῦς λωρίδος, καθ' ἣν αἱ διατομαὶ $x =$ σταθ. ὑφίστανται ὁμοιόμορφον κάμψιν, συνεπείᾳ ὁμοιομόρφως κατανεμημένων καμπτικῶν ζευγῶν m_x, m_y.

Ἐὰν ἐπίπεδον τῆς παραμορφώσεως εἶναι τὸ yz, ἀναλλοίωτοι παραμένουν αἱ ἕδραι $x =$ σταθ., ἐνῷ αἱ ἕδραι $y =$ σταθ. παραμορφοῦνται ἐπιπέδως. Ἡ ἐπαλληλία ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων παραμορφώσεων, παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον xz καὶ τὸ yz, παρέχει περίπτωσιν ὁμοιομόρφου κάμψεως πλακοειδοῦς σώματος, καθ' ἣν αἱ διατομαὶ $x =$ σταθ. καὶ $y =$ σταθ. διατηροῦνται ἐπίπεδοι μετὰ τὴν παραμόρφωσιν.

β) Ἀντὶ τῆς ἐντατικῆς συναρτήσεως (68) θεωρήσωμεν ἤδη τὴν

$$F = c\left(\frac{xz^3}{3} - \frac{h^2xz}{4}\right) \qquad (73)$$

ἀναφερομένην εἰς πλακοειδὲς σῶμα, μὲ συνοριακὰ ἐπίπεδα τὰ $x=0$, $x=x$, $z = +\frac{h}{2}$, $z = -\frac{h}{2}$ καὶ δύο τυχόντα παράλληλα πρὸς τὸ συντεταγμένον xz. Ἡ συνάρτησις (73) ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην (67), εἶναι τουτέστι διαρμονικὴ καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐντατικὴ συνάρτησις τοῦ πλακοειδοῦς σώματος ὑποβαλλομένου εἰς ἐπίπεδον παραμόρφωσιν παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ xz. Αἱ ἐντατικαὶ παράμετροι προκύπτουν ἐκ τῶν ἐξ. (66) καὶ (64), ἴσαι πρὸς

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = 2cyz\,, \quad \sigma_z = 0\,, \quad \tau_{xz} = c\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right), \\ \sigma_y = 2\mu cxz\,, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

μηδενιζόμεναι ἐπὶ τῶν συνοριακῶν ἐπιπέδων $z = \pm\frac{h}{2}$, καθ' ὅσον γίνεται τότε ἐπίσης $\tau_{xz} = 0$. Ἡ ἄνω καὶ κάτω ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς εἶναι καὶ πάλιν ἐλεύθεραι τάσεων, αἱ ἕδραι $x =$ σταθ. ὑπόκεινται εἰς ὀρθὰς τάσεις σ_x γραμμικῶς μεταβαλλομένας συναρτήσει τῆς z καὶ εἰς διατμητικὰς τάσεις τ_{xz} κατανεμομένας κατὰ νόμον παραβολικόν, τέλος αἱ ἕδραι $y =$ σταθ. δέχονται μόνον ὀρθὰς τάσεις

σ_y. Ἀνὰ μονάδα μήκους τῆς ἕδρας $x=$σταθ. μεταβιβάζεται τέμνουσα δύναμις $q_x = q$ ἴση πρὸς

$$q = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz}\, dz = c \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) dz = \frac{ch^3}{6}$$

καὶ καμπτικὴ ῥοπὴ

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\, z dz = 2cx \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{ch^3}{6}\, x = q \,.\, x \,.$$

Ἡ ἐπιπόνησις τοῦ σώματος παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον παραμορφώσεως xz, δύναται νὰ παραβληθῇ ἄρα πρὸς ἐπιπόνησιν δοκοῦ, φορτιζομένης εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς $x=0$ ὑπὸ συγκεντρωμένης δυνάμεως, ἐντάσεως $q = ch^3/6$ ἀνὰ μονάδα πλάτους τῆς ἀκραίας διατομῆς.

Αἱ συνιστῶσαι ξ, ζ τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων ὑπολογίζονται ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν ἐξ. (65) καὶ (74)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(1-\mu)\, c}{G}\, xz \;,\; \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\mu c}{G}\, xz$$

καὶ ἐντεῦθεν δι' ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς x καὶ z:

$$\xi = \frac{(1-\mu)\, c}{2G}\, x^2 z + \varphi_1(z) \;,\; \zeta = -\frac{\mu c}{2G}\, xz^2 + \varphi_2(x) \,.$$

Ἐξ ἄλλου θὰ εἶναι

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{c}{G}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

ἤ

$$\frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{d\varphi_2}{dx} = -\frac{(1-\mu)c}{2G}\, x^2 + \frac{\mu c}{2G}\, z^2 + \frac{ch^2}{4G} - \frac{c}{G}\, z^2 \,.$$

Ἐπειδὴ $\varphi_1(z)$ εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς z, ἐνῷ $\varphi_2(x)$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν x, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = c_1 - \frac{(1-\mu)\, c}{2G}\, x^2$$

ὁπότε

$$\varphi_2 = c_1 x - \frac{(1-\mu)\, c}{6G}\, x^3 + c_2$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = -c_1 + \frac{\mu c}{2G}\, z^2 + \frac{ch^2}{4G} - \frac{c}{G}\, z^2$$

ἤ

$$\varphi_1 = -c_1 z + \frac{ch^2}{4G}\, z + \frac{\mu c}{6G}\, z^3 - \frac{c}{3G}\, z^3 + c_3 \,.$$

Αἱ συνιστῶσαι ξ, η, ζ, δίδονται τελικῶς ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -c_1 z + c_3 + \frac{3q}{Gh^3}\, z \left[(1-\mu)\, x^2 + \frac{h^2}{2} + \frac{(\mu-2)}{3}\, z^2 \right] \\ \eta &= 0 \;,\; \zeta = c_1 x + c_2 - \frac{q}{Gh^3}\, x \left[(1-\mu)\, x^2 + 3\mu z^2 \right] \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

ὅπου c ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἴσου του $6q/h^3$.

Ὅπως εἰς τὰς ἐξ. (71), οὕτω καὶ ἐνταῦθα αἱ μερικαὶ συνιστῶσαι $\xi' = -c_1 z + c_3$, $\zeta' = c_1 x + c_2$ παρέχουν μετακίνησιν τοῦ σώματος ὡς στερεοῦ, ἄνευ παραμορφώσεώς τινος, δι' ὃ καὶ δύνανται νὰ παραλειφθοῦν. Ἐὰν δὲ ἀναφερθῶμεν καὶ πάλιν εἰς **λεπτὰς** πλάκας, δι' ἃς οἱ ὅροι μὲ παράγοντας z^2 καὶ h^2 ἐπιτρέπεται νὰ διαγραφοῦν ὡς πολὺ μικροὶ ἔναντι τῶν ὅρων μὲ παράγοντα x^2, αἱ ἐξ. (75) ἁπλοποιοῦνται εἰς τὰς

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{3\,(1-\mu)\, q}{Gh^3}\, x^2 z \;,\; \eta = 0 \;, \\ \zeta &= -\frac{(1-\mu)\, q}{Gh^3}\, x^3 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Τὰ σημεῖα τοῦ μέσου ἐπιπέδου μετακινοῦνται μόνον κατακορύφως, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἡ δὲ 3η τῶν ἐξ. (76) παρέχει συγχρόνως καὶ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἴχνους της ἐπιφανείας κάμψεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x\zeta$ (πρβλ. Σχ. 14). Ἐπειδὴ $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial z}$ προκύπτει καὶ πάλιν, ὅτι ***ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον παραμένει μετὰ τὴν παραμόρφωσιν εὐθεῖα, κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως.***

Διὰ τῆς ἐπαλληλίας δύο ἐντατικῶν καταστάσεων τῆς μορφῆς (73), ὧν ἐπίπεδα παραμορφώσεως εἶναι τὰ xz καὶ yz, μὲ δύο ἄλλας ἐντατικὰς καταστάσεις τῆς μορφῆς (68), ὧν τὰ ἐπίπεδα παραμορφώσεως εἶναι λοξὰ ὡς πρὸς τὰ xz καὶ yz ἀλλὰ κάθετα ἐπ' ἄλληλα, δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν τὴν γενικωτάτην περίπτωσιν παραμορφώσεως εἰς στοιχεῖον $dx \,.\, dy \,.\, h$ πλακοειδοῦς σώματος, ἀφορτίστου κατὰ τὰς ἐπιφανείας αὐτοῦ $z = \pm h/2$. Εὐκόλως δύναται, βάσει τῶν ἀνωτέρω, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐφ' ὅσον ἡ πλὰξ εἶναι λεπτή, ἤτοι τὸ πάχος h αὐτῆς εἶναι μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὰς διαστάσεις αὐτῆς x, y, ἡ παραμόρφωσις τοῦ στοιχείου εἶναι τοιαύτη, ὥστε πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον νὰ παραμένῃ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως. Ἐδόθη οὕτω ἡ θεωρητικὴ δικαιολογία τῆς ἐν § 4 διατυπωθείσης παραδοχῆς.

Ἐὰν ἡ ἄνω ἐπιφάνεια τοῦ πλακοειδοῦς σώματος ὑποβάλλεται εἰς ὁμοιομόρφως κατανεμημένην φόρτισιν ἐντάσεως $p=-\sigma_z$, δύναται καὶ πάλιν ν' ἀποδειχθῇ [19], ὅτι κατὰ τὴν παραμόρφωσιν τοῦ σώματος τούτου παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ xz ἢ yz αἱ δημιουργούμεναι τάσεις σ_z καὶ τ_{xz} ἐπιτρέπεται νὰ παραμεληθοῦν ὡς πολὺ μικραὶ ἔναντι τῶν λοιπῶν, ἐφ' ὅσον τὸ πάχος τῆς πλακὸς h εἶναι μικρόν. Ἐπαληθεύεται δὲ ἐπὶ πλέον τότε τὸ διατυπωθὲν ἀνωτέρω διὰ τὴν ἀφόρτιστον πλάκα συμπέρασμα, καθ' ὃ αἱ ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον κάθετοι μετατρέπονται εἰς καθέτους ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάμψεως.

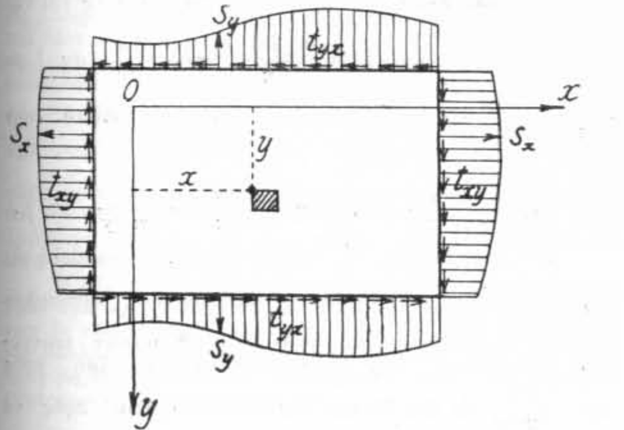
§ 7. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας κάμψεως λεπτῆς πλακὸς ἐντεινομένης ἐν τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ αὐτῆς καὶ καθέτως πρὸς αὐτό. Ἡ ἐν § 4 εὑρεθεῖσα θεμελιώδης διαφορικὴ ἐξίσωσις (48) τῆς καμπτομένης λεπτῆς πλακός, ἰσχύει ὡς εἴδομεν μόνον διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ ἐπὶ τῆς πλακὸς ἐνεργοῦντα ἐξωτερικὰ φορτία εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον. Ἡ διερεύνησις ὅμως τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως καθιστᾷ ἀναγκαίαν καὶ τὴν ἐξέτασιν τῆς περιπτώσεως φορτίσεως ὑπὸ συστήματος δυνάμεων συνεπιπέδου πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον. Θεωρήσωμεν κατὰ ταῦτα τὴν πλάκα ὑποβαλλομένην εἰς φόρτισιν $p=f(x,y)$ καθέτως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον, ἐπὶ πλέον δὲ κατὰ τὸ περίγραμμα αὐτῆς εἰς ἐπίπεδον φόρτισιν s_x, s_y, t_{xy}, t_{yx} παραλλήλως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον (Σχ. 15). Αἱ συνιστῶσαι αὗται s, t λογίζονται ὁμοιομόρφως κατανεμημέναι, καθ' ὅλον τὸ πάχος τοῦ περιγράμματος, ἐξ αὐτῶν δὲ s_x καὶ s_y παριστοῦν τὰς ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας ἢ μήκους τοῦ συνοριακοῦ στοιχείου hdy καὶ hdx ἐνεργούσας ὀρθὰς συνιστώσας, ἐνῷ t_{xy}, t_{yx} παριστοῦν τὰς ἀντιστοίχους διατμητικὰς συνιστώσας.

Ἡ ἐπίπεδος φόρτισις s, t, θεωρουμένη ὡς μόνη ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς πλακός, δημιουργεῖ ἐν αὐτῇ ἐντατικὴν κατάστασιν κατὰ μεγίστην προσέγγισιν ἐπίπεδον, ἤτοι τοιαύτην, ὥστε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς πλακὸς αἱ κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον xy ἐντατικαὶ παράμετροι νὰ μηδενίζωνται. Ἡ προσέγγισις εἶναι τόσον μεγαλειτέρα, ὅσον ἡ πλὰξ εἶναι λεπτοτέρα, διότι τότε πληροῦται εὐχερέστε-

(19) A. Nadai: Elastische Platten, § 15, σελ. 51.

ρον ἡ ὑπόθεσις περὶ ὁμοιομόρφου κατανομῆς τῶν συνιστωσῶν s , t καθ' ὅλον τὸ πάχος τοῦ περιγράμματος.

Καλέσωμεν σ′ , τ′ τὰς παραμέτρους τῆς ἐντάσεως καὶ ε′ , γ′ τὰς χαρακτηριστικὰς τῆς παραμορφώσεως, τὰς



Σχ. 15

ὀφειλομένας εἰς τὴν ἐπίπεδον φόρτισιν s , t . Θὰ εἶναι τότε, συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω $\sigma'_z = \tau'_{xz} = \tau'_{yz} = 0$, ὁμοίως $\gamma'_{xz} = \gamma'_{yz} = 0$ καὶ λόγῳ τῶν ἐξ. (32), (34)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{\partial\xi'}{\partial x} = \frac{1}{E}\,(\sigma'_x - \mu\sigma'_y)\ , \\ \varepsilon'_y &= \frac{\partial\eta'}{\partial y} = \frac{1}{E}\,(\sigma'_y - \mu\sigma'_x)\ , \\ \gamma'_{xy} &= \frac{\partial\xi'}{\partial y} + \frac{\partial\eta'}{\partial x} = \frac{1}{G}\,\tau'_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

ἔνθα ξ′ , η′ αἱ κατὰ τοὺς ἄξονας x , y συνιστῶσαι τῶν ἐλαστικῶν μετακινήσεων συνεπείᾳ τῆς θεωρηθείσης ἐπιπέδου φορτίσεως.

Ὅπως εἰς τὴν ἐπίπεδον παραμόρφωσιν, οὕτω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιπέδου ἐντάσεως παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον xy, αἱ ἐντατικαὶ παράμετροι σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} ἐκφράζονται, συναρτήσει τῆς ἐντατικῆς συναρτήσεως F(x,y) τοῦ Airy, διὰ τῶν σχέσεων [20]

$$\sigma'_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\ ,\quad \sigma'_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\ ,\quad \tau'_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \qquad (78)$$

ἔνθα F (x,y) εἶναι συνάρτησις διαρμονική, ἱκανοποιοῦσα δηλαδὴ τὴν μερικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \Delta\Delta F = 0 \qquad (79)$$

Πᾶσα διαρμονικὴ συνάρτησις δύναται ἄρα νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς ἐντατικὴ συνάρτησις ἐπιπέδου ἐντατικῆς καταστάσεως μὲ ἐντατικὰς παραμέτρους τὰς τῶν ἐξ. (78). Ἀντιστρόφως, ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐντατικῶν παραμέτρων σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} ἐκ τῶν τιμῶν s , t , ἀνάγεται εἰς τὴν προσαρμογὴν τῆς λύσεως τῆς διαφορικῆς ἐξ. (79) εἰς τὰς συνοριακὰς συνθήκας, ἤτοι τὰς γνωστὰς συνοριακὰς συνιστώσας s_x, s_y, t_{xy}, t_{yx} τῶν ἐντατικῶν παραμέτρων [21]. Χάρις εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς συναρτήσεως τοῦ Airy, ἡ ἀφετηρία τῆς ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων τῆς ἐπιπέδου παραμορφώσεως καὶ τῆς ἐπιπέδου ἐντάσεως, παραμένει, ὡς βλέπομεν, κοινὴ δι' ἀμφοτέρας τὰς μορφὰς ταύτας τοῦ ἐπιπέδου προβλήματος. Ἡ ἐντατικὴ συνάρτησις F (x,y) νοεῖται ἐν τοῖς κατωτέρω ὡς γνωστή.

Ζητήσωμεν ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν τὴν νέαν μορφὴν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας κάμψεως τῆς πλακός, ὅταν, πλὴν τῶν κατακορύφων ἐξωτερικῶν φορτίων p , ἐνεργεῖ συνάμα καὶ τὸ ἐπίπεδον δυναμικὸν σύστημα s , t. Πρὸς τοῦτο φαντασθῶμεν τὰ δύο ταῦτα δυναμικὰ συστήματα ἐνεργοῦντα διαδοχικῶς καὶ δὴ πρῶτον τὸ ἐπίπεδον σύστημα s , t , εἶτα δὲ ἐπιπροστιθέμενον τὸ σύστημα p [22]. Τὸ ἐπίπεδον σύστημα ὑποβάλλει ὡς εἴδομεν, τὴν πλάκα εἰς ἐπίπεδον ἐντατικὴν κατάστασιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἀξονικὸν ἐπίπεδον παραμένει, λόγῳ συμμετρίας, ἀναλλοίωτον. Κάμψιν τοῦ ἀξονικοῦ ἐπιπέδου προκαλεῖ μόνον τὸ κατακόρυφον σύστημα p. Ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ ὑπόθεσις, ὅτι αἱ τεταγμέναι w τῆς ἐπιφανείας κάμψεως εἶναι λίαν μικραί, ὄχι μόνον ἐν σχέσει πρὸς τὰς διαστάσεις τῆς πλακὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xy, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὸ πάχος h αὐτῆς (βλ. § 4), δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν τὰς συνεπείᾳ τοῦ ἐπιπέδου συστήματος ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἀναπτυσσομένας ἐντατικὰς παραμέτρους σ′, τ′ καὶ χαρακτηριστικὰς τῆς παραμορφώσεως ε′, γ′ ὡς ἀμεταβλήτους κατὰ τὴν ἐπιτέλεσιν τῆς κάμψεως τῆς πλακός. Αἱ εἰς τυχὸν σημεῖον (x,y), ἀνὰ μονάδα μήκους τῶν ἑδρῶν h dy , h dx ἀναπτυσσόμεναι ὀρθαὶ δυνάμεις n_x, n_y καὶ ἡ διατμητικὴ δύναμις n_{xy} , θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν σχέσεων

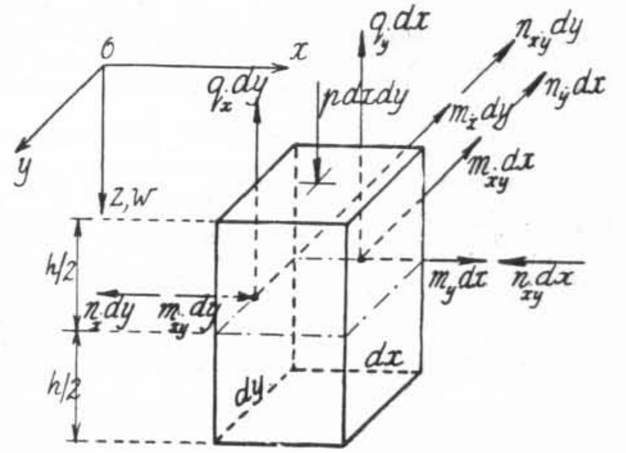
$$n_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma'_x\,dz = \sigma'_x \cdot h\ ,\ n_y = \sigma'_y \cdot h\ ,\ n_{xy} = \tau'_{xy} \cdot h \qquad (80)$$

αἱ δὲ τιμαὶ αὐτῶν θὰ παραμένουν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἀμετάβλητοι κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κάμψεως τῆς πλακός.

Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις, αἱ τελικαὶ τιμαὶ σ, τ τῶν ἐντατικῶν παραμέτρων καὶ ε , γ τῶν χαρακτηριστικῶν τῆς παραμορφώσεως εἴς τι σημεῖον (x, y, z) τῆς πλακὸς δύναται νὰ γραφοῦν

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + \sigma''\ ,\ \tau = \tau' + \tau''\ , \\ \varepsilon &= \varepsilon' + \varepsilon''\ ,\ \gamma = \gamma' + \gamma''\ , \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

ὅπου σ″ , τ″ , ε″ , γ″ παριστοῦν τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη, τὰ ὀφειλόμενα εἰς τὴν κύρτωσιν τοῦ μέσου ἐπιπέδου καὶ τὴν κάμψιν τῆς πλακός, προερχόμενα ἐκ τοῦ δυναμικοῦ



Σχ. 16

συστήματος p. Αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον συνιστῶσαι τῶν τάσεων σ_x, σ_y, τ_{xy} ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν συνιστωσῶν σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} καὶ τῶν σ''_x, σ''_y, τ''_{xy}.

Ἀντὶ τῶν τελευταίων τούτων εἰσάγομεν, ὡς ἐν § 4 εἴδομεν, τὰς ἀνὰ μονάδα μήκους τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν ἀνηγμένας ῥοπὰς κάμψεως m_x, m_y καὶ τὴν ῥοπὴν συστροφῆς m_{xy}, διδομένας ὑπὸ τῶν ἐξ. (43).

Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ πρισματικοῦ στοιχείου dx . dy . h ἐνεργοῦν ἑπομένως αἱ ἑξῆς δυνάμεις (Σχ. 16): Ἐπὶ τῆς

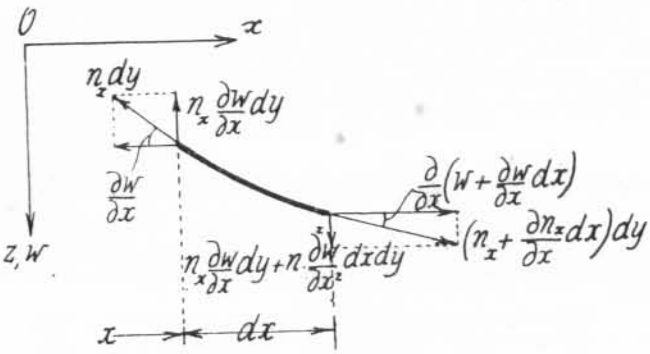
(20) Βλ. ὑποσημ. (18)

(21) A. u. L. Föppl: Drang u. Zwaug, § 39—57. Ἐπίσης Ε. Κοκκινοπούλου: Σύμμορφος ἀπεικόνισις ἐπιπέδων ἐντατικῶν καταστάσεων «Τεχνικὰ Χρονικὰ» 1941, Τ. 237-238.

(22) Τὴν δυνατότητα τῆς τοιαύτης διαδοχικῆς ἐπιβολῆς τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων παρέχει ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας (βλ. Ν. Κιτσίκη, Στατικὴ Ι. § 44).

ἕδρας dy . h ἡ ὀρθὴ δύναμις $n_x . dy$ καὶ ἡ διατμητικὴ $n_{xy} . dy$, ἐπίσης ἡ καμπτικὴ ροπὴ $m_x . dy$, ἡ ροπὴ συστροφῆς $m_{xy} . dy$, τέλος ἡ κάθετος πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον τέμνουσα δύναμις $q_x . dy$. Ἐπὶ τῆς ἕδρας dx . h ἐνεργοῦν αἱ $n_y . dx$, $n_{xy} . dx$, $m_y . dx$, $m_{xy} . dx$, τέλος ἡ κάθετος πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον τέμνουσα δύναμις $q_y . dx$. Αἱ q_x, q_y παρέχονται ὑπὸ τῶν ἐξ. (47). Ἐπὶ τῆς συνοριακῆς ἕδρας dx dy ἐφαρμόζεται τὸ ἐξωτερικὸν φορτίον p dx dy. Αἱ θετικαὶ κατευθύνσεις τῶν ἀνωτέρω μεγεθῶν σημειοῦνται εἰς τὸ Σχ. 16, ἐν ὁμοφωνίᾳ πρὸς τὰς παραδοχὰς τῆς § 4.

Κατὰ τὴν διατύπωσιν τῆς συνθήκης ἰσορροπίας ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ πρίσματος dx . dy . h ἐνεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τῶν καθέτων ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον, δέον νὰ



Σχ. 17

ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι πλὴν τῶν δυνάμεων q_x dy, q_y dx, p dx dy, ἔχουν κατακορύφους συνιστώσας καὶ αἱ δυναμεις n_x dy, n_y dx, n_{xy} dy, n_{xy} dx, παρουσιαζομένας λόγῳ τῆς κάμψεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου. Οὕτω ἡ ὀρθὴ δύναμις $n_x dy$, ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἕδρας x, κλίνει ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial w}{\partial x}$ καὶ ἔχει κατακόρυφον συνιστῶσαν $n_x \frac{\partial w}{\partial x} dy$(Σχ. 17), ἐνῷ ἐπὶ τῆς ἕδρας x + dx ἐνεργεῖ ὀρθὴ δύναμις $\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx\right) dy$ κλίνουσα ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$, ὁπότε ἡ κατακόρυφος αὐτῆς συνιστῶσα θὰ εἶναι ἴση πρὸς

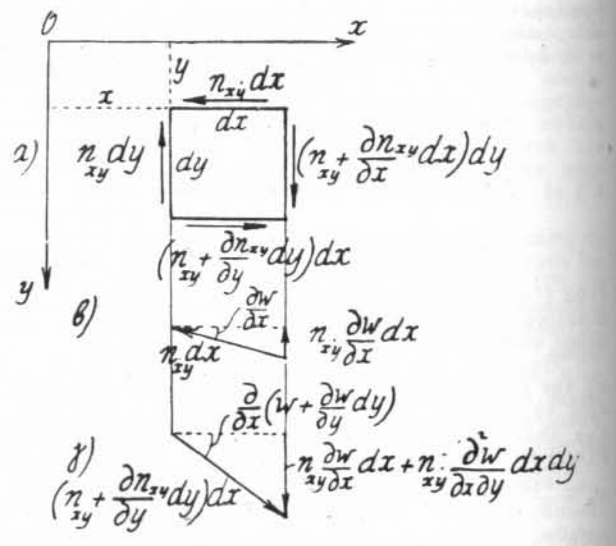
$$\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx\right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right).$$

Παραλειπομένου τοῦ ὅρου $\frac{\partial n_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx\, dy$ καὶ διαγραφομένου τοῦ ἀπειροστοῦ ἀνωτέρας τάξεως, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, παραλειπομένης τῆς μεταβολῆς τῆς n_x $\left(\frac{\partial n_x}{\partial x} = 0\right)$ —τῆς παραλείψεως ταύτης ἰσχυούσης κατὰ προσέγγισιν ὁσάκις n_x εἶναι ἐλαφρῶς μεταβλητὸν καὶ ἐφαρμοζομένης χάριν ἁπλουστεύσεως ἀκόμη καὶ ὅταν εἶναι αἰσθητῶς μεταβλητὴ ἡ ὀρθὴ δύναμις n_x — ἡ ὁλικὴ κατακόρυφος συνιστῶσα τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν x καὶ x + dx ἐνεργουσῶν ὀρθῶν δυνάμεων n_x dy γίνεται ἴση πρὸς $n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\, dy$, θετικὴ ὅταν κατευθύνεται πρὸς τὰ κάτω.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ὁλικὴ κατακόρυφος συνιστῶσα τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν y καὶ y + dy ἐνεργουσῶν ὀρθῶν δυνάμεων $n_y . dx$ ἰσοῦται πρὸς $n_y . \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx\, dy$, ἐφ' ὅσον παραλείπεται ἡ μεταβολὴ τῆς $n_y \left(\frac{\partial n_y}{\partial y} = 0\right)$. Ἡ συνιστῶσα αὕτη λογίζεται καὶ πάλιν θετική, ὅταν κατευθύνεται πρὸς τὰ κάτω. Ἐξ ἄλλου ἡ τέμνουσα δύναμις $n_{xy} . dx$ ἐπὶ τῆς ἕδρας y (Σχ. 18 α, β, γ) κλίνει ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial w}{\partial x}$ καὶ ἔχει κατακόρυφον συνιστῶσαν $n_{xy} . \frac{\partial w}{\partial x} dx$, ἡ δὲ τέμνουσα δύναμις $\left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} dy\right) dx$ ἐπὶ τῆς ἕδρας y + dy ἔχει κλίσιν $\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy$ καὶ κατακόρυφον συνιστῶσαν ἴσην πρὸς

$$\left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} dy\right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy\right).$$

Ἐὰν παραλειφθῇ, ὡς προηγουμένως, ἡ μεταβολὴ τῆς n_{xy} $\left(\frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0\right)$, ἡ ὁλικὴ κατακόρυφος συνιστῶσα τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν y καὶ y + dy ἐνεργουσῶν τεμνουσῶν δυνάμεων n_{xy} . dx καθίσταται ἴση πρὸς $n_{xy} . \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\, dy$, θετικὴ ὅταν κατευθύνεται πρὸς τὰ κάτω. Ἐντελῶς ἀναλόγως εὑρίσκομεν τὴν ὁλικὴν κατα-



Σχ. 18

κόρυφον συνιστῶσαν τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν x , x + dx ἐνεργουσῶν τεμνουσῶν δυνάμεων $n_{xy} . dy$, ὡσαύτως ἴσην πρὸς $n_{xy} . \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\, dy$. Διὰ τὴν ἰσορροπίαν δέον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ἤτοι

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\, dy + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx\, dy + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\, dv + p\, dx\, dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\, dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx\, dy = 0$$

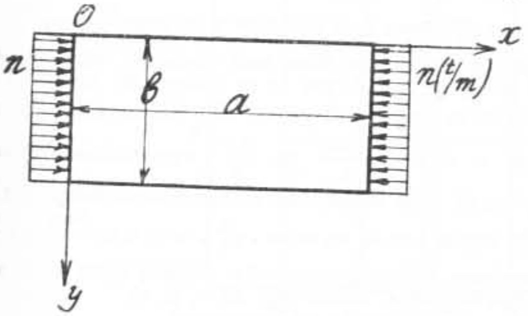
καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$ διὰ τοῦ ἴσου του —N.ΔΔw συμφώνως πρὸς ἐξ. (47), καταλήγομεν εἰς τὴν ἔκφρασιν

$$N . \Delta\Delta w = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + p \qquad (82)$$

ἥτις παριστᾷ τὴν μερικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς τεταγμένης τῆς ἐπιφανείας κάμψεως καὶ ἀποτελεῖ τὴν ἀφετηρίαν τῆς θεωρητικῆς διερευνήσεως τοῦ προβλήματος τῆς πλακὸς διὰ περίπτωσιν, καθ' ἣν αὕτη ἐντείνεται ἰσχυρῶς ἐν τῷ μέσῳ αὐτῆς ἐπιπέδῳ καὶ καθέτως πρὸς αὐτὸ ὑπὸ φορτίου p. Ἰσχύει, ἐφ' ὅσον τὰ βέλη w θεωρηθοῦν ὡς ἀπείρως μικρὰ ἐν σχέσει πρὸς τὸ πάχος τῆς πλακός, καὶ δέον νὰ ἐφαρμόζεται ὁσάκις αἱ ἀνηγμέναι δυνάμεις n_x, n_y, n_{xy} εἶναι αἰσθητῶς μεγαλείτεραι τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων q_x, q_y. Πράγματι εἰς τὴν ἐξ. (82) αἱ δυνάμεις n_x, n_y, n_{xy} εἰσέρχονται πολλαπλασιασμέναι ἐπὶ τὰ μικρὰ μεγέθη $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐπιπέδου ἐξωτερικοῦ δυναμικοῦ συστήματος ἐπὶ τῆς κάμψεως τῆς πλακὸς τότε μόνον θὰ εἶναι ὑπολογίσιμος, ὅταν n_x, n_y, n_{xy} εἶναι τάξεως μεγέθους ἀνωτέρας ἢ αἱ q_x, q_y.

Ἡ ἐξ. (82) χρησιμεύει ὡσαύτως διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως πλακῶν θλιβομένων ἐν τῷ ἀξονικῷ ἐπιπέδῳ των, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὰς ἀκολουθούσας § 8 καὶ 9. Αἱ δυνάμεις n_x, n_y, n_{xy}, ὁμοῦ μὲ τὴν p, δέον νὰ θεωρηθοῦν τότε ὡς γνωσταὶ συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων x, y.

§ 8. ***Ὕβωσις ὀρθογωνικῆς πλακὸς ὑποβαλλομένης εἰς ὁμοιόμορφον θλῖψιν $n_x = -n$.— Ἡ στήριξις τῆς πλακὸς εἶναι γύρωθεν ἀρθρωτή.*** Θεωρήσωμεν λεπτὴν ὀρθογωνικὴν πλάκα, μήκους α, πλάτους b, πάχους h, ἀναφερομένην εἰς δεξιόστροφον σύστημα συντεταγμένων



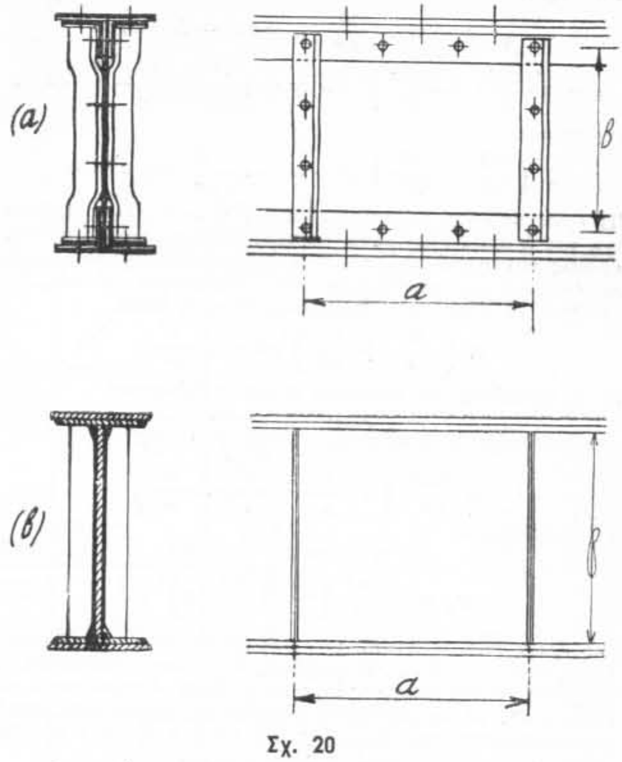
Σχ. 19

xyz, μὲ τὸ ἐπίπεδον xy συμπίπτον μετὰ τοῦ μέσου ἐπιπέδου τῆς πλακὸς (Σχ. 19), ὑποβαλλομένην κατὰ μῆκος τῶν ἑδρῶν x=0, x=α τοῦ περιγράμματος καὶ παραλλήλως πρὸς τον ἄξονα x εἰς ὁμοιόμορφον θλῖψιν, ἐντάσεως n ἀνὰ μονάδα μήκους τῶν ἀνωτέρων ἑδρῶν. Ἡ στήριξις τῆς πλακός, καθ' ὅλον τὸ περίγραμμα αὐτῆς, θεωρεῖται ἀρθρωτή, ὁπότε κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς § 5 ὡς συνοριακαὶ συνθῆκαι ἰσχύουν αἱ τοῦ Navier, διδόμεναι ὑπὸ τῶν ἐξ. (62'), ἤτοι w=0, Δw=0.

Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως n_κ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως τῆς οὕτω φορτιζομένης πλακός. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπαντᾶται πολλάκις ἐν τῇ πράξει, ὅταν ζητῆται νὰ προσδιορισθῇ τὸ πάχος τοῦ κορμοῦ ὁμοιομόρφως θλιβομένης δοκοῦ, συνθέτου διατομῆς δι' ἡλώσεως ἢ συγκολλητῆς οὕτως, ὥστε ν' ἀποτρέπεται ὁ κίνδυνος ὑβώσεως τοῦ κορμοῦ (Σχ. 20 α, β), ἢ ἀντιστρόφως ζητεῖται ἡ ἀπόστασις α μεταξὺ τῶν ἐλασμάτων ἀκαμψίας, ὅταν τὸ πάχος h τοῦ κορμοῦ εἶναι ὡρισμένον. Τὸ πλάτος b εἰς τὴν περίπτωσιν διατομῆς δι' ἡλώσεως, λαμβάνεται ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν γραμμῶν ἡλώσεως τῶν πελμάτων ἐπὶ τοῦ κορμοῦ (Σχ. 20 α). εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ διατομῆς συγκολλητῆς ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ (Σχ. 20 β). Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ δημιουργουμένη εἰς τὴν πλάκα, συνεπείᾳ τῆς ὁμοιομόρφου θλίψεως n, ἐντατικὴ κατάστασις, θὰ εἶναι μονοαξονική, θὰ ἰσχύῃ δὲ διὰ πᾶν σημεῖον τῆς πλακὸς $n_x = -n$, $p = n_y = n_{xy} = 0$. Ἡ ἐξ. (82) λαμβάνει οὕτω τὴν μορφὴν

$$N.\Delta\Delta w + n\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad (83)$$

Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα, ἡ φόρτισις καὶ ἡ στήριξις τῆς πλακὸς ἐν Σχ. 19 παρουσιάζουν πολλὴν ἀναλογίαν πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ Σχ. 1, § 2, ἔνθα ἐπραγματεύθη-



Σχ. 20

μεν τὴν περίπτωσιν λυγισμοῦ τῆς εὐθυγράμμου ἀμφιαρθρωτῆς ράβδου. Ὅπως ἐκεῖ ἐλήφθησαν αἱ τεταγμέναι τῆς δυνατῆς γραμμῆς λυγισμοῦ τῆς ράβδου, μεταβαλλόμεναι κατὰ νόμον ἡμιτονοειδῆ συμφώνως πρὸς ἐξ. (12), οὕτω καὶ διὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν τῆς πλακὸς δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν τὰς τεταγμένας τῆς δυνατῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως παρεχομένας ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ([23])

$$w = Y.\,\eta\mu\frac{i\pi x}{\alpha} \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (84)$$

ὅπου Y = f (y) συνάρτησις τῆς y, εἰκονίζουσα τὸν νόμον τῆς ὑβώσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y, ἐν ἐξαρτήσει ἀπὸ τὸν τρόπον στηρίξεως τῶν συνόρων y=0, y=b. Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως (84) ὑπὸ ἐπιπέδου y=σταθ. διήκει κατὰ ταῦτα κυματοειδῶς, μὲ ἀριθμὸν ὕβων ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ i = 1, 2, 3...

Ἐπειδὴ ἡ στήριξις τῶν ἑδρῶν y=0, y=b ἐθεωρήθη ἐπίσης ἀρθρωτή, εἶναι εὔλογον ἡ συνάρτησις Y νὰ ληφθῇ παρεμφερὴς πρὸς τὴν ημ $\frac{i\pi x}{\alpha}$ ἤτοι νὰ τεθῇ $Y = c\,\eta\mu\frac{\kappa\pi y}{b}$, ὁπότε τελικῶς θὰ ἔχωμεν

$$w = c\,\eta\mu\frac{i\pi x}{\alpha}.\,\eta\mu\frac{\kappa\pi y}{b} \quad (i, \kappa = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (85)$$

ἔνθα c = σταθερά. Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας (85) ὑπὸ ἐπιπέδων x=σταθ., y=σταθ. εἶναι ἑπομένως καμπύλαι ἡμιτονοειδεῖς, δηλαδὴ καμπύλαι παρουσιάζουσαι εἰς τὰς θέσεις τῆς ἀρθρωτῆς στηρίξεως σημεῖον καμπῆς, ὡς εἶναι ἀναγκαῖον.

Ἡ ἐξ. (85) ἱκανοποιεῖ τὰς συνοριακὰς συνθήκας. Πράγματι εἶναι διὰ x=0, x=α, y=0 y=b : w=0, ἐνῷ

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -c\,\eta\mu\frac{i\pi x}{\alpha}\,;\,\eta\mu\frac{\kappa\pi y}{b}\left(\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2\pi^2}{b^2}\right) = -w.\left(\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2\pi^2}{b^2}\right)$$

(23) H. Reissner: Über die Knickfestigkeit ebener Bleche. Zentralblatt der Bauverwaltung 1909, σελ. 93.

μηδενίζεται ὡσαύτως κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου, ἀφοῦ ἐπ' αὐτοῦ εἶναι $w = 0$.

Εἰσάγοντες τὴν ἐξ. (85) εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξ. (83) καὶ παρατηροῦντες ὅτι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w \cdot \frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}\ , \quad \Delta\Delta w = \Delta(\Delta w) =$$

$$= -\left(\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2\pi^2}{b^2}\right) . \Delta w = +\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 . \pi^4 . w$$

εὑρίσκομεν

$$N\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)\pi^4 . w - n\frac{i^2}{\alpha^2}\pi^2 w = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ $w = 0$, ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ πλὰξ παραμένει ἐπίπεδος. Παραμελουμένης τῆς λύσεως ταύτης, ὡς μὴ παρουσιαζούσης ἐνδιαφέρον τι, ἀπομένει διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ὑβουμένης πλακός, δι' ἣν δέον νὰ εἶναι w = ἀπροσδιοριστον, ἡ λύσις

$$N\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2\pi^2 = n\frac{i^2}{\alpha^2}$$

ἐξ ἧς προκύπτει ***τὸ κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως***

$$n_\kappa = N\pi^2\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 . \frac{\alpha^2}{i^2} =$$

$$= \frac{N\pi^2}{b^2}\left(i\,\frac{b}{\alpha} + \frac{\kappa^2}{i} . \frac{\alpha}{b}\right)^2$$

ἢ ἐὰν θέσωμεν

$$\alpha : b = \varrho \tag{86}$$

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2}\left(\frac{i}{\varrho} + \frac{\kappa^2}{i}\,\varrho\right)^2 . \tag{87}$$

Ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν n_κ τῶν διδομένων ὑπὸ τῆς ἐξ. (87) διὰ $i, \kappa = 1, 2, 3 \ldots$ ἐνδιαφέρει, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ ἐλαχίστη. Πρὸς παραγωγὴν ταύτης δέον ὁπωσδήποτε νὰ εἶναι $\kappa=1$, νὰ σχηματίζεται δηλαδὴ εἷς μόνον ὕβος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y. Μὲ $\kappa=1$ ἡ ἐξ. (87) γίνεται

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2}\left(\frac{i}{\rho} + \frac{\varrho}{i}\right)^2 \tag{87'}$$

ἡ δὲ ***κρίσιμος τάσις ὑβώσεως***

$$\sigma_\kappa = \frac{n_\kappa}{h} = \frac{N\pi^2}{b^2 h}\left(\frac{i}{\varrho} + \frac{\varrho}{i}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2 h^2 E}{12\, b^2\,(1-\mu^2)}\left(\frac{i}{\varrho} + \frac{\varrho}{i}\right)^2$$

ἔνθα ὁ συντελεστὴς ἀναμψίας N ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^3}{12}$, συμφώνως πρὸς ἐξ. (42). Ἐὰν παραστήσωμεν

$$\varphi = \frac{i}{\varrho} + \frac{\varrho}{i} \tag{88}$$

παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ***ἐλαχίστη κρίσιμος τάσις ὑβώσεως*** $\min\sigma_\kappa$ παράγεται δι' ἐκείνην τὴν τιμὴν i/ϱ δι' ἣν $\frac{\partial\varphi}{\partial(i/\varrho)} = 0$, ἤτοι διὰ $i/\varrho = \mathbf{1}$, ὁπότε

$$\min\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 h^2 E}{3b^2\,(1-\mu^2)} = 4\sigma_e \tag{89}$$

ἔνθα

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 h^2 E}{12 b^2\,(1-\mu^2)} = \frac{N\pi^2}{b^2 h} \tag{90}$$

ἡ κατὰ Euler ***κρίσιμος τάσις λυγισμοῦ ἰδεατῆς ῥάβδου*** μήκους b, πλάτους διατομῆς ἴσου πρὸς τὴν μονάδα καὶ ὕψους διατομῆς h, ἐξ ὑλικοῦ μὲ μέτρον ἐλαστικότητος $E : (1-\mu^2)$ (ἀντὶ E), ὡς προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς ἐξ. (16) τῆς § 2 τῆς ἐκφραζούσης τὸν τύπον τοῦ Euler διὰ θλιβομένην ἀμφιαρθρωτὴν ῥάβδον, ἐὰν ἐκεῖ θέσωμεν $l=b$, $J=1 . \frac{h^3}{12}$, $E : (1-\mu^2)$ ἀντὶ E καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς τῆς ἰδεατῆς ῥάβδου $F = 1 . h$.

Διὰ χαλυβδίνην πλάκα, μὲ $\mu = 0{,}3$, $E = 2100\ t/cm^2$ λαμβάνομεν

$$\sigma_e = 1898\left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (t/cm^2) . \tag{91}$$

Ἡ ἐξ. (89) προέκυψεν διὰ $i=\varrho$. Ἀλλ' εἶναι $i=1,2,3\ldots$ ἀκέραιος ἀριθμός, ἐνῷ ὁ λόγος ϱ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθογωνικῆς πλακὸς δύναται νὰ εἶναι τυχὼν δεκαδικὸς ἀριθμός. Ἄρα ἡ ἐλαχίστη κρίσιμος τάσις ὑβώσεως $\min\sigma_\kappa$ τῆς ἐξ. (89), τότε μόνον δύναται νὰ παραχθῇ, ὅταν ὁ λόγος ϱ εἶναι ὡσαύτως ἀριθμὸς ἀκέραιος. Διὰ τυχόντα μὴ ἀκέραιον ϱ δέον ν' ἀναζητηθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως φ (ἐξ. 88), ὅταν i λαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1, 2, 3.... ἐνῷ ϱ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς καὶ ἄνω.

Πρὸς τοῦτο χαράσσομεν ἀπὸ ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων ϱ, φ (Σχ. 21) τὰς καμπύλας

$$\varphi_1 = \frac{1}{\varrho} + \varrho\ , \quad \varphi_2 = \frac{2}{\varrho} + \frac{\varrho}{2}\ , \quad \varphi_3 = \frac{3}{\varrho} + \frac{\varrho}{3}\ ,$$

$\varphi_4 = \frac{4}{\varrho} + \frac{\varrho}{4}\ \ldots$ ἀντιστοίχως διὰ $i = 1, 2, 3, 4 \ldots$ καὶ ἐκ τῆς ὁμάδος τῶν καμπυλῶν τούτων ἐκλέγομεν ὡς ἰσχύοντα, μόνον τὰ τμήματα μὲ ἐλαχίστην τεταγμένην, διακρινόμενα εἰς Σχ. 21 διὰ συνεχοῦς γραμμῆς. Αἱ καμπύλαι φ_i παρουσιάζουν ὅλαι κοινὸν ἐλάχιστον διὰ $\varrho = i$, ἴσον πρὸς $\min\varphi = 2$. Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν φ_1 καὶ φ_2 ἔχει τετμημένην $\varrho_{1,2} = \sqrt{2} \cong 1{,}41$, τὸ τῶν φ_2 καὶ φ_3 τετμημένην $\varrho_{2,3} = \sqrt{6} \cong 2{,}45$ καὶ περαιτέρω ὅτι $\varrho_{3,4} = \sqrt{12} \cong 3{,}46$, $\varrho_{4,5} = \sqrt{20} \cong 4{,}47$, $\varrho_{5,6} = \sqrt{30} \cong 5{,}47 \ldots$. Συμπεραίνομεν, ὅτι διὰ λόγον $\varrho = 0 - 1{,}41$ ἰσχύει $i = 1$ καὶ $\sigma_\kappa = \sigma_e . \varphi_1^2$, ἐνῷ συνάμα ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως ἔχει ἐξίσωσιν $w = c\,\eta\mu\,\frac{\pi x}{\alpha}\,\eta\mu\,\frac{\pi y}{b}$ καὶ σχηματίζει ἕνα μόνον ὕβον καθ' ἑκάστην τῶν διευθύνσεων x καὶ y. Διὰ λόγον $\varrho = 1{,}41 - 2{,}45$ ἰσχύει $i = 2$ καὶ $\sigma_\kappa = \sigma_e . \varphi_2^2$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως ἔσεται $w = c\,\eta\mu\,\frac{2\pi x}{\alpha}\,\eta\mu\,\frac{\pi y}{b}$, σχηματίζουσα δύο ὕβους κατὰ τὴν διεύθυνσιν x. Περαιτέρω, διὰ $\varrho = 2{,}45 - 3{,}46$ ἰσχύει $i = 3$, $\sigma_\kappa = \sigma_e . \varphi_3^2$, $w = c\,\eta\mu\,\frac{3\pi x}{\alpha}\,\eta\mu\,\frac{\pi y}{b}$, ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως σχηματίζει δηλαδὴ τρεῖς ὕβους κατὰ τὴν διεύθυνσιν x, κ.ο.κ. (Σχ. 22 α, β, γ).

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\sigma_\kappa = \sigma_e . \varphi_i^2 \tag{92}$$

ὅπου φ_i ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου φ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ i τοιαύτην, ὥστε ἡ φ νὰ καθίσταται ἐλαχίστη ἐντὸς τῆς δοθείσης περιοχῆς μεταβολῆς τοῦ λόγου ϱ. Ἐὰν ν παριστᾷ τὸν συντελεστὴν ἀσφαλείας θὰ ἔχωμεν, ἐκ τῆς ἐξ. (92).

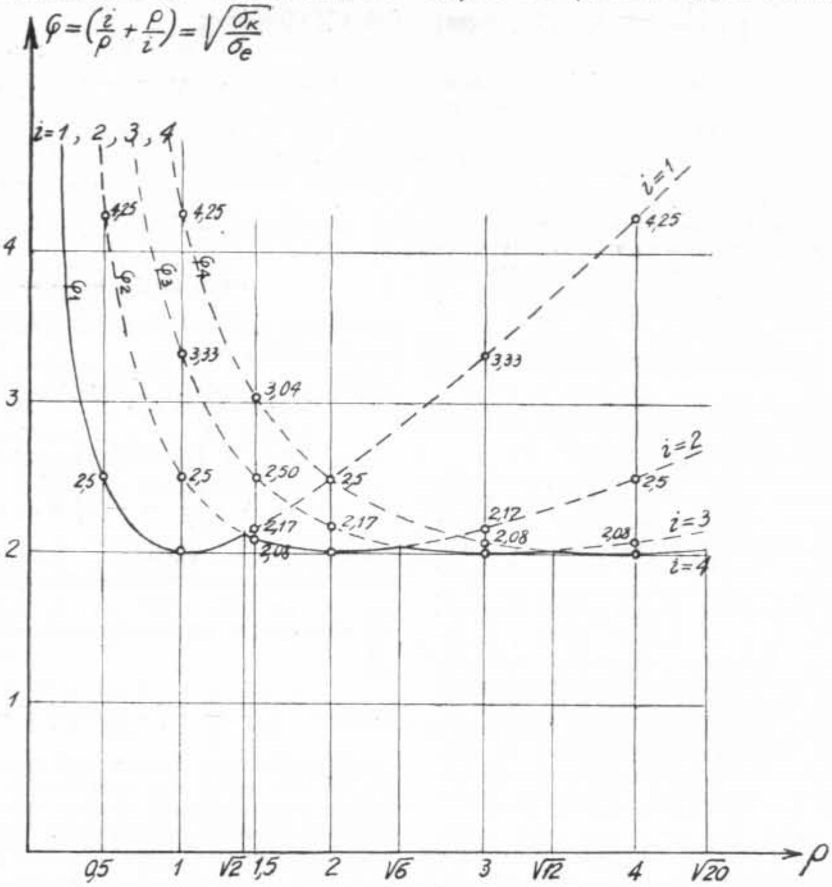
$$\sigma_{\vartheta,\,\epsilon\pi\iota\tau\varrho.} = \frac{\sigma_\kappa}{\nu} = \frac{\sigma_e}{\nu}\,\varphi_i^2 \tag{92'}$$

Ἐνταῦθα παριστᾷ $\sigma_{\vartheta,\,\epsilon\pi\iota\tau\varrho.}$ τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην τάσιν θλίψεως $\frac{n}{h}$ ἐπὶ τῶν συνοριακῶν ἑδρῶν $x = 0$, $x = \alpha$ πρὸς ἐξασφάλισιν τῆς πλακὸς ἀπὸ τοῦ κινδύνου ὑβώσεως.

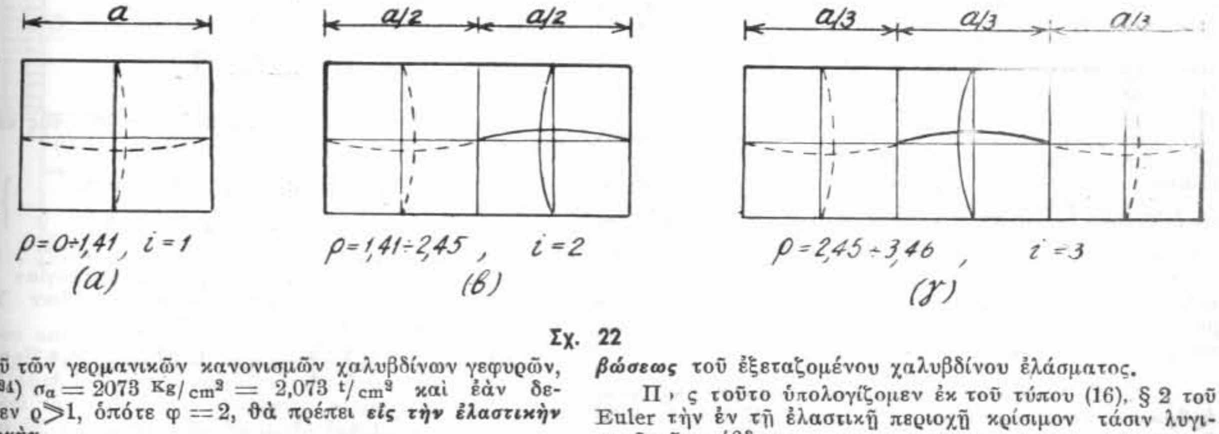
Ἐκ τοῦ Σχ. 21 βλέπομεν ὅτι διὰ $\varrho > 1$ δυνάμεθα κατ' ἀνεκτὴν προσέγγισιν, τόσον μεγαλειτέραν ὅσῳ ὁ λόγος ϱ εἶναι μεγαλείτερος, νὰ θέσωμεν $\varphi_i = 2$, ἀνεξάρτητον τῶν i καὶ ϱ. Τὸ μέγιστον διαπραττόμενον σφάλμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν $\varrho = \sqrt{2}$, ὁπότε $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \varphi_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{(3/\sqrt{2})^2 - 2^2}{2^2} \times 100 = 12{,}5\ \%$. Διὰ $\varrho > 1$ ὑπολογίζομεν ἄρα ἐν τῇ πράξει μὲ $\varphi = 2$, ὁπότε $\sigma_\kappa = 4\sigma_e$ (πρβλ. ἐξ. (89)) καὶ $\sigma_{\vartheta,\,\epsilon\pi\iota\tau\varrho.} = \frac{4\sigma_e}{\nu}$.

Ὅλοι οἱ ἀνωτέρω ἐξαχθέντες τύποι προϋποθέτουν τὴν ἰσχὺν τοῦ νόμου τοῦ Hooke, περὶ ἀναλογίας τάσεων καὶ παραμορφώσεων, ἀφοῦ καὶ ἡ ἐξ. (83), ἐξ ἧς οὗτοι ἐπήγασαν, ἐβασίσθη εἰς τὴν ἰσχὺν τοῦ νόμου τούτου. Οἱ τύποι (89), (92) ἰσχύουν ἑπομένως διά τὴν ἐλαστικὴν περιοχήν, ὅταν δηλαδὴ ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως σ_κ παραμένῃ μικροτέρα, ἢ τὸ πολὺ γίνεται ἴση πρὸς τὸ ὅριον ἀναλογίας σ_α τοῦ ὑλικοῦ, ἐξ οὗ ἡ πλάξ. Διὰ χάλυβα εἶναι $\sigma_\alpha = 1800$ ἕως 2300 Kg/cm². Ὡς μέσην τιμὴν τῆς σ_α ἐκλέγομεν τὴν ἀναγραφομένην εἰς τοὺς πίνακας λυ-

Θεωρήσωμεν ἤδη ράβδον χαλυβδίνην, ἀμφιαρθρωτήν, μήκους l, μὲ ἐμβαδὸν καὶ ροπὴν ἀδρανείας τῆς διατομῆς της F, J καὶ ζητήσωμεν νὰ ἐξακριβώσωμεν ὑπὸ ποίους ὅρους ὁ ἐν τῇ ἐλαστικῇ περιοχῇ ***κίνδυνος λυγισμοῦ*** τῆς ράβδου ταύτης εἶναι ἀκριβῶς ἴσος πρὸς τὸν ***κίνδυνον ὑ-***



Σχ. 21



Σχ. 22

γισμοῦ τῶν γερμανικῶν κανονισμῶν χαλυβδίνων γεφυρῶν, ἤτοι [24] $\sigma_\alpha = 2073\ \mathrm{Kg/cm^2} = 2{,}073\ \mathrm{t/cm^2}$ καὶ ἐὰν δεχθῶμεν $\rho \geqslant 1$, ὁπότε $\varphi = 2$, θὰ πρέπει ***εἰς τὴν ἐλαστικὴν περιοχὴν***

$$\sigma_\kappa = 4\sigma_e = 4 \times 1898 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \leqslant 2{,}073$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{b}{h} \geqslant 60 \tag{93}$$

ἐνῷ ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως τοῦ χαλυβδίνου ἐλάσματος ἔσεται

$$\sigma_\kappa = 7592 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (\mathrm{t/cm^2}). \tag{94}$$

βώσεως τοῦ ἐξεταζομένου χαλυβδίνου ἐλάσματος.

Π ρ ς τοῦτο ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου (16), § 2 τοῦ Euler τὴν ἐν τῇ ἐλαστικῇ περιοχῇ κρίσιμον τάσιν λυγισμοῦ τῆς ράβδου

$$\sigma'_\kappa = \frac{P_\kappa}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{95}$$

ἔνθα $\lambda = l\sqrt{\frac{F}{J}}$ ὁ συντελεστὴς λυγηρότητος ἢ ἁπλῶς ἡ λυγηρότης τῆς ράβδου. Ἵνα οἱ κίνδυνοι λυγισμοῦ καὶ ὑβώσεως εἶναι ἴσοι, δέον νὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις αἱ κρίσιμοι τάσεις λυγισμοῦ καὶ ὑβώσεως, ἤτοι $\sigma'_\kappa = \sigma_\kappa$, ἢ συμφώνως πρὸς ἐξ. (95), (94)

(24) Βλ. λ.χ. Α. Ρουσοπούλου «Σιδηραὶ Κατασκευαί» τ. Β΄. Κανονισμοί, 1935 § 44, σελ. 90, Σχ. 43.

$$7592 \left(\frac{h}{b}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Ἡ λυγηρότης τῆς θεωρηθείσης ὑποκαταστάτου ράβδου δέον ἄρα νὰ εἶναι

$$\lambda = \pi \frac{b}{h} \sqrt{\frac{E}{7592}} = \pi \frac{b}{h} \sqrt{\frac{2100}{7592}} \cong 1{,}65 \frac{b}{h}. \quad (96)$$

Κατὰ ταῦτα, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ χαλυβδίνου ἐλάσματος μὲ $\rho \gg 1$ ἔναντι ὑβώσεως, ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἔναντι λυγισμοῦ τῆς ὑποκαταστάτου ράβδου, ἧς ἡ λυγηρότης ἰσοῦται πρὸς $1{,}65 \frac{b}{h}$. Διὰ $\lambda \geqslant 100$ ἢ $\frac{b}{h} \geqslant 60$, ἰσχύει ἡ ἐλαστικὴ περιοχὴ καὶ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν καὶ χρησιμοποιηθοῦν αὐτούσιοι οἱ ἀντίστοιχοι πίνακες ὑπολογισμοῦ εἰς λυγισμὸν τῶν ἁπλῶν ράβδων. Κατ' ἐπέκτασιν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ὑποκατάστατον ράβδον μὲ $\lambda = 1{,}65 \frac{b}{h}$ καὶ ὅταν $\lambda < 100 \left[\frac{b}{h} < 60\right.$ ἢ $\left.\sigma_\kappa > 2{,}073\ {}^{t}/_{cm^2}\right]$, ἤτοι ὅταν εὑρισκώμεθα εἰς τὴν πλαστικὴν περιοχήν, ὁπότε καὶ πάλιν θὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τοὺς γνωστοὺς πίνακας ἢ διαγράμματα ὑπολογισμοῦ εἰς λυγισμὸν ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ.

Σχ. 23

Ὡς πρὸς τὰ ἐφαρμοστέα μέτρα πρὸς μείωσιν τοῦ κινδύνου ὑβώσεως χαλυβδίνων κορμῶν συνθέτων θλιβομένων διατομῶν ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐγκάρσια ἐλάσματα ἀκαμψίας, ὡς τὰ σημειούμενα εἰς Σχ. 20 α, β, οὐδόλως ἢ ὀλίγον μόνον συμβάλλουν πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον. Πράγματι, ἐλάσματα ἀκαμψίας, τιθέμενα ἀνὰ ἀποστάσεις α ἴσας πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ὕβου τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως οὐδόλως, ὡς εἶναι φανερόν, ἐλαττώνουν τὸν κίνδυνον ὑβώσεως, ἐνῷ δι' ἀπόστασιν $\alpha = {}^{b}/_{2}$, ἤτοι λίαν πυκνὴν διάταξιν ἐλασμάτων ἀκαμψίας, ὁπότε $\rho = 0{,}5$ $i=1$, $\varphi = \frac{1}{0{,}5} + 0{,}5 = 2{,}5$, ἡ ἔναντι ὑβώσεως ἀσφάλεια γίνεται $\frac{2{,}5^2}{4} \cong 156$, φορὰς μεγαλυτέρα ἢ πρὸ τῆς τοποθετήσεως ἐλασμάτων, ἤτοι αὐξάνει μόνον κατὰ 56 %. Τοποθέτησις ἐλασμάτων ἀκαμψίας εἶναι ἄρα κατ' ἀρχὴν ἀντιοικονομική. Τοὐναντίον ἐνδείκνυται δι' ὑψηλὰς διατομὰς ὡς λίαν πρόσφορος, ἡ τοποθέτησις διαμήκων ἐλασμάτων ἀκαμψίας, λ. χ. εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους b (Σχ. 23). Ἂν $\alpha/b = \rho \geqslant 1$ τότε $2\alpha/b \geqslant 2$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\varphi^2 = 4$ πρὸ καὶ μετὰ τὴν τοποθέτησιν τοῦ διαμήκους ἐλάσματος ἀκαμψίας. Ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως $\sigma_\kappa = 4 \times 1898 \left(\frac{h}{b}\right)^2$ τετραπλασιάζεται λόγῳ διχοτομήσεως τοῦ ὕψους b, ἡ ἀσφάλεια ἔναντι ὑβώσεως γίνεται τετραπλασία ἢ πρότερον. Βεβαίως προϋποτίθεται, ὅτι τὸ προστιθέμενον ἔλασμα παραμένει ὄντως ἄκαμπτον, ἀποκλειομένης τῆς τυχὸν δυνατότητος ἐκφυγῆς αὐτοῦ, λόγῳ ὑβώσεως ὁλοκλήρου τοῦ κορμοῦ.

§ 9. Ἡ θλιβομένη ὀρθογωνικὴ πλὰξ στηρίζεται ἀρθρωτῶς κατὰ τὰς ἕδρας $x=0$, $x=\alpha$. ***Ἡ στήριξις τῶν λοιπῶν ἑδρῶν*** $y=0$, $y=b$ ***εἶναι ἡ τυχοῦσα.*** Θεωρήσωμεν καὶ πάλιν τὴν ὀρθογωνικην πλάκα ὑποβαλλομένην εἰς ὁμοιόμορφον θλῖψιν $-n$ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν $x = 0$, $x = \alpha$ (Σχ. 19), στηριζομένην κατὰ τὰς ἕδρας ταύτας ἀρθρωτῶς ὡς καὶ ἐν § 8, οὐχὶ ὅμως καὶ κατὰ τὰς ἕδρας $y=0$, $y=b$ καθ' ἃς ἡ στήριξις λογίζεται ἡ **τυχοῦσα.**

Ἡ ἐκ τῆς ὁμοιομόρφου θλίψεως δημιουργουμένη ἐπίπεδος ἐντατικὴ κατάστασις τῆς πλακὸς δύναται καὶ πάλιν νὰ θεωρηθῇ μονοαξονικὴ μὲ $n_x = -n$, $n_y = n_{xy} = 0$, $p = 0$, ὁπότε ἰσχύει ὡς ἔχει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (83).

Διὰ τὸν ἐκτεθέντα ἐν § 8 λόγον, ἡ τεταγμένη w τῆς δυνατῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως, ἀποτελοῦσα λύσιν τῆς ἐξ. (83), δύναται νὰ θεωρηθῇ παρεχομένη ὑπὸ τῆς ἐξ. (84), ἢ ἂν εἰσαγάγωμεν χάριν συντομίας

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{\alpha} \quad (i=1, 2, 3 \ldots.) \quad (97)$$

ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$w = Y \cdot \eta\mu\, \alpha_i x. \quad (98)$$

Ἡ συνάρτησις $Y = f(y)$ εἶναι ἤδη τυχοῦσα καὶ ὄχι ἡμιτονοειδής, ὡς ἐν § 8. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τεταγμέναι w τῆς ἐξ. (98) ἱκανοποιοῦν τὰς συνοριακὰς συνθήκας $w = 0$, $\Delta w = 0$, ἐπὶ τῶν συνόρων $x = 0$, $x = \alpha$. Πράγματι εἶναι διὰ $x = 0$, $x = \alpha$: $w = 0$

$$\text{καὶ} \quad \Delta w = -\alpha_i^2 Y \eta\mu\, \alpha_i x + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \eta\mu\, \alpha_i x = \eta\mu\, \alpha_i x \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \alpha_i^2 Y\right)$$

μηδενίζεται ἐπίσης ἐπὶ τῶν εἰρημένων ἑδρῶν.

Ἐξ ἄλλου εἶναι

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta w) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Delta w) = -\alpha_i^2 \eta\mu\, \alpha_i x \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \alpha_i^2 Y\right) + \eta\mu\, \alpha_i x \left(\frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} - \alpha_i^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha_i^2 Y \eta\mu\, \alpha_i x$$

εἰσάγοντες δὲ τὰς ἐκφράσεις ταύτας εἰς τὴν ἐξ. (83), ἀφοῦ προηγουμένως ἀντικαταστήσωμεν τὸ σύμβολον $\frac{\partial Y}{\partial y}$ διὰ τοῦ ἐν προκειμένῳ ταὐτοσήμου $\frac{dY}{dy}$, λαμβάνομεν

$$N \eta\mu\, \alpha_i x \left[\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\alpha_i^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_i^4 Y - \frac{n}{N} \alpha_i^2 Y\right] = 0 \quad (99)$$

Ἡ περίπτωσις $\eta\mu\, \alpha_i x = 0$, πραγματοποιουμένη μόνον διὰ τὰς τιμὰς $x = 0$, $x = \alpha$, $x = \alpha/i$ καὶ συνεπαγομένη συμφώνως πρὸς ἐξ (98) μηδενισμὸν τοῦ βέλους w, δὲν ἀποτελεῖ λύσιν τῆς ἐξ. (99). Ἀπομένει ἑπομένως ἡ συμβιβαζομένη πρὸς ἀπροσδιόριστον βέλος w λύσις

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\alpha_i^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_i^2 Y \left(\alpha_i^2 - \lambda^2\right) = 0 \quad (100)$$

ὅπου

$$\lambda^2 = \frac{n}{N} \,[25]. \quad (101)$$

Θεωρήσωμεν ἤδη κατὰ H. Reissner [26] τὰς κάτωθι μερικὰς λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (100)

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \eta\mu\, u_1 y, \quad Y_2 = \sigma\upsilon\nu\, u_2 y, \\ Y_3 = H\mu\, \upsilon_1 y, \quad Y_4 = \Sigma\upsilon\nu\, \upsilon_2 y \end{array}\right\} (102)$$

ἔνθα u_1, u_2, υ_1, υ_2 μεγέθη ἀνεξάρτητα τῆς y, μεταβλητὰ συναρτήσει τῶν i, α, β, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ α_i τῆς ἐξ. (97). Εἰσάγοντες τὴν μερικὴν λύσιν Y_1 εἰς τὴν ἐξ. (100), ἀποκτῶμεν τὴν συνθήκην

$$u_1^4 \eta\mu\, u_1 y + 2\alpha_i^2 u_1^2 \eta\mu\, u_1 y + \alpha_i^2 \eta\mu\, u_1 y (\alpha_i^2 - \lambda^2) = 0$$

ἢ

$$u_1^4 + 2\alpha_i^2 u_1^2 + \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - \lambda^2) = 0$$

ἐντεῦθεν δὲ

$$u_1 = \sqrt{\alpha_i (\lambda - \alpha_i)} \quad (103)$$

ἐὰν ἐνδιαφερθῶμεν μόνον διὰ θετικὰς τιμὰς u_1 (ἀποκλείσωμεν τὰς ἀρνητικάς καὶ φανταστικάς). Συμφώνως πρὸς ἐξ. (97), (101) τὰ μεγέθη α_i, λ εἶναι ἀμφότερα θετικά.

---

(25) Τὸ μέγεθος $\lambda = \sqrt{n]N}$ μὲ διάστασιν 1]cm, δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὴν λυγηρότητα λ τῆς προηγουμένης παραγράφου.

(26) Βλ. ὑποσημ. (23)

Μὲ $u_1 = \dfrac{\kappa\pi}{b}$ ἡ συνθήκη (103) συμπίπτει μὲ τὴν

$$N\left(\frac{i^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2\pi^2 = n\,\frac{i^2}{\alpha^2}$$

εὑρεθεῖσαν εἰς τὴν προηγουμένην § 8, κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως τῆς ἀρθρωτῶς στηριζομένης γύρωθεν πλακός.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $Y_2 = \text{συν}\, u_2 y$ εἶναι λύσις τῆς ἐξ. (100) ὅταν

$$u_2 = u_1 = u = \sqrt{\alpha_i\,(\lambda - \alpha_i)}\,.$$

Ἡ μερικὴ λύσις $Y_3 = \text{Ημ}\, \upsilon_1 y$, εἰσαγομένη εἰς τὴν ἐξ. (100) παρέχει τὴν συνθήκην

$$\upsilon_1^4\,\text{Ημ}\,\upsilon_1 y - 2\alpha_i^2\,\upsilon_1^2\,\text{Ημ}\,\upsilon_1 y + \alpha_i^2\,\text{Ημ}\,\upsilon_1 y(\alpha_i^2 - \lambda^2) = 0$$

ἢ

$$\upsilon_1^4 - 2\alpha_i^2\,\upsilon_1^2 + \alpha_i^2\,(\alpha_i^2 - \lambda^2) = 0$$

καὶ ἑπομένως, ἀποκλειομένων τῶν ἀρνητικῶν ἢ φανταστικῶν τιμῶν υ_1

$$\upsilon_1 = \sqrt{\alpha_i\,(\lambda + \alpha_i)}\,. \qquad (104)$$

Ἐντελῶς ἀναλόγως εὑρίσκομεν διὰ τὴν λύσιν $Y_4 = \text{Συν}\,\upsilon_2 y$ τὴν συνθήκην $\upsilon_2 = \upsilon_1 = \upsilon = \sqrt{\alpha_i\,(\lambda+\alpha_i)}$.

Ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες λύσεις (102) τῆς ἐξ. (100) εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξ. (100) λαμβάνει τὴν μορφὴν

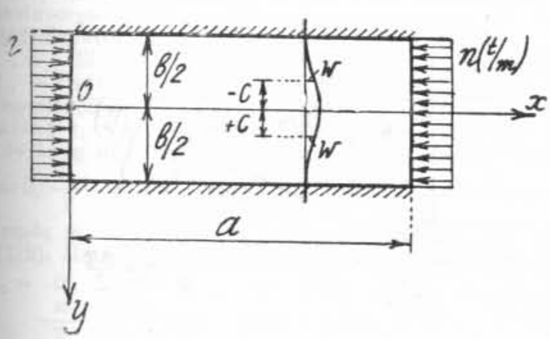
$$\begin{aligned} Y = {} & A.\text{ημ}\, uy + B.\text{συν}\, uy + \\ & + \Gamma.\text{Ημ}\,\upsilon y + \Delta.\text{Συν}\,\upsilon y \end{aligned} \qquad (105)$$

ἔνθα u , υ δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξ. (103), (104) καὶ A, B, Γ, Δ εἶναι σταθεραί. Τὰ μεγέθη u καὶ υ συνδέονται ἐξ ἄλλου ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$\left.\begin{aligned} u^2 + \upsilon^2 &= 2\alpha_i\,\lambda \\ \upsilon^2 - u^2 &= 2\alpha_i^2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Εἰδικεύσωμεν ἤδη τὴν ἔρευναν διά τινας ὡρισμένας περιπτώσεις στηρίξεως τῶν ἑδρῶν

α) ***Αἱ ἕδραι*** $y=0$, $y=b$ ***εἶναι ἀμφότεραι πεπακτωμέναι.*** Ἐνδείκνυται τότε νὰ μετατεθῇ τὸ σύστημα συντεταγμένων κατὰ b/2, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄξων x νὰ συμπέσῃ μὲ ἄξονα συμμετρίας τῆς πλακὸς (Σχ. 24). Ἡ μετάθεσις αὕτη οὐδόλως ἐπηρεάζει τοὺς ἀνωτέρω ὑπολογισμοὺς καὶ τὰς ἐξαχθείσας ἐξισώσεις, αἵτινες παραμένουν ἐν ἰσχύϊ ὡς καὶ πρότερον. Νέαι συνοριακαὶ συνθῆκαι διὰ τὰς ἕδρας $y = \pm\, b/2$ θὰ εἶναι συμφώνως πρὸς ἐξ. (60) αἱ



Σχ. 24

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,. \qquad (107)$$

Ἡ δυσμενεστέρα μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y, δηλαδὴ ἡ συνεπείᾳ τῆς μικροτέρας δυνατῆς κρισίμου φορτίσεως n_K εὐχερέστερον πραγματοποιουμένη, θὰ εἶναι εὔλογος ἡ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x, εἰκονιζομένη εἰς Σχ. 24. Ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως ταύτης συνηγορεῖ ἐξ ἄλλου ἡ γεωμετρικὴ καὶ φορτικὴ συμμετρία τῆς πλακός. Δέον ἄρα $w_{y=c} = w_{y=-c}$ ἐπὶ τυχούσης τομῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y, ἑπομένως συμφώνως πρὸς ἐξ. (98) $Y_{y=c} = Y_{y=-c}$. Ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τοῦτον ἡ ἐξ. (105) παρέχει

$$A.\text{ημ}\, uc + B.\text{συν}\, uc + \Gamma.\text{Ημ}\,\upsilon c + \Delta.\text{Συν}\,\upsilon c =$$
$$= -A.\text{ημ}\, uc + B.\text{συν}\, uc + \Gamma.\text{Ημ}\,\upsilon(-c) + \Delta.\text{Συν}\,\upsilon(-c)$$

ἤ, ἐπειδὴ $\text{Ημ}\,\upsilon(-c) = -\,\text{Ημ}\,\upsilon c$, $\text{Συν}\,\upsilon(-c) = +\,\text{Συν}\,\upsilon c$,

$$2A.\text{ημ}\, uc + 2\Gamma.\text{Ημ}\,\upsilon c = 0.$$

Οἱ παράγοντες ημ uc , Ημ υc δὲν εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ παραμένουν σταθερῶς ἴσοι πρὸς μηδέν, διὰ τυχὸν c. Θὰ πρέπει ἄρα $A = \Gamma = 0$, ὁπότε ἡ ἐξ. (105) ἁπλοποιεῖται εἰς τὴν

$$Y = B.\text{συν}\, uy + \Delta.\text{Συν}\,\upsilon y\,. \qquad (108)$$

Συμφώνως πρὸς τὰς συνοριακὰς συνθήκας (107) θὰ εἶναι τότε διὰ $y = +\, b/2$:

$$\left.\begin{aligned} Y &= B.\text{συν}\left(u\,\frac{b}{2}\right) + \Delta.\text{Συν}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) = 0 \\ \frac{dY}{dy} &= -\,Bu.\text{ημ}\left(u\,\frac{b}{2}\right) + \Delta\upsilon.\text{Ημ}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Τὰς ἰδίας σχέσεις (109) λαμβάνομεν, ἐὰν αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι (107) ἐφαρμοσθοῦν ἐπὶ τῆς συνοριακῆς ἕδρας $y = -\, b/2$. Ἵνα αἱ ὁμογενεῖς ἐξισώσεις (109) ἔχουν λύσιν διάφορον τῆς $B=0$, $\Delta=0$, δέον νὰ μηδενίζεται ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν, ἤτοι

$$\text{συν}\left(u\,\frac{b}{2}\right).\,\upsilon\,.\,\text{Ημ}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) +$$
$$+\, u\,\text{ημ}\left(u\,\frac{b}{2}\right).\,\text{Συν}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) = 0$$

ἢ

$$\text{συν}\left(u\,\frac{b}{2}\right).\text{Συν}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right)\left[\,\upsilon\,.\,\text{Εφ}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) + \right.$$
$$\left. +\, u\,.\,\text{εφ}\left(u\,\frac{b}{2}\right)\right] = 0 \qquad (110)$$

Πρώτη λύσις τῆς ἐξ. (110) εἶναι ἡ $\text{συν}\left(u\,\frac{b}{2}\right) = 0$, ἥτις συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην τῶν ἐξ. (109) ἐπιβάλλει συγχρόνως $\text{Συν}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) = 0$, ἐφ' ὅσον $B,\ \Delta \neq 0$.

Ἄρα θὰ πρέπει τότε

$$\text{Συν}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\,e^{\left(\upsilon\frac{b}{2}\right)} + e^{-\left(\upsilon\frac{b}{2}\right)}\right] = 0,$$

$$\text{ἢ}\ e^{\upsilon b} = -\,1$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\upsilon b = \ln\,(-1) = \pi\,\sqrt{(-1)}\,.$$

Ἡ θεωρηθεῖσα πρώτη λύσις, παρέχουσα φανταστικὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς υ, ἄρα καὶ τῶν μετακινήσεων w, δέον κατὰ ταῦτα νὰ ἀποκλεισθῇ. Παραμένει ἡ λύσις

$$\upsilon\,.\,\text{Εφ}\left(\upsilon\,\frac{b}{2}\right) + u\,.\,\text{εφ}\left(u\,\frac{b}{2}\right) = 0$$

ἥτις ἁπλοποιεῖται εἰς

$$m_1\,\text{Εφ}\,m_1 + m_2\,\text{εφ}\,m_2 = 0$$

ἐὰν εἰσαχθοῦν

$$m_1 = \upsilon\,\frac{b}{2} \quad , \qquad m_2 = u\,\frac{b}{2}\,. \qquad (111)$$

Ἐκ τῶν προσδιοριστικῶν ἐξισώσεων (111) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν 2αν τῶν ἐξ. (106), εὑρίσκομεν

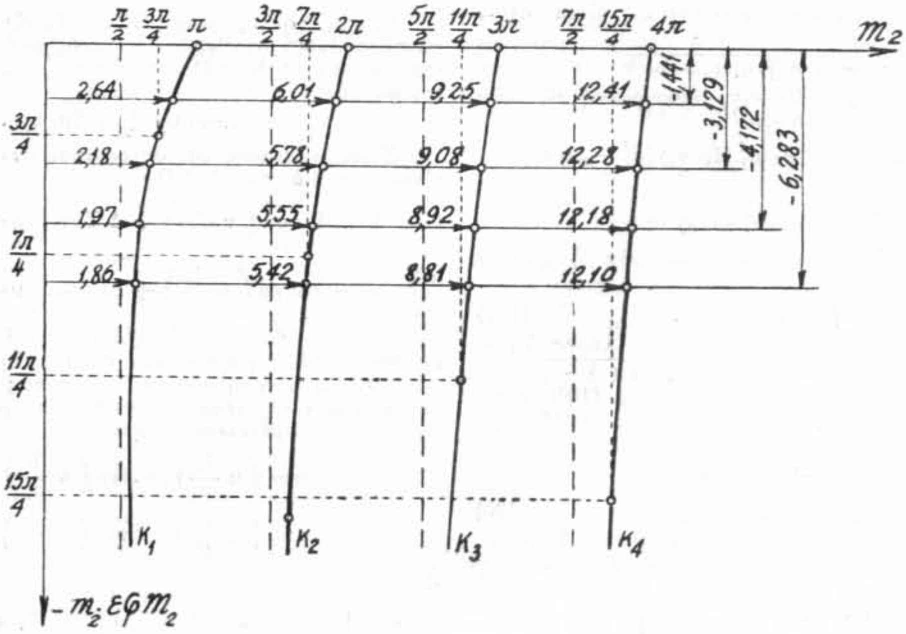
$$m_1^2 - m_2^2 = \frac{b^2}{4}\,(\upsilon^2 - u^2) = \frac{b^2}{4}\,2\alpha_i^2 = \frac{1}{2}\,\frac{i^2\pi^2}{\varrho^2}$$

ὅπου ἀντικατεστήσαμεν τὸ α_i διὰ τοῦ ἴσου του $\dfrac{i\pi}{\alpha}$ (βλ. ἐξ. 97), εἰσηγάγομεν δὲ τὸν λόγον $\varrho = \alpha/b$, ὡς εἰς § 8 ἐπράξαμεν (βλ. ἐξ. 86).

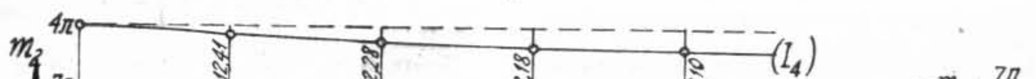
Τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} m_1\, \text{Εφ}\, m_1 + m_2\, \text{εφ}\, m_2 &= 0 \\ m_1^2 - m_2^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2\pi^2}{\varrho^2} \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

παρέχει λύσεις m_1, m_2 ἱκανοποιούσας τὰς συνοριακὰς συνθήκας (109) καὶ τιμὰς συναρτήσεως Y ἐκ τῆς ἐξ. (108),



Σχ. 25



Σχ. 26

παριστώσας τὸν νόμον τῆς ὑβώσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y. Τὸ κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως π_κ, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς λύσεις ταύτας, ὑπολογίζεται κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, εὐχερῶς. Ἐκ τῶν ἐξ. (111), ὁμοῦ μὲ τὴν 1ην τῶν ἐξ. (106), θὰ ἔχωμεν

$$u^2 + v^2 = \frac{4}{b^2}\left(m_1^2 + m_2^2\right) = 2\alpha_i\, \lambda$$

ἤ, ἀντικαθιστῶντες τὰ α_i, λ διὰ τῶν ἴσων των ἐκ τῶν ἐξ. (97), (101) καὶ χρησιμοποιοῦντες τὸν λόγον $\varrho = \alpha/b$

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{ib^2\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi_\kappa}{N}} = \frac{ib\pi}{2\varrho}\sqrt{\frac{\pi_\kappa}{N}}$$

ἤτοι

$$\pi_\kappa = \frac{4N}{\pi^2 b^2} \cdot \frac{\varrho^2}{i^2}\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 \qquad (113)$$

ἐντεῦθεν δὲ τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi_\kappa}{h} = \frac{4N}{\pi^2 b^2 h} \cdot \frac{\varrho^2}{i^2}\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 = \sigma_e \cdot \varphi_i^2 \qquad (114)$$

ἔνθα

$$\varphi_i = \frac{2\varrho}{\pi^2 i}\left(m_1^2 + m_2^2 \right) \qquad (115)$$

καὶ $\sigma_e = N\pi^2/b^2h$ ἡ ἐν § 8 εἰσαχθεῖσα ἰδανικὴ κρίσιμος τάσις λυγισμοῦ (βλ. ἐξ. 90). Διὰ χάλυβα εὑρίσκομεν $\sigma_e = 1898 \left(\frac{h}{b}\right)^2$ (t/cm²), βλ. ἐξ. (91).

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (112) γίνεται γραφικῶς. Πρῶτον κατασκευάζομεν τὰς καμπύλας $-m_2 \cdot \varepsilon\varphi\, m_2$. αἵτινες παρίστανται εἰς Σχ. 25 μὲ κ_1, κ_2, κ_3, κ_4, . . . Συναντοῦν τὸν ἄξονα m_2 εἰς τὰ σημεῖα $m_2 = \pi$, 2π, 3π, 4π, . . . καὶ ἐφάπτονται ἀσυμπτωτικῶς τῶν εὐθειῶν $m_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \ldots.$

Διὰ $m_2 = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \ldots.$

θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :

$m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2 = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}, \ldots$

καὶ διὰ $m_2 = \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{21\pi}{8}, \frac{29\pi}{8}, \ldots\ldots:$

$$\varepsilon\varphi\, m_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}-1} = -2{,}415, \quad \text{ἤτοι}$$

$m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2 = -4{,}743,\ -12{,}331,\ -17{,}690,\ -24{,}427, \ldots$

ἐνῷ διὰ $m_2 = \frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{23\pi}{8}, \frac{31\pi}{8}, \ldots.:$

$$\varepsilon\varphi\, m_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}+1} = -0{,}414 \quad \text{καὶ}$$

$m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2 = -1{,}138,\ -2{,}438,\ -3{,}739,\ -5{,}040, \ldots$

Οἱ θετικοὶ κλάδοι τῶν καμπυλῶν $m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2$ δὲν ἐνδιαφέρουν δι' ὃ καὶ δὲν ἐχαράχθησαν εἰς Σχ. 25.

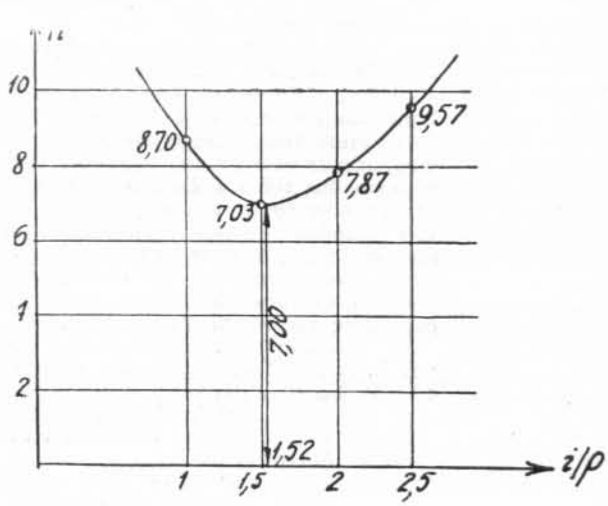
Ἐξ ἄλλου θὰ εἶναι, διὰ $m_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots.\ \infty$: $E\varphi\, m_1 = \frac{e^{m_1} - e^{-m_1}}{e^{m_1} + e^{-m_2}} = 0,\ 0{,}91715,\ 0{,}99627,\ 0{,}99984,\ 0{,}99999, \ldots\ldots, 1$, ἑπομένως αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ $m_1\, E\varphi\, m_1 = -\, m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2$ (βλ. 1ην ἐξ. 112) ἔσονται : 0 , 1,441 , 3,129 , 4,712 , 6,283 , ... ∞ . Εἰς Σχ. 25 φέρομεν τὰς εὐθείας $m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2 = 0,\ -1{,}441,\ -3{,}129,\ -4.712,\ -6.283, \ldots.\ \infty$ καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τούτων μὲ τὰς καμπύλας κ_1, κ_2, κ_3, κ_4, ... Αἱ τετμημέναι m_2 τῶν ἐν λόγῳ σημείων τομῆς παρέχουν τὰς εἰς τὰς τιμὰς $m_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \ldots\ldots \infty$, ἀντιστοιχούσας τιμὰς $m_2 = f(m_1)$, τὰς ἐπαληθευούσας τὴν 1ην τῶν ἐξ. (112). Προκύπτει ἡ ἀκόλουθος ἀντιστοιχία τιμῶν :

$m_1 = 0$	$m_2 = \pi$	2π	3π	4π	....
$\frac{\pi}{2}$	2,64	6.01	9,25	12,41	....
π	2,18	5,78	9,08	12,28	....
$\frac{3\pi}{2}$	1,97	5,55	8,92	12,18	....
2π	1,86	5,42	8,81	12,10	....
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
∞	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	....

Εἰς σύστημα συντεταγμένων m_1, m_2 ἡ συνάρτησις $m_1\, E\varphi\, m_1 + m_2\, \varepsilon\varphi\, m_2 = 0$ παρίσταται κατὰ ταῦτα ὑπὸ ὁμάδος καμπυλῶν (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) . . . . διερχομένων διὰ τῶν σημείων $m_2 = \pi$, 2π, 3π, 4π, . . . τοῦ ἄξονος m_2 καὶ ἐχουσῶν ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας $m_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \ldots.$ (Σχ. 26). Ἐνδιάμεσα σημεῖα τῶν καμπυλῶν (I) προσδιορίζονται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἄνωθι πίνακος.

Εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα συντεταγμένων m_1, m_2 χαράσσομεν ἐπίσης τὰς καμπύλας (II), ἤτοι τὰς $m_1^2 - m_2^2 = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{i}{\varrho}\right)^2$, διὰ διαφόρους τιμὰς $\frac{i}{\varrho} = 1,\ 1.5,\ 2,\ 2.5, \ldots.$ Αἱ καμπύλαι αὗται εἶναι ὑπερβολαὶ μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα $m_1 = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{4\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{2\sqrt{2}}, \ldots.$ τοῦ ἄξονος m_1 καὶ κοινὴν ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν $m_2 = m_1$. Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τομῆς τῶν καμπυλῶν (I) καὶ (II) παρέχουν τὰς λύσεις τοῦ συστήματος (112).

Ἐξ ὅλων ὅμως τῶν σημείων τούτων τομῆς, ἐνδιαφέρουν μόνον τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης (I_1) ἀρχομένης ἀπὸ τοῦ σημείου $m_1 = 0$, $m_2 = \pi$, μετὰ τῶν καμπυλῶν (II), ἤτοι τὰ σημεῖα 1 ((3.12 , 2.19) , 2 (3.93 , 2.04), 3 (4.89 , 1.93), 4 (5.88 , 1.88), ... Πράγματι αἱ συντεταγμέναι m_1, m_2 τῶν σημείων τομῆς 1, 2, 3, 4 . . ., ἱκανοποιοῦσαι τὰς ἐξισώσεις (112) καθιστοῦν συνάμα ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα $(m_1^2 + m_2^2)$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς i/ϱ, ἄρα ἐλαχίστην καὶ τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως σ_κ συμφώνως πρὸς ἐξ (114), (115).



Σχ. 27

(Συνεχίζεται)

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

'Υπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, 'Επιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

Διὰ $i/\varrho=1$ λαμβάνομεν $\varphi_i^2 = \frac{4}{\pi^4}(3{,}12^2 + 2{,}19^2)^2 = 8{,}70$, ἄρα $\sigma_K = 8{,}70\ \sigma_e$, διὰ $i/\varrho = 1{,}5$ εἶναι $\varphi_i^2 = 7{,}03$, καὶ $\sigma_K = 7{,}03\ \sigma_e$, κ.ο.κ.

'Η ἐλαχίστη τιμὴ $\min \sigma_K$ τῆς κρισίμου τάσεως παράγεται διὰ $i/\varrho = 1{,}52$, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς καμπύλης $\varphi_i^2 = \frac{4}{\pi^4}\left(\frac{\varrho}{i}\right)^2 (m_1^2 + m_2^2)^2$, χαρασσομένης διὰ διαφόρους τιμὰς i/ϱ καὶ τὰς ἀντιστοίχους πρὸς ταύτας τιμὰς m_1, m_2 (Σχ. 27). Εὑρίσκομεν οὕτω

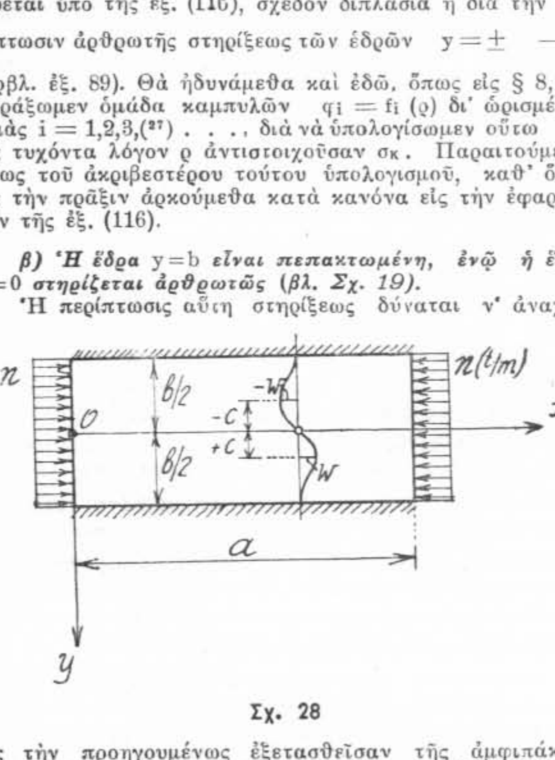
$$\min \sigma_K = 7 . \sigma_e \tag{116}$$

ἐμφανιζομένην διὰ $\varrho=a/b = \frac{i}{1{,}52} \cong 0{,}66\, i\ (t=1,2,3...)$

Διὰ πλάκας θλιβομένας καὶ στηριζομένας ὡς δεικνύεται εἰς Σχ. 24, μὲ λόγον πλευρῶν a/b ἴσον πρὸς 0,66 ἢ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τούτου, ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξ. (116), σχεδὸν διπλασία ἢ διὰ τὴν περίπτωσιν ἀρθρωτῆς στηρίξεως τῶν ἑδρῶν $y = \pm \frac{b}{2}$ (πρβλ. ἐξ. 89). Θὰ ἠδυνάμεθα καὶ ἐδῶ, ὅπως εἰς § 8, νὰ χαράξωμεν ὁμάδα καμπυλῶν $\varphi_i = f_i(\varrho)$ δι' ὡρισμένας τιμὰς $i = 1,2,3,$[27] . . . , διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν οὕτω τὴν εἰς τυχόντα λόγον ϱ ἀντιστοιχοῦσαν σ_K. Παραιτούμεθα ὅμως τοῦ ἀκριβεστέρου τούτου ὑπολογισμοῦ, καθ' ὅσον εἰς τὴν πρᾶξιν ἀρκούμεθα κατὰ κανόνα εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐξ. (116).

β) 'Η ἕδρα $y=b$ εἶναι πεπακτωμένη, ἐνῷ ἡ ἕδρα $y=0$ στηρίζεται ἀρθρωτῶς (βλ. Σχ. 19).

'Η περίπτωσις αὕτη στηρίξεως δύναται ν' ἀναχθῇ



Σχ. 28

εἰς τὴν προηγουμένως ἐξετασθεῖσαν τῆς ἀμφιπάκτου πλακός, ἂν ὡς δυνατὴ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y ἐκλεγῇ, οὐχὶ ἡ συμμετρικὴ τοῦ Σχ. 24, ἀλλ' ἡ ἀντισυμμετρικὴ τοῦ Σχ. 28, καθ' ἣν τὸ βέλος w μηδενίζεται κατὰ μῆκος τοῦ παραλλήλου τῷ ἄξονι x ἄξονος συμμετρίας τῆς πλακός [28]. ***'Η ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις ταύτας ὑπολογισθησομένη κρίσιμος φόρτισις π_K τῆς ἀμφιπάκτου πλακός, εἶναι συγχρόνως ἡ κρίσιμος φόρτισις ὑβώσεως πλακὸς ἀρθρωτῶς στηριζομένης κατὰ τὴν ἕδραν $y=0$, πεπακτωμένης κατὰ τὴν $y=b/2$, πλάτους $b/2$ ἀντὶ b.*** Τὸ σύστημα συντεταγμένων θεωρεῖται καὶ πάλιν μετατεθειμένον κατὰ $b/2$, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄξων x νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν ἄξονα συμμετρίας τῆς ἀμφιπάκτου πλακός, πλάτους b (Σχ. 28). 'Επὶ τυχούσης τομῆς, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις $\pm c$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος x τὰ βέλη ὑβώσεως θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἀντίθετα, ἤτοι $w_{y=c} = - w_{y=-c}$, ἐντεῦθεν δὲ $Y_{y=c} = - Y_{y=-c}$. 'Ο περιορισμὸς οὗτος εἰσαγόμενος εἰς ἐξ. (105) παρέχει

$$2B.\text{συν}\, uc + 2\Delta.\text{Συν}\, vc = 0$$

ἤτοι $B=\Delta=0$. 'Η ἐξ. (105) λαμβάνει οὕτω την μορφὴν

$$Y=A.\text{ημ}\, uy + \Gamma.\text{Ημ}\, vy. \tag{117}$$

Συμφώνως πρὸς Σχ. 28 συνοριακαὶ συνθῆκαι παραμένουν αἱ $Y=0$, $\frac{dY}{dy} = 0$ διὰ $y = \pm \frac{b}{2}$ ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} A.\text{ημ}\left(u\frac{b}{2}\right) + \Gamma.\text{Ημ}\left(v\frac{b}{2}\right) &= 0 \\ Au.\text{συν}\left(u\frac{b}{2}\right) + \Gamma v.\text{Συν}\left(v\frac{b}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

ἵνα δὲ αὗται ἔχουν λύσιν διάφορον τῆς $A=\Gamma=0$, δέον νὰ μηδενίζηται ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν, δηλαδὴ

$$\text{ημ}\left(u\frac{b}{2}\right).\text{Ημ}\left(v\frac{b}{2}\right)\left[v.\text{Σφ}\left(v\frac{b}{2}\right) - u.\text{σφ}\left(u\frac{b}{2}\right)\right] = 0 .$$

'Επειδὴ αἱ λύσεις $\text{ημ}\left(u\frac{b}{2}\right) = 0$, $\text{Ημ}\left(v\frac{b}{2}\right) = 0$ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως παρέχουν τιμὰς Y καὶ ἑπομένως τοῦ βέλους w ἀσυμβιβάστους πρὸς τὴν ἐκλεγεῖσαν τομὴν τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως τοῦ Σχ. 28, (ὅπως ἀποδεικνύεται εὐκόλως κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐκτεθέντα ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς ἀναζητήσεως τῶν λύσεων τῶν ἐξ. (110)) θὰ πρέπει.

$$v.\text{Σφ}\left(v\frac{b}{2}\right) - u.\text{σφ}\left(u\frac{b}{2}\right) = 0$$

ἢ, ἐὰν εἰσαγάγωμεν τοὺς ἀριθμοὺς m_1, m_2 συμφώνως πρὸς ἐξ. (111)

$$m_1\, \text{Σφ}\, m_1 - m_2 . \text{σφ}\, m_2 = 0 \tag{119}$$

Μεταξὺ m_1 καὶ m_2 ἰσχύει, ὡς προηγουμένως, ἡ σχέσις

$$m_1^2 - m_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2 \pi^2}{\varrho^2} \tag{119'}$$

αἱ δὲ λύσεις m_1, m_2 τοῦ συστήματος τῶν ἐξ. (119), (119') ἱκανοποιοῦσαι τὰς συνοριακὰς συνθήκας (118), παρέχουν τὰς τιμὰς Y ἐκ τῆς ἐξ. (117) καὶ ἑπομένως τὸν νόμον τῆς ὑβώσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y. Αἱ τιμαὶ τοῦ κρισίμου φορτίου π_K καὶ τῆς κρισίμου τάσεως ὑβώσεως σ_K δίδονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν τύπων (113), (114), (115).

Πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος τῶν ἐξ. (119), (119'), κατασκευάζομεν πρῶτον τοὺς θετικοὺς κλάδους τῶν καμπυλῶν $m_2 . \text{σφ}\, m_2$ (Σχ. 29), οὓς παριστῶμεν K_1, K_2, K_3 . . . Συναντοῦν τὸν ἄξονα m_2 εἰς τὰ σημεῖα μὲ τετμημένας $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ . . . . καὶ ἐφάπτονται ἀ-

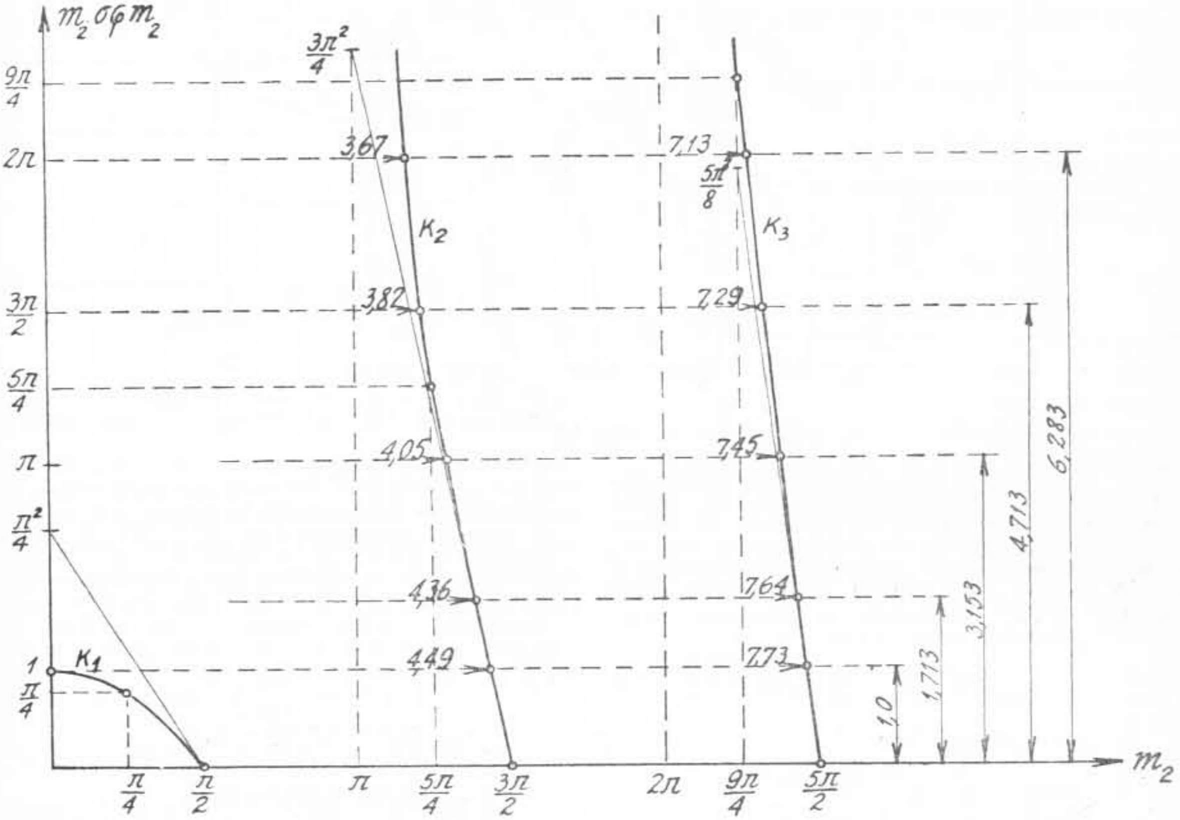
(27) Λ. χ. Διὰ $i = 1$ θὰ χαράξωμεν εἰς Σχ. 26 τὰς ὑπερβολὰς $m_1^2 - m_2^2 = \pi^2 / 2\varrho^2$ διὰ διαφόρους τιμὰς $\varrho = 0{,}5$, 1, 2, 3 καὶ θὰ προσδιορίσωμεν τὰς συντεταγμένας m_1, m_2 τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐν λόγῳ ὑπερβολῶν μὲ τὴν καμπύλην (I_1). Αἱ συντεταγμέναι αὗται, εἰσαγόμεναι εἰς τὴν ἐξ. (115) παρέχουν τὰς τιμὰς

$$\varphi_1 = \frac{2\varrho}{\pi^2}(m_1^2 + m_2^2) = f_1(\varrho)$$

'Ομοίως θὰ χαραχθοῦν αἱ καμπύλαι $\varphi_2 = f_2(\varrho)$, $\varphi_3 = f_3(\varrho)$, ... διὰ $i = 2, 3$ . . . .

(28) F. Hartmann : Knickung, Kippung, Beulung, "Εκδ. F. Deuticke, Leipzig u. Wien, 1937, σελ. 135.

συμπτωτικῶς τῶν εὐθειῶν $m_2 = \pi, 2\pi, \ldots$ Διὰ $m_2 = 0$ γίνεται: $m_2 \, \sigma\varphi \, m_2 = 1$, καθ' ὅσον ὅρ. $\left(\frac{m_2}{\varepsilon\varphi m_2}\right) =$ $=$ ὅρ. $\left(\sigma\upsilon\nu^2 m_2\right) = 1$ (29). Αἱ γεωμετρικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπυλῶν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \ldots$ εἰς τὰ σημεῖα συναντήσεώς των μὲ τὸν ἄξονα m_2, ἔχουν κλίσιν $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \ldots$ ἐπειδὴ $\frac{d}{dm_2}(m_2 \, \sigma\varphi \, m_2) =$ $= \sigma\varphi \, m_2 - \frac{m_2}{\eta\mu^2 m_2}$. Διὰ $m_2 = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \ldots$ $= m_2 \, \sigma\varphi \, m_2$ (βλ. ἐξ. 119) γίνονται: 1, 1.713, 3.153, 4.713, 6.283 . . . . ∞ (30). Εἰς Σχ. 29 φέρομεν τὰς εὐθείας $m_2 \, \sigma\varphi \, m_2 = 1$, 1.713, 3.153, 4,713, 6,283 . . . . ∞ καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα τομῆς τούτων μὲ τὰς καμπύλας $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \ldots\ldots$ Αἱ τετμημέναι τῶν ἐν λόγῳ σημείων τομῆς δίδουν τὰς εἰς τὰς τιμὰς $m_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \ldots \infty$, ἀντιστοιχούσας τιμὰς $m_2 = f(m_1)$, τὰς ἐπαληθευούσας τὴν ἐξ. (119). Προκύπτει ἡ ἀκόλουθος ἀντιστοιχία τιμῶν:



Σχ. 29

θὰ εἶναι: $m_2 \, \sigma\varphi \, m_2 = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots$, ἐνῷ διὰ $m_2 = \frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{17\pi}{8} \ldots$ εἶναι: $\sigma\varphi \, m_2 = 1 + \sqrt{2}$ καὶ $m_2 \, \sigma\varphi \, m_2 = 0.9487$, 8.531, 16.1159 . . , τέλος διὰ $m_2 = \frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{19\pi}{8} \ldots\ldots$ εἶναι: $\sigma\varphi \, m_2 =$ $= \sqrt{2} - 1$ καὶ $m_2 \, \sigma\varphi \, m_2 = 0.4877$, 1,7885, 3,088, . . .

Οἱ ἀρνητικοὶ κλάδοι τῶν καμπυλῶν $m_2 . \sigma\varphi \, m_2$ δὲν ἐνδιαφέρουν, δι' ὃ καὶ περιττεύει ἡ χάραξις αὐτῶν.

'Εξ' ἄλλου ἔχομεν, διὰ $m_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \ldots \infty$:

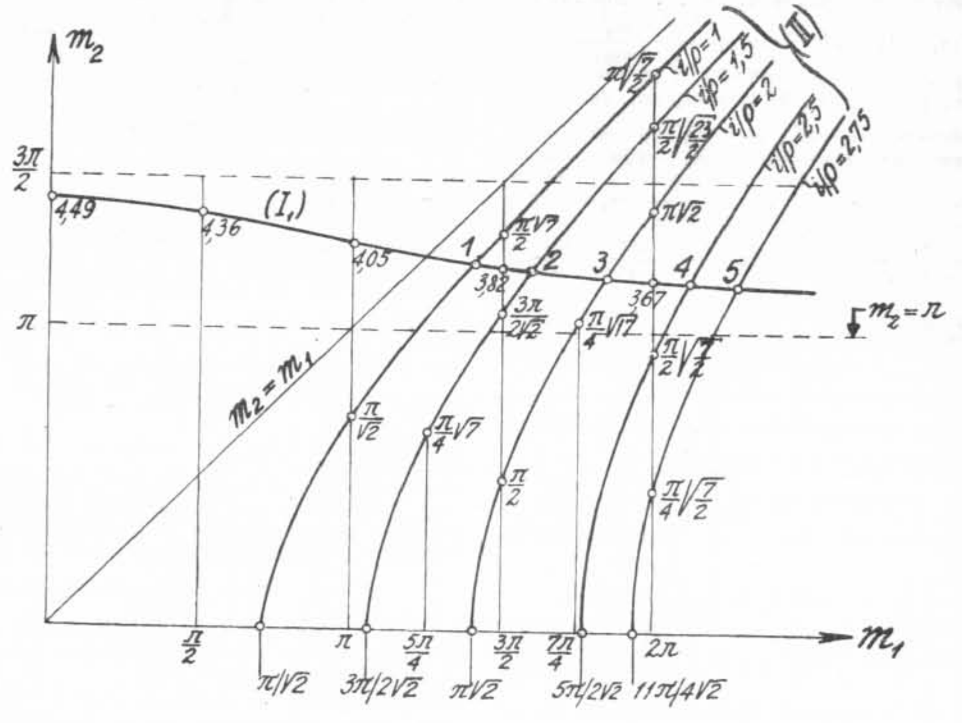
$\Sigma\varphi \, m_1 = \infty$, 1/0.91715, 1/0.99627, 1/0.99984, 1/0.99999 . . . . 1, ἑπομένως αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ $m_1 \Sigma\varphi \, m_1 =$

$m_1 =$ 0	$m_2 =$ 4,49	7,73	. . .
$\pi/2$	4,36	7,64	. . .
π	4,05	7,45	. . .
$3\pi/2$	3,82	7,29	. . .
2π	3,67	7,13	. . .
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
∞	π	2π	. . .

Εἰς σύστημα συντεταγμένων m_1, m_2 ἡ συνάρτησις (119) παρίσταται κατὰ ταῦτα ὑπὸ ὁμάδος καμπυλῶν, ἐξ ὧν ἐνδιαφέρει μόνον ἡ (I_1) μὲ τὰς μικροτέρας τεταγμένας m_2 τῆς 1ης στήλης τοῦ ἄνωθι πίνακος (Σχ. 30). Ἡ καμπύλη αὕτη (I_1) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $m_1 = 0$, $m_2 = 4{,}49$ καὶ ἔχει ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν $m_2 = \pi$. Εἰς τὸ σύστημα συντεταγμένων m_1, m_2 χαράσσομεν ἐπίσης τὰς ὑπερβολὰς $m_1^2 - m_2^2 = \frac{1}{2} \frac{i^2 \pi^2}{\varrho^2}$ διὰ διαφόρους

(29) Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου $m_2 / \varepsilon\varphi \, m_2$ διὰ $m_2 \rightarrow 0$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου τῶν παραγώγων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.

(30) Συμφώνως πρὸς ὑποσημ. (29) θὰ ἔχωμεν διὰ $m_1 \rightarrow 0$, ὅρ. $(m_1 \Sigma\varphi m_1) =$ ὅρ $\left(\frac{m_1}{E\varphi m_1}\right) =$ ὅρ. $\Sigma\upsilon\nu^2 m_1 = 1$



Σχ. 30

τιμὰς i/ϱ = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.75..., δηλαδὴ τὰς αὐτὰς καμπύλας (II) τοῦ Σχ. (26) καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν καμπυλῶν (II) μετὰ τῆς (I_1), ἤτοι τὰ σημεῖα 1, 2, 3, 4, 5 . . . τοῦ Σχ. 30. Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τούτων εὑρίσκονται κατὰ σειρὰν ἴσαι πρὸς 1 (4.44, 3.85), 2 (5.04, 3.77), 3 (5.81, 3.69), 4 (6.65, 3.67), 5 (7.15, 3.63) . . . . . , καθιστοῦν δὲ ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα ($m_1^2 + m_2^2$) δι' ὅλας τὰς τιμὰς i/ϱ, ἄρα ἐλαχίστην καὶ τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως σ_κ συμφώνως πρὸς ἐξ. (114) καὶ (115). Αἱ εἰς τὰς ἄνω τιμὰς i/ϱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ φ_i^2 δίδονται ἄρα, συμφώνως πρὸς ἐξ. (115), ἐκ τοῦ κάτωθι πίνακος

$$i/\varrho = 1 \quad : \quad \varphi_i^2 = \frac{4}{\pi^4}\left(\frac{\varrho}{i}\right)^2\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 = \frac{4}{\pi^4}(4{,}44^2+3{,}85^2)^2 = 48{,}65$$

$$1{,}5 : \quad \frac{4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{1{,}5^2}(5{,}04^2+3{,}77^2)^2 = 28{,}45$$

$$2 : \quad \frac{4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{4}(5{,}81^2+3{,}69^2)^2 = 22{,}95$$

$$2{,}5 : \quad \frac{4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{2{,}5^2}(6{,}65^2+3{,}67^2)^2 = 21{,}75$$

$$2{,}75 : \quad \frac{4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{2{,}75^2}(7{,}15^2+3{,}63^2)^2 = 22{,}30$$

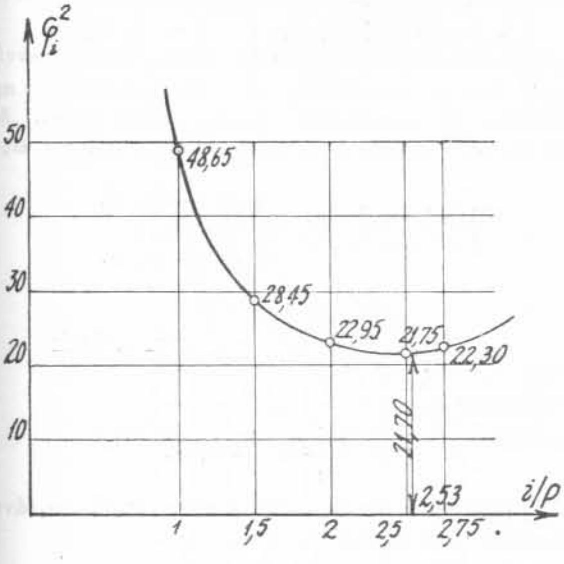
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

Εἰς τὸ σύστημα συντεταγμένων i/ϱ, φ_i^2 ἡ ἀντιστοιχία τῶν ἀνωτέρω τιμῶν παρίσταται ὑπὸ τῆς καμπύλης τοῦ Σχ. 31, παρουσιαζούσης ἐλάχιστον διὰ i/ϱ = 2,53 ἴσον πρὸς min φ_i^2 = **21,70**.

Ὁ ἀνωτέρω ὑπολογισμός, ἀναφερόμενος εἰς τὸ Σχ. 28, ἰσχύει ὡς εἴδομεν διὰ πλάκα πλάτους b/2 ἀρθρωτῶς στηριζομένην κατὰ τὴν ἕδραν y = 0, πεπακτωμένην κατὰ τὴν ἕδραν y = b/2. Διὰ πλάτος πλακὸς b (ἀντὶ b/2) τὸ min φ_i^2 παράγεται διὰ $i\,\dfrac{2b}{\alpha} = 2{,}53$, ἤτοι $i/\varrho = \dfrac{2{,}53}{2} = \mathbf{1{,}265}$, ἴσον πρὸς min $\varphi_i^2 = \dfrac{21{,}70}{4} = \mathbf{5{,}425}$, καθ' ὅσον διὰ τὸ πλάτος b θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς ἐξ. (114)

$$\min \sigma_\kappa = 21{,}70\,\frac{N\pi^2}{(2b)^2 h} = \frac{21{,}70}{4}\cdot\frac{N\pi^2}{b^2 h} = 5{,}425\,\sigma_e\,. \qquad (120)$$

Ἡ min σ_κ δημιουργεῖται διὰ $\varrho = a/b = i/1{,}265 \cong 0{,}79\,i$ (i = 1, 2, 3 . . .). Διὰ λόγον πλευρῶν a/b ἴσον πρὸς 0,79 ἢ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τούτου ἡ ἐλαχίστη κρίσιμος τάσις ὑβώσεως δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξ. (120), ἴση περίπου πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν ἐλαχίστων κρισίμων τάσεων 4 σ_e τῆς γύρωθεν ἀρθρωτῶς στηριζομένης πλακὸς (βλ. ἐξ. 89) καὶ 7 σ_e τῆς καθ' ὅλον τὸ περίγραμμα πεπακτωμένης πλακὸς (βλ. ἐξ. 116). Συνήθως ἀρκούμεθα εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐξ. (120), ἔστω καὶ ὅταν $\varrho \neq 0{,}79\, i$, καίτοι δὲν παρουσιάζει δυσχέρειαν ἡ εὕρεσις τῆς εἰς τυχόντα



Σχ. 31

λόγον ϱ ἀντιστοιχούσης σκ, καθ' ὃν τρόπον ὑπεδείχθη διὰ τὴν πεπακτωμένην γύρωθεν πλάκα (βλ. ὑποσημ. (27)).

γ) ***Ἡ ἕδρα $y=0$ στηρίζεται ἀρθρωτῶς, ἐνῷ ἡ ἕδρα $y=b$ εἶναι ἐλευθέρα στηρίξεως*** [31] ***(Σχ. 32).***

Τὸ βέλος τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως θὰ δίδεται, συμφώνως πρὸς ἐξ. (98), (105), ὑπὸ τῆς γενικῆς σχέσεως

$$w = \eta\mu\alpha_i\, x\,(A\eta\mu u y + B\sigma\upsilon\nu u y + \Gamma.H\mu\upsilon y + \Delta.\Sigma\upsilon\nu\upsilon y).$$

Ἐπὶ τῆς συνοριακῆς ἀρθρωτῆς ἕδρας $y=0$ ἰσχύουν αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι (62') τοῦ Navier, ἤτοι $w=0$, $\Delta w=0$. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν συνθηκῶν τούτων λαμβάνομεν $0=\eta\mu\alpha_i\, x\,(B+\Delta)$, ἤτοι $B=-\Delta$, ἐνῷ ἐκ τῆς 2ας, μὲ

$$\Delta w = \eta\mu\alpha_i\, x \left(\frac{d^2Y}{dy^2} - \alpha_i^2\, Y\right)$$

$$\text{ἢ } \Delta w = \eta\mu\alpha_i\, x\Big[-A\eta\mu u y.\left(u^2+\alpha_i^2\right) -$$

$$- B\sigma\upsilon\nu u y.\left(u^2+\alpha_i^2\right) + \Gamma.\eta\mu\upsilon y\left(\upsilon^2-\alpha_i^2\right) +$$

$$+ \Delta.\Sigma\upsilon\nu\upsilon y\left(\upsilon^2-\alpha_i^2\right)\Big]$$

καὶ ἀφοῦ εἰσαγάγωμεν $y=0$, $\Delta w=0$, $B=-\Delta$, λαμβάνομεν

$$0 = \eta\mu\alpha_i\, x\,.\,B\left(u^2+\upsilon^2\right).$$

Ἀποκλειομένης τῆς λύσεως $\eta\mu\alpha_i\, x=0$ ὡς καὶ τῆς $u^2+\upsilon^2=0$, διότι συμφώνως πρὸς ἐξ. (106) εἶναι $u^2+\upsilon^2=2\alpha_i\lambda \neq 0$, ἀπομένει ἡ λύσις $B=0$ ἄρα καὶ $\Delta=0$.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ βέλους w ἁπλοποιεῖται οὕτω εἰς

$$w = \eta\mu\alpha_i\, x\,(A.\eta\mu u y + \Gamma.H\mu\upsilon y). \qquad (121)$$

Ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἕδρας $y=b$ ἰσχύουν αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι (61), ἤτοι ἐν προκειμένῳ αἱ

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0,\quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2.\partial y}\right)_{y=b} = 0$$

αἵτινες, δυνάμει τῆς ἐξ. (121) καὶ ἀποκλειομένης τῆς λύσεως $\eta\mu\alpha_i\, x=0$, λαμβάνουν κατόπιν ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ τὴν μορφὴν

$$A\left(u^2+\mu\alpha_i^2\right)\eta\mu u b - \Gamma.\left(\upsilon^2-\mu\alpha_i^2\right)H\mu\upsilon b = 0$$

$$Au\left[u^2+(2-\mu)\alpha_i^2\right]\sigma\upsilon\nu u b - \Gamma\upsilon\left[\upsilon^2-(2-\mu)\alpha_i^2\right]\Sigma\upsilon\nu\upsilon b = 0$$

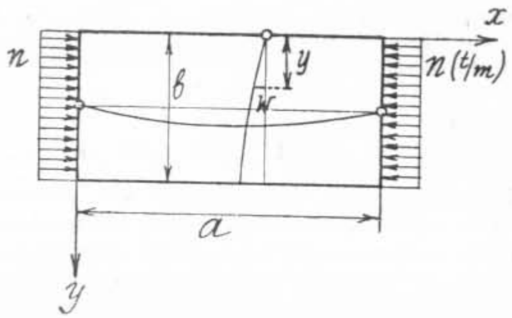
ἐπειδὴ δὲ συμφώνως πρὸς τὴν 2αν ἐξ. (106) εἶναι

$$u^2+\mu\alpha_i^2 = \upsilon^2 - 2\alpha_i^2 + \mu\alpha_i^2 = \upsilon^2 - (2-\mu)\,\alpha_i^2\ ,$$

$$\upsilon^2-\mu\alpha_i^2 = u^2 + 2\alpha_i^2 - \mu\alpha_i^2 = u^2 + (2-\mu)\,\alpha_i^2$$

αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι διατυποῦνται ἁπλούστερον

$$\left.\begin{aligned} &A\left(u^2+\mu\alpha_i^2\right)\eta\mu u b - \Gamma\left(\upsilon^2-\mu\alpha_i^2\right)H\mu\upsilon b = 0\\ &Au\left(\upsilon^2-\mu\alpha_i^2\right)\sigma\upsilon\nu u b - \Gamma\upsilon\left(u^2+\mu\alpha_i^2\right)\Sigma\upsilon\nu\upsilon b = 0\end{aligned}\right\} \qquad (122)$$



Σχ. 32

Ὁ μηδενισμὸς τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν A, Γ παρέχει τὴν συνθήκην ὑβώσεως

$$\upsilon\left(u^2+\mu\alpha_i^2\right)^2 \eta\mu u b\,.\,\Sigma\upsilon\nu\upsilon b =$$

$$= u\left(\upsilon^2-\mu\alpha_i^2\right)^2 \sigma\upsilon\nu u b\,.\,H\mu\upsilon b$$

ἢ

$$\left(\frac{\upsilon^2-\mu\alpha_i^2}{u^2+\mu\alpha_i^2}\right)^2 = \frac{\upsilon}{u}\cdot\frac{\varepsilon\varphi u b}{E\varphi\upsilon b} \qquad (123)$$

ἔνθα αἱ μεταβληταὶ u, υ, αἱ συνδέονται ὑπὸ τῶν ἐξ. (106). Εἶναι σκόπιμον, εἰς ἐξ. (123) νὰ ἀπαλείψωμεν ἐκ τῶν τριῶν μεταβλητῶν τὴν μίαν, ὡς καὶ τὸ πλάτος b τῆς πλακός. Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν τὰς νέας δύο μεταβλητάς,

$$m_1 = \alpha_i\, b\ ,\ m_2 = \lambda.b \qquad (123')$$

ὁπότε αἱ ἐξ. (106) γίνονται

$$\left.\begin{aligned} u^2+\upsilon^2 &= 2\,\frac{m_1 m_2}{b^2}\\ \upsilon^2-u^2 &= 2\,\frac{m_1^2}{b^2}\end{aligned}\right|$$

ἐκ τούτων δὲ λαμβάνομεν, δι' ἐπιλύσεως πρὸς u^2, υ^2

$$u^2 = \frac{m_1}{b^2}\,(m_2-m_1)\ ,\ \upsilon^2 = \frac{m_1}{b^2}\,(m_2+m_1)$$

καὶ

$$u = \frac{1}{b}\sqrt{m_1(m_2-m_1)}\ ,\ \upsilon = \frac{1}{b}\sqrt{m_1(m_2+m_1)}\,.$$

[31] F. Hartmann: Knickung, Kippung, Beulung, 1937, σελ. 166.

Περαιτέρω θὰ εἶναι τότε

$$\frac{\upsilon^2-\mu\alpha_i^2}{u^2+\mu\alpha_i^2}=\frac{m_1(m_2+m_1)-\mu\, m_1^2}{m_1(m_2-m_1)+\mu\, m_1^2}=\frac{m_2+(1-\mu)m_1}{m_2-(1-\mu)m_1}$$

$$\frac{\upsilon}{u}=\sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}} \text{ καὶ } \frac{\varepsilon\varphi u b}{E\varphi\upsilon b}=\frac{\varepsilon\varphi\sqrt{m_1(m_2-m_1)}}{E\varphi\sqrt{m_1(m_2+m_1)}}$$

ἡ δὲ συνθήκη (123) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\left(\frac{m_2+(1-\mu)\,m_1}{m_2-(1-\mu)\,m_1}\right)^2=$$

$$=\sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\sqrt{m_1(m_2-m_1)}}{E\varphi\sqrt{m_1(m_2+m_1)}}\quad . \quad (124)$$

Εἰσάγομεν εἰς τὴν ἐξ. (124) τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ μ, λ. χ. διὰ χάλυβα $\mu=0,3$, καὶ ὑπολογίζομεν διὰ διαφόρους τιμὰς m_1 τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς m_2 μέσῳ διαδοχικῶν δοκιμῶν. Οὕτω εὑρίσκομεν διὰ χάλυβα τὴν κάτωθι ἀντιστοιχίαν τιμῶν

$m_1 =$	6	3	2	1	0,5
$m_2 =$	6,29	3,604	2,848	2,272	2,10 .

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐλαττουμένου τοῦ ἀριθμοῦ m_1 ἐλαττοῦται καὶ ὁ m_2. Ἐνδιαφέρει ὅμως νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ $\min m_2 = b.\min\lambda$, καθ' ὅσον εἰς ταύτην θὰ ἀντιστοιχῇ, συμφώνως πρὸς ἐξ. (101), ἡ ἐλαχίστη τιμὴ $\min\sigma_K$ τῆς τάσεως ὑβώσεως. Ἐκ τῆς ἀλληλουχίας τῶν τιμῶν m_1, m_2 τοῦ ἄνω πίνακος συνάγομεν εὐκόλως τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ $\min m_2$ παράγεται διὰ πολὺ μικρὰς τιμὰς m_1, ἐγγιζούσας τὸ μηδέν. Μὲ $\mu=0,3$ καὶ τιμὰς m_1 πολὺ μικράς, τεινούσας πρὸς 0, τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς ἐξ. (124) γράφεται

$$\left(\frac{m_2+0,7\,m_1}{m_2-0,7\,m_1}\right)^2=\frac{m_2^2+0,49\,m_1^2+1,4\,m_1\,m_2}{m_2^2+0,49\,m_1^2-1,4\,m_1\,m_2}\cong$$

$$\cong\frac{m_2^2+1,4\,m_1\,m_2}{m_2^2-1,4\,m_1\,m_2}=\frac{1+1,4\,m_1/m_2}{1-1,4\,m_1/m_2}$$

ὅπου οἱ ὅροι μὲ παράγοντα m_1^2 παρελείφθησαν ὡς πολὺ μικροὶ ἔναντι τῶν ὅρων m_2^2 καὶ τῶν ἐχόντων συντελεστὴν $m_1\,m_2$. Ἐξ ἄλλου εἶναι γενικῶς διὰ γωνίας

$$\vartheta<\frac{\pi}{2}:\ \varepsilon\varphi\vartheta=\vartheta+\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{2\vartheta^5}{3.5}+\frac{17\vartheta^7}{3^2.5.7}+\ .\ .\ .$$

καὶ ἑπομένως διὰ πολὺ μικρὰς γωνίας ϑ: $\varepsilon\varphi\vartheta\cong\vartheta+\frac{\vartheta^3}{3}=\vartheta\left(1+\frac{\vartheta^2}{3}\right)$. Ὁμοίως $E\varphi\vartheta\cong\vartheta-\frac{\vartheta^3}{3}=\vartheta\left(1-\frac{\vartheta^2}{3}\right)$. Ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους διὰ πολὺ μικρὰς τιμὰς m_1 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\frac{\varepsilon\varphi\sqrt{m_1(m_2-m_1)}}{E\varphi\sqrt{m_1(m_2+m_1)}}\cong$$

$$\cong\sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}\cdot\frac{\left[1+\frac{1}{3}\,m_1(m_2-m_1)\right]}{\left[1-\frac{1}{3}\,m_1(m_2+m_1)\right]}$$

ὁπότε τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἐξ. (124) γίνεται ἴσον πρὸς

$$\frac{\left[1+\frac{1}{3}\,m_1(m_2-m_1)\right]}{\left[1-\frac{1}{3}\,m_1(m_2+m_1)\right]}\cong\frac{1+\frac{1}{3}\,m_1\,m_2}{1-\frac{1}{3}\,m_1\,m_2}$$

ἔνθα οἱ ὅροι μὲ συντελεστὴν m_1^2 παρελείφθησαν πρὸ τῶν ὅρων μὲ συντελεστὴν $m_1\,m_2$. Κατὰ ταῦτα, διὰ τιμὰς m_1 πολὺ μικρὰς ἡ ἐξ. (124) μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{1+1,4\,m_1/m_2}{1-1,4\,m_1/m_2}=\frac{1+\frac{1}{3}\,m_1\,m_2}{1-\frac{1}{3}\,m_1\,m_2}$$

ἢ

$$1,4\,\frac{m_1}{m_2}-\frac{m_1 m_2}{3}=-1,4\,\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_1 m_2}{3}$$

καὶ ἐντεῦθεν εἰς τὴν

$$2,8\,\frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{3}\,m_1\,m_2$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν εἰς πολὺ μικρὰς τιμὰς m_1 ἀντιστοιχοῦσαν $\min m_2^2=4,20$, ἤτοι

$$\min m_2=\sqrt{4,20}=2,049\ . \qquad (125)$$

Πολὺ μικραὶ τιμαὶ m_1 σημαίνουν, συμφώνως πρὸς ἐξ. (123'), τιμὰς αἱ $b=i\frac{\pi}{\alpha}b=\frac{i\pi}{\varrho}$ ὡσαύτως πολὺ μικράς, ἄρα τιμὰς τοῦ λόγου $\varrho=a/b$ πολὺ μεγάλας. Ἡ $\min m_2=2,049$ παράγεται ἑπομένως εἰς ἐλάσματα λίαν ἐπιμήκη.

Ἐὰν m_1, m_2 παριστοῦν συζυγεῖς τιμὰς τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἱκανοποιούσας δηλαδὴ τὴν συνθήκην (124), ἡ εἰς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν $m_1=\frac{i\pi}{\varrho}$ ($i=1, 2, 3\ .\ .\ .$) ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ κρισίμου φορτίου ὑβώσεως ὑπολογίζεται εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξ. (101) ἴση πρὸς

$$n_K=\lambda^2 N=\frac{m_2^2}{b^2}\,N$$

ἐντεῦθεν δὲ ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως

$$\sigma_K=\frac{n_K}{h}=m_2^2\,\frac{N}{b^2 h}=\frac{m_2^2}{\pi^2}\cdot\frac{N\pi^2}{b^2 h}=\frac{m_2^2}{\pi^2}\cdot\sigma_e$$

$$\text{ἢ}\qquad \sigma_K=\varphi_i^2\,\sigma_e \qquad (126)$$

ἔνθα

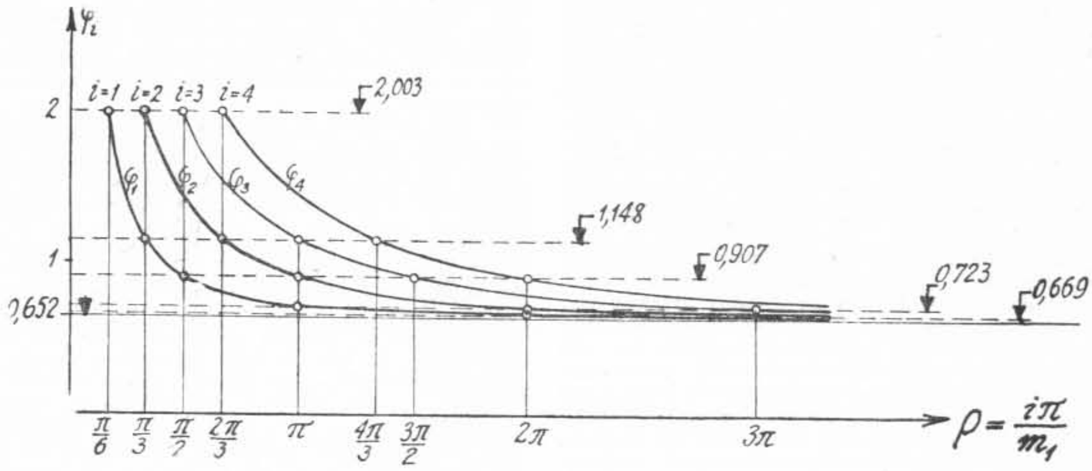
$$\varphi_i=\frac{m_2}{\pi}\ . \qquad (127)$$

Ἡ ἐλαχίστη κρίσιμος τάσις ὑβώσεως ὑπολογίζεται ἄρα ἐκ τῆς ἐξ. (126)

$$\min\sigma_K=\sigma_e\,.\,\min\varphi_i^2=\frac{4,2}{\pi^2}\,\sigma_e=0,426\,.\,\sigma_e \qquad (128)$$

παραγομένη, ὡς εἴδομεν, διὰ $m_1=0$ ἢ $\varrho=\infty$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς κρισίμου τάσεως ὑβώσεως διὰ τυχόντα λόγον $\varrho=a/b$ κατασκευάζομεν τὰς καμπύλας $\varphi_i=f_i(\varrho)$ διὰ διαφόρους τιμὰς i (Σχ. 33). Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὰς εἰς τὰς τιμὰς $m_1 = \frac{i\pi}{\varrho} = 6, 3, 2, 1, 0.5, \ldots 0$ ἢ $\varrho = \frac{i\pi}{m_1} = \frac{i\pi}{6}, \frac{i\pi}{3}, \frac{i\pi}{2}, i\pi, 2i\pi \ldots \infty$ ἀντιστοιχούσας τιμὰς $\varphi_i = \frac{m_2}{\pi}$, διὰ $i = 1, 2, 3, 4 \ldots$ καὶ προσδιορίζομεν ἐξ αὐτοῦ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῶν καμπυλῶν $\varphi_i = f_i(\varrho)$ διὰ διαφόρους τιμὰς i. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι φ_i τῶν σημείων τῶν καμπυλῶν τούτων δίδονται ὑπὸ τῆς 3ης στήλης τοῦ ἄνω πίνακος καὶ παραμένουν ἀνεξάρτητοι τοῦ i, ἐνῷ αἱ τετμημέναι ϱ, παρεχόμεναι ὑπὸ τῆς 2ας στήλης. μεταβάλ-



Σχ. 33

Καταρτίζομεν δηλαδὴ τὸν κάτωθι πίνακα

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{i\pi}{\varrho} = 6\,, & \varrho &= \frac{i\pi}{m_1} = \frac{i\pi}{6}\,, & \varphi_i &= \frac{m_2}{\pi} = \frac{6{,}29}{\pi} = 2{,}003\\
&= 3\,, & &= \frac{i\pi}{3}\,, & &= \frac{3{,}604}{\pi} = 1{,}148\\
&= 2\,, & &= \frac{i\pi}{2}\,, & &= \frac{2{,}848}{\pi} = 0{,}907\\
&= 1\,, & &= i\pi\,, & &= \frac{2{,}272}{\pi} = 0{,}723\\
&= 0{,}5\,, & &= 2i\pi\,, & &= \frac{2{,}10}{\pi} = 0{,}669\\
&\vdots & &\vdots & &\vdots\\
&= 0\,, & &= \infty\,, & &= \frac{2{,}049}{\pi} = 0{,}652
\end{aligned}
$$

λονται συναρτήσει τοῦ i. Διὰ $i = 1$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τεταγμένας τῆς 3ης στήλης κατὰ σειρὰν αἱ τετμημέναι $\varrho = \pi/6, \pi/3, \pi/2, \pi, 2\pi \ldots \infty$, διὰ $i = 2$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς αὐτὰς τεταγμένας αἱ τετμημέναι $\varrho = \pi/3, 2\pi/3, \pi, 2\pi, 4\pi \ldots \infty$, διὰ $i = 3$ αἱ τετμημέναι $\varrho = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 3\pi, 6\pi \ldots \infty$, κ.ο.κ. Προκύπτουν αἱ εἰς Σχ. 33 χαραχθεῖσαι καμπύλαι $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots$ ἐφαπτόμεναι ἅπασαι ἀσυμπτωτικῶς τῆς εὐθείας $\varphi_i = \frac{2{,}049}{\pi} = 0{,}652$, ἐξ ὧν ἐλαχίστας τεταγμένας δι' οἱανδήποτε τιμὴν ϱ παρέχει ἡ καμπύλη φ_1 διὰ $i = 1$. Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λόγου ϱ ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως $\sigma_\varkappa$ παράγεται διὰ $i=1$ καὶ ***ἡ πλὰξ ὑβοῦται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις σχηματίζουσα ἕνα μοναδικὸν ὕβον*** (πρβλ. ἐξ. 98), ὡς σχηματικῶς δεικνύει τὸ Σχ. 32.

(Συνεχίζεται)

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

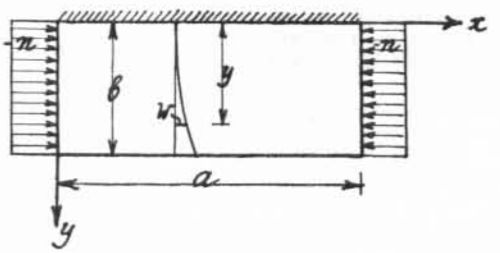
δ) Ἡ ἕδρα y=0 εἶναι πεπακτωμένη, ἡ ἕδρα y=b εἶναι ἐλευθέρα (Σχ. 34).

Ἐπὶ τῆς συνοριακῆς πεπακτωμένης ἕδρας y=0 ἰσχύουν αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι (107), ἤ, λόγῳ τῆς ἐξ. (98), αἱ $Y=0, \frac{dY}{dy}=0$. Ἐκ τῆς 1ης τῶν συνθηκῶν τούτων λαμβάνομεν, ὡς εἰς τὴν προηγουμένως ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν, $B=-\Delta$, ἐνῷ ἐκ τῆς 2ας, μὲ

$$\frac{dY}{dy} = A u \sigma\upsilon\nu u y - B \upsilon \eta\mu\upsilon y + \Gamma \upsilon\, \Sigma\upsilon\nu \upsilon y - B \upsilon\, H\mu \upsilon y$$

εὑρίσκομεν $\Gamma = -\frac{u}{\upsilon} A$. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ βέλους ὑβώσεως γίνεται ἑπομένως

$$w = \eta\mu a_i x \left(A \eta\mu u y + B \sigma\upsilon\nu u y - A \frac{u}{\upsilon} H\mu \upsilon y - B \Sigma\upsilon\nu \upsilon y\right).$$



Σχ. 34

Ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας συνοριακῆς ἕδρας $y=b$ ἰσχύουν αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι τῆς προηγουμένης περιπτώσεως (γ). Ἡ πρώτη τῶν συνθηκῶν τούτων, ἤτοι ἡ $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0$, κατόπιν ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ γίνεται

$$A\left(u^2 + \mu a_i^2\right) \eta\mu u b + B\left(u^2 + \mu a_i^2\right) \sigma\upsilon\nu u b + A \frac{u}{\upsilon}\left(\upsilon^2 - \mu a_i^2\right) H\mu \upsilon b + B\left(\upsilon^2 - \mu a_i^2\right) \Sigma\upsilon\nu \upsilon b = 0$$

ἡ δὲ δευτέρα, ἤτοι ἡ $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=b} = 0$, μετασχηματίζεται εἰς $A u\left[u^2 + (2-\mu) a_i^2\right] \sigma\upsilon\nu u b - B u\left[u^2 + (2-\mu) a_i^2\right] \eta\mu u b + A u\left[\upsilon^2 - (2-\mu) a_i^2\right] \Sigma\upsilon\nu \upsilon b + B \upsilon\left[\upsilon^2 - (2-\mu) a_i^2\right] H\mu \upsilon b = 0.$

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι λαμβάνουν ἁπλουστέραν διατύπωσιν, ἂν χάριν συντομίας θέσωμεν

$$\left.\begin{aligned} u^2 + \mu a_i^2 &= \upsilon^2 - (2-\mu) a_i^2 = \xi \\ \upsilon^2 - \mu a_i^2 &= u^2 + (2-\mu) a_i^2 = \eta \end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

καὶ διατάξωμεν ταύτας ὡς πρὸς A καὶ B. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$\left.\begin{aligned} A\left(\xi\, \eta\mu u b + \frac{u}{\upsilon}\eta\, H\mu \upsilon b\right) + B\left(\xi\, \sigma\upsilon\nu u b + \eta\, \Sigma\upsilon\nu \upsilon b\right) &= 0 \\ A u\left(\eta\, \sigma\upsilon\nu u b + \xi\, \Sigma\upsilon\nu \upsilon b\right) + B\left(\upsilon \xi\, H\mu \upsilon b - u \eta\, \eta\mu u b\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

καὶ ἐντεῦθεν, διὰ μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν A καὶ B, τὴν συνθήκην ὑβώσεως

$$\left(\xi\, \eta\mu u b + \frac{u}{\upsilon}\eta\, H\mu \upsilon b\right)\left(\upsilon \xi\, H\mu \upsilon b - u \eta\, \eta\mu u b\right) = \eta\left(\eta\, \sigma\upsilon\nu u b + \xi\, \Sigma\upsilon\nu \upsilon b\right)\left(\xi\, \sigma\upsilon\nu u b + \eta\, \Sigma\upsilon\nu \upsilon b\right)$$

ἥτις, ἐκτελουμένων τῶν πράξεων καὶ λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν σχέσεων $\eta\mu^2 u b + \sigma\upsilon\nu^2 u b = 1$, $\Sigma\upsilon\nu^2 \upsilon b - H\mu^2 \upsilon b = 1$, μετατρέπεται εἰς τὴν

$$2\xi\eta + (\xi^2 + \eta^2)\, \sigma\upsilon\nu u b \,.\, \Sigma\upsilon\nu \upsilon b = \frac{\upsilon^2\xi^2 - u^2\eta^2}{u\upsilon}\, \eta\mu u b \,.\, H\mu \upsilon b. \qquad (130)$$

Ἡ συνθήκη (130) περιέχει τὰς μεταβλητὰς u, υ, ξ, η συνδεομένας μεταξύ των διὰ τῶν σχέσεων (129) καὶ (106). Εἶναι σκόπιμον νὰ ἀπαλείψωμεν ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων μεταβλητῶν τὰς δύο, ὡς καὶ τὸ πλάτος b τῆς πλακός, ὡς ἐπράξαμεν καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν (γ). Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν πάλιν τὰς νέας μεταβλητὰς m_1, m_2, διδομένας ὑπὸ τῶν ἐξ. (123'). Θὰ ἔχωμεν τότε

$$u b = \sqrt{m_1(m_2 - m_1)} \quad , \qquad \upsilon b = \sqrt{m_1(m_2 + m_1)}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= u^2 + \mu a_i^2 = \frac{m_1}{b^2}(m_2 - m_1) + \mu \frac{m_1^2}{b^2} = \\ &= \frac{m_1}{b^2}\left[m_2 - (1-\mu) m_1\right] \\ \eta &= \upsilon^2 - \mu a_i^2 = \frac{m_1}{b^2}(m_2 + m_1) - \mu \frac{m_1^2}{b^2} = \\ &= \frac{m_1}{b^2}\left[m_2 + (1+\mu) m_1\right] \end{aligned}\right\}$$

ἄρα

$$\left.\begin{aligned} 2\xi\eta &= \frac{2m_1^2}{b^4}\left[m_2^2 - (1-\mu)^2 m_1^2\right] \\ \xi^2 + \eta^2 &= \frac{2m_1^2}{b^4}\left[m_2^2 + (1-\mu)^2 m_1^2\right] \end{aligned}\right\}$$

περαιτέρω δὲ

$$\upsilon^2\xi^2 - u^2\eta^2 = \frac{2m_1^4}{b^6}\left[(2\mu-1) m_2^2\right] + (1-\mu)^2 m_1^2\Big]$$

ἄρα

$$\frac{\upsilon^2\xi^2 - u^2\eta^2}{\upsilon\eta} = \frac{2m_1^3}{b^4} \cdot \frac{\left[(2\mu-1) m_2^2 + (1-\mu)^2 m_1^2\right]}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2}}$$

Ἡ συνθήκη (130) λαμβάνει οὕτω τὴν μορφὴν

$$\left[m_2^2 - (1-\mu)^2 m_1^2\right] + \left[m_2^2 + (1-\mu)^2 m_1^2\right] \sigma\upsilon\nu \sqrt{m_1(m_2 - m_1)} \,.\, \Sigma\upsilon\nu \sqrt{m_1(m_2 + m_1)} = \frac{m_1\left[(2\mu-1) m_2^2 + (1-\mu)^2 m_1^2\right]}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2}}\, \eta\mu \sqrt{m_1(m_2 - m_1)} \,\cdot\, H\mu \sqrt{m_1(m_2 + m_1)} \,. \qquad (131)$$

Διὰ χάλυβα, μὲ $\mu = 0{,}3$, ἡ συνθήκη ὑβώσεως θὰ εἶναι

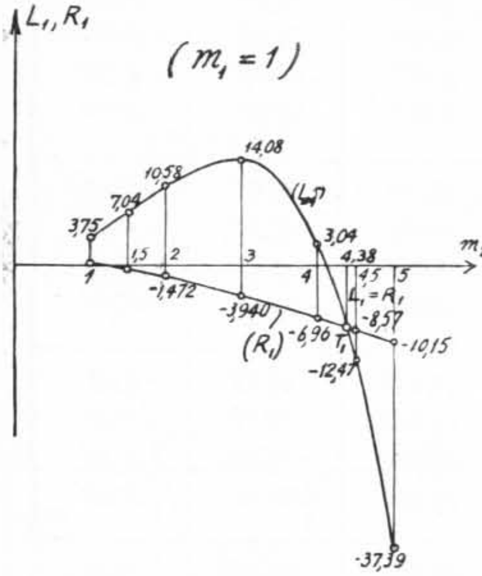
$$\left(m_2^2 - 0{,}49\, m_1^2\right) + \left(m_2^2 +\right.$$

$$+0{,}49\ m_1^2)\ \text{συν}\sqrt{m_1(m_2-m_1)}\ .\ \text{Συν}\sqrt{m_1(m_2+m_1)} =$$

$$= \frac{m_1\left(0{,}49\ m_1^2 - 0{,}4\ m_2^2\right)}{\sqrt{m_2^2 - m_2^2}}\ \text{ημ}\sqrt{m_1(m_2-m_1)}\ .$$

$$.\ \text{Ημ}\sqrt{m_1(m_2+m_1)} \qquad (132)$$

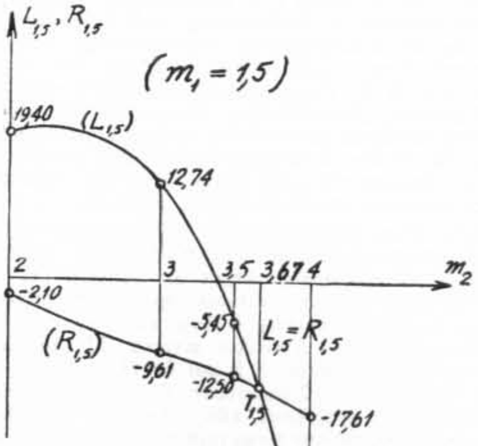
ἡ δὲ λύσις τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως χαλυβδίνης πλακός, φορτιζομένης καὶ στηριζομένης ὡς δεικνύει τὸ Σχ. 34, ἔγκειται εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν εἰς τὰς διαφό-



Σχ. 35

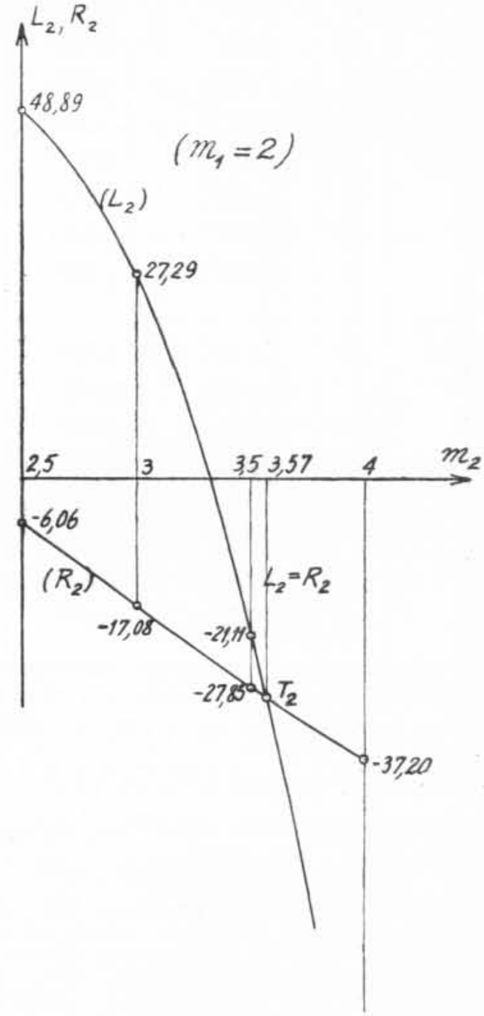
ρους τιμὰς m_1 ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν m_2, ἤτοι εἰς τὸν προσδιορισμόν, ἐκ τῆς συνθήκης (132), τῆς συναρτήσεως $m_2 = f(m_1)$.

Καλέσωμεν, χάριν συντομίας, L τὸ ἀριστερὸν μέλος



Σχ. 36

τῆς συνθήκης (132), τὸ δὲ δεξιὸν αὐτῆς μέλος R [καὶ κατασκευάσωμεν εἰς σύστημα συντεταγμένων (m_2), (L,R) τὰς καμπύλας (L) καὶ (R) διά τινα ὡρισμένην τιμὴν τοῦ m_1 καὶ μεταβλητὰς τιμὰς m_2. Τὸ σημεῖον τομῆς T τῶν καμπυλῶν (L) καὶ (R) ἔχει τετμημένην m_2 τὴν εἰς τὴν ἐκλεγεῖσαν τιμὴν m_1 ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν m_2, τὴν ἱκανοποιοῦσαν τὴν συνθήκην (132). Εἰς τὸ Σχ. (35) ἕως (38) ἐχαράχθησαν αἱ καμπύλαι $L = l(m_2)$, $R = r(m_2)$ διὰ τέσσαρας διαφόρους τιμὰς m_1 , ἤτοι $m_1 = 1$, 1.5 , 2 , 2.5 . Πρὸς χάραξιν τῶν καμπυλῶν τούτων ἐχρησίμευσαν τὰ ἀριθμητικὰ στοιχεῖα τοῦ κάτωθι πίνακος I. Αἱ τετμημέναι m_2 τῶν σημείων τομῆς T_1 , $T_{1,5}$, T_2 , $T_{2,5}$ τῶν καμπυλῶν (L_1) καὶ (R_1) , $(L_{1,5}$ καὶ $R_{1,5}$, (L_2) καὶ (R_2) , $(L_{2,5})$ καὶ $(R_{2,5})$ εὑρέθησαν γραφικῶς, ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς 4,38 , 3,67 , 3,57 , 3,70. Τῇ βοηθείᾳ τῶν οὕτω προ-



Σχ. 37

κυψασῶν συζυγῶν τιμῶν τῶν ἀριθμῶν m_1 , m_2 , ἤτοι τῶν

$m_1 =$	1	1,5	2	2,5
$m_2 =$	4,38	3,67	3,57	3,70

δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην $m_2 = f(m_1)$ καὶ δὴ τὴν περιοχὴν αὐτῆς ἔνθα παράγεται min m_2 (Σχ. 39). Εὑρίσκομεν γραφικῶς min $m_2 = 3{,}55$ παραγόμενον διὰ $m_1 = 1{,}92$ καὶ ἐντεῦθεν, τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (126), (127), αἵτινες ἀναλλοίωτοι ἰσχύουσι καὶ ἐν προκειμένῳ, τὴν ἐλαχίστην κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως

$$\min\sigma_\kappa = \sigma_e \cdot \min\varphi_1^2 = \sigma_e \cdot \min\left(\frac{m_2^2}{\pi^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3{,}55}{\pi}\right)^2 \cdot \sigma_e = 1{,}28\ \sigma_e \qquad (133)$$

ΠΙΝΑΞ Ι. ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΙΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ (132)

m_1	m_2	$\sigma\upsilon\nu\sqrt{m_1(m_2-m_1)}$	$\eta\mu\sqrt{m_1(m_2-m_1)}$	$\Sigma\upsilon\nu\sqrt{m_1(m_2+m_1)}$	$H\mu\sqrt{m_1(m_2+m_1)}$	L	R
1	1	1,000	0,000	2,178	1,934	3,75	+0,123(*)
	1,5	0,760	0,649	2,533	2,327	7,04	−0,552
	2	0,540	0,841	2,914	2,737	10,58	−1,472
	3	0,156	0,988	3,762	3,627	14,08	−3,940
	4	−0,160	0,987	4,732	4,624	3,04	−6,960
	4,5	−0,295	0,955	5,265	5,169	−12,47	−8,570
	5	−0,416	0,909	5,837	5,751	−37,39	−10,150
1,5	2	0,648	0,762	4,993	4,891	19,40	−2,10
	3	0,071	0,997	6,756	6,681	12,74	−9,61
	3,5	−0,160	0,987	7,768	7,704	−5,45	−12,50
	4	−0,357	0,934	8,863	8,807	−39,15	−17,61
2	2,5	0,540	0,841	10,068	10,018	48,89	−6,06
	3	0,156	0,988	11,830	11,788	27,29	−17,08
	3,5	−0,160	0,987	13,807	13,770	−21,11	−27,85
	4	−0,416	0,909	15,986	15,956	−105,16	−37,20
2,5	3	0,437	0,899	20,399	20,374	$113,43^5$	−14,75
	3,5	−0,0102	0,9999	24,051	24,034	$5,42^5$	−45,00
	4	−0,357	0,934	28,140	28,122	$-178,86^5$	−70,00

παραγομένην, ὡς εἴδομεν, διὰ $m_1 = 1{,}92$, ἢ συμφώνως πρὸς ἐξ. (97), (123') διὰ $\frac{i\pi}{\varrho} = 1{,}92$ ($i = 1, 2, 3\ldots$). Ἑπομένως, διὰ λόγον πλευρῶν τῆς χαλυβδίνης πλακὸς $\varrho = \frac{i\pi}{1{,}92} = i \cdot 1{,}635$, ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1,635 ἢ πρὸς ἀκέραιον πολλαπλάσιον τούτου, ἡ ὕβωσις τῆς πλακὸς λαμβάνει χώραν εὐθὺς ὡς ἡ τάσις σ_κ φθάσῃ καὶ ὑπερβῇ τὴν τιμὴν $1{,}28\,\sigma_e$. Ὑπὸ τὴν τάσιν ταύτην ὑβοῦται πλὰξ ἀπείρου μήκους, παραγομένων ἀπείρων ὕβων μήκους 1,635 b ἑκάστου, ἐν γένει δὲ πλὰξ μήκους i.1,635 b, παραγομένων τότε i τὸν ἀριθμὸν ὕβων κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους τῆς πλακός.

(*) Διὰ $m_1 = 1$, $m_2 \to 1$ εἶναι $\eta\mu\sqrt{m_1(m_2-m_1)} \to 0$ καὶ $\sqrt{m_2^2 - m_1^2} \to 0$, ἄρα

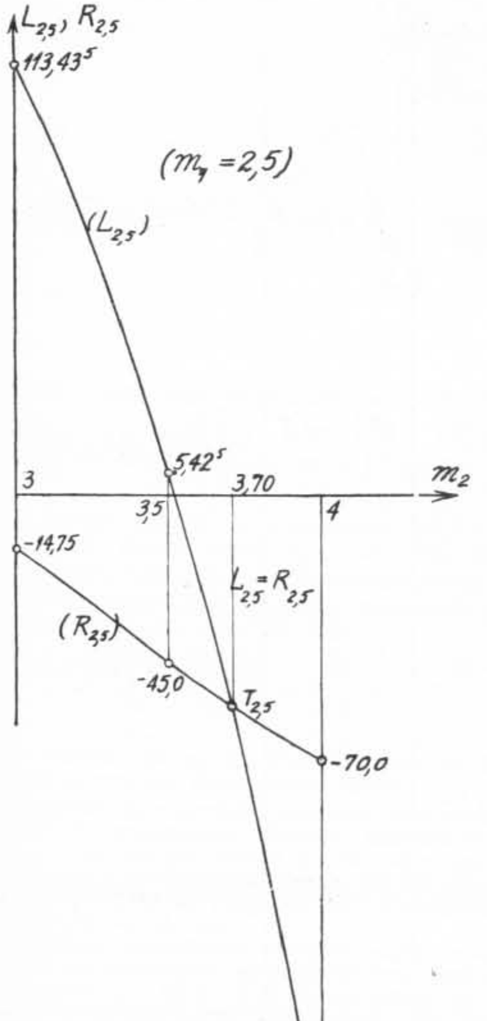
$$\underset{m_2\to 1}{\delta\varrho.}\ \frac{\eta\mu\sqrt{m_1(m_2-m_1)}}{\sqrt{m_2^2-m_1^2}} = \underset{m_2\to 1}{\delta\varrho.}\ \frac{\eta\mu\sqrt{m_2-1}}{\sqrt{m_2^2-1}} = \underset{m_2\to 1}{\delta\varrho.}\ \frac{\frac{d}{dm_2}\left(\sqrt{m_2-1}\right)}{\frac{d}{dm_2}\left(\sqrt{m^2-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

καὶ ἐπομένως, $R_1 = +0{,}09 \times 1{,}934 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = +0{,}123$.

Διὰ τυχόντα λόγον ϱ ἡ ἀντίστοιχος κρίσιμος τάσις ὑβώσεως δύναται νὰ ὑπολογισθῇ, καθ' ὃν τρόπον ὑπεδείξαμεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν (γ), ἀφοῦ κατασκευασθοῦν αἱ καμπύλαι $q_i = f_i(\varrho)$ διὰ διαφόρους τιμὰς $i = 1, 2, 3\ldots$ Παραιτούμεθα ἐνταῦθα τοῦ ὑπολογισμοῦ τούτου, ἀπαιτοῦντος ἄλλως τε τὸν προσδιορισμὸν περισσοτέρων ζευγῶν τῶν συζυγῶν τιμῶν m_1, m_2, ἀρκούμεθα δὲ εἰς τὴν εὕρεσιν μόνον τῆς $\min \sigma_\kappa$, δυναμένης νὰ ἐφαρμοσθῇ μεθ' ἱκανοποιητικῆς προσεγγίσεως, διὰ τὰς πλείστας περιπτώσεις τῆς πράξεως.

Πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν τῶν μέχρι τοῦδε ἐξετασθεισῶν περιπτώσεων ὑβώσεως τῆς θλιβομένης ὀρθογωνικῆς πλακός, ἧς αἱ θλιβόμεναι ἕδραι x στηρίζονται ἀρθρωτῶς, ἐνῷ αἱ ἐν ταύταις κάθετοι ἕδραι y στηρίζονται ἀρθρωτῶς ἢ διὰ πακτώσεως ἢ εἶναι ἐλεύθεραι στηρίξεως, παραθέτομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα II τὰ ἀποτελέσματα τοῦ γενομένου ἐν § 8 καὶ ἐν τῇ παρούσῃ παραγράφῳ ὑπολογισμοῦ. Σημειοῦμεν, ὅτι διὰ τὰς τρεῖς πρώτας περιπτώσεις στηρίξεως τῶν ἑδρῶν y αἱ διδόμεναι ὑπὸ τοῦ πίνακος τούτου τιμαὶ $\min \sigma_\kappa$ καὶ τὰ λοιπὰ ἀναγραφόμενα μεγέθη ἰσχύουν διὰ τυχόντα συντελεστὴν ἀκαμψίας N, ἄρα διὰ πλάκα ἐξ οἱουδήποτε ὑλικοῦ ἀκολουθοῦντος τὸν νόμον τοῦ Hooke, ἐνῷ διὰ τὰς τελευταίας περιπτώσεις στηρίξεως ὑπ' ἀρ. 4 καὶ 5 ὁ συντελεστὴς μ πλευρικῆς συστολῆς τοῦ ὑλικοῦ ἐλήφθη ἴσος πρὸς 0,3 (χάλυψ). Ἐξ ἄλλου ἡ ἐφαρμογὴ τῶν δεδομένων τοῦ ἄνω πίνακος προϋποθέτει, ὅτι ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως σ_κ παραμένει μικροτέρα τοῦ ὁρίου ἀναλογίας σ_a τοῦ ὑλικοῦ, ἐξ οὗ ἡ πλάξ, ἤτοι ***ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς ἐλαστικῆς περιοχῆς***.

Τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ θλιβόμεναι ἕδραι x εἶναι πεπακτωμέναι (ἀντὶ ἀρθρωτῶς στηριζόμεναι) δὲν ἐξετάζομεν ἐνταῦθα, καθ' ὅσον αὐτὴ σπανιώτατα ἐν τῇ πράξει ἀπαντᾶται. Πράγματι, ὁσάκις διατάσσομεν καθέτως εἰς τὴν διεύθυνσιν θλίψεως ἐλάσματα ἀκαμψίας καὶ θεωροῦμεν τὸ μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐλασμάτων τμῆμα τῆς πλακός, εἶναι πολὺ τολμηρὸν νὰ δεχθῶμεν τὴν πλάκα πεπακτωμένην ἐπὶ τῶν ἐλασμάτων, ἔστω καὶ μερικῶς, πλὴν ἂν ἡ ἀκαμψία τῶν τελευταίων τούτων εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε νὰ ἐπιτρέπῃ τοιαύτην παραδοχήν. Τὴν ἐν λόγῳ περίπτωσιν τῆς πλακός μὲ θλιβομένας ἕδρας πε-

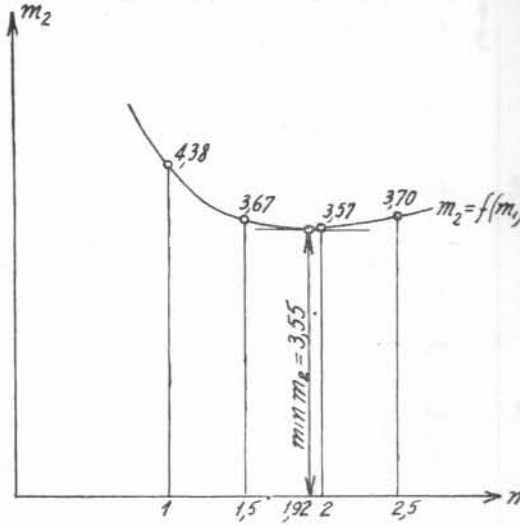


Σχ. 38

πακτωμένας καὶ τὰς λοιπὰς ἀρθρωτῶς στηριζομένας, ἐπραγματεύθη ἐκτενῶς ὁ F. Schleicher,(32) ἡ δὲ ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τούτου προκύψασα τάσις ὑβώσεως διὰ $\varrho =$ $= 0.5, 1, 2, 3, \ldots$ εὑρέθη ἀντιστοίχως ἴση πρὸς τὸ 2,9 , 1,7 , 1,2 , 1,1 — πολλαπλάσιον τῆς τάσεως ὑβώσεως δι' ἀρθρωτὴν ἕδρασιν τῶν θλιβομένων ἑδρῶν (περίπτωσις 1 τοῦ πίνακος). Παρατηροῦμεν, ὅτι δι' ἐπιμήκη ἐλάσματα ἡ πάκτωσις τῶν θλιβομένων ἑδρῶν ἐλαφρῶς μόνον ἐπηρεάζει τὴν τάσιν ὑβώσεως.

(32) F. Schleicher: «Mitteilungen aus den Forschungsanstalten von Gutehoffnungshütte u.s.w.», Bd. 1, 1930—32.

§ 10. *Αἱ ἐξισώσεις τῆς πλακὸς εἰς πολικὰς συντεταγμένας.* Διὰ τὴν ἐξέτασιν περιπτώσεών τινων ὑβώσεως πλακῶν κυκλικῶν (βλ. § 11, 12) εἶναι σκόπιμον νὰ εἰσαγάγωμεν ἀντὶ τῶν ὀρθογωνίων x, y, πολικὰς συντεταγμένας r, α τῆς τρίτης συντεταγμένης z παριστώσης, ὡς



Σχ. 39

καὶ πρότερον, τὴν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου τῆς πλακὸς ἀπὸ τοῦ μέσου ἐπιπέδου αὐτῆς (Σχ. 40). Πρὸς εὕρεσιν τῆς νέας μορφῆς τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (48) ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς πολικὰς συντεταγμένας τὴν ἔκφρασιν τοῦ διαφορικοῦ ἐκτελεστοῦ ΔΔw, ἢ ἁπλῶς τοῦ

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων x, y καὶ τῶν πολικῶν r, α τυχόντος σημείου K (Σχ. 40α), ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$x = r \,.\, \text{συν}\alpha \quad , \quad y = r \,.\, \text{ημ}\alpha$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \;, \quad \alpha = \text{τοξεφ} \; \frac{y}{x}$$

ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \text{συν}\alpha$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = - \frac{y}{x^2+y^2} = - \frac{\text{ημ}\alpha}{r}$$

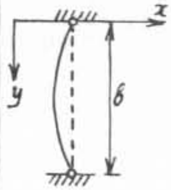
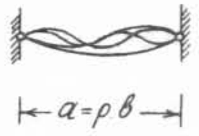
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \text{ημ}\alpha$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\text{συν}\alpha}{r} \,.$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω, αἱ πρῶται καὶ αἱ δεύτεραι μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως w=f (r,α) ὡς πρὸς **x** καὶ y, εὑρίσκονται ἐκ τῶν σχέσεων

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\, \text{συν}\alpha - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\text{ημ}\alpha}{r} = \\
&= \left(\text{συν}\alpha \; \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{ημ}\alpha}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) w \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\, \text{ημ}\alpha + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\text{συν}\alpha}{r} = \left(\text{ημ}\alpha \; \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\text{συν}\alpha}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) w
\end{aligned}\right\}$$

ΠΙΝΑΞ II. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟΣ ΕΞΕΤΑΣΘΕΙΣΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

Α/Α	Στήριξις έδρών y	Στήριξις έδρών x (άρθρωτή)	min σ_κ	min σ_κ παράγεται διά	Μήκος ύβου κατά δ/σιν x	Τύποι Ύπολογισμού Παρατηρήσεις
1.			$4 \cdot \sigma_e$	$\rho = \iota$ ($\iota = 1, 2, 3 \ldots$)	$\frac{a}{\iota} = b$	Έξ. (89), μ, E = τυχόντα
2.		»	$7 \cdot \sigma_e$	$\rho = 0{,}66\,\iota$	$\frac{a}{\iota} = 0{,}66\,b$	Έξ. (116), μ, E = τυχόντα
3.		»	$5{,}425 \cdot \sigma_e$	$\rho = 0{,}79\,\iota$	$\frac{a}{\iota} = 0{,}79\,b$	Έξ. (120), μ, E = τυχόντα
4.		»	$0{,}426 \cdot \sigma_e$	$\rho = \infty$	a	Έξ. (128), μ = 0,3 (χάλυψ)
5.		»	$1{,}28 \cdot \sigma_e$	$\rho = 1{,}635\,\iota$	$\frac{a}{\iota} = 1{,}635\,b$	Έξ. (133), μ = 0,3 (χάλυψ)

Γενική Παρατήρησις: Οἱ ἄνω τύποι ἰσχύουν διά τήν ἐλαστικήν περιοχήν, ὅταν $\sigma_\kappa \leq \sigma_{\text{ἀναλ.}}$

καὶ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\text{συνα} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{ημα}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \cdot \left(\text{συνα}\, \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\text{ημα}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \left(\text{ημα} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\text{συνα}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \cdot \left(\text{ημα} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\text{συνα}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)\end{aligned}\right\}$$

Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, ὅπερ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων γίνεται

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \qquad (134)$$

ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐκτελεστοῦ ΔΔw εἰς πολικὰς συντεταγμένας

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad (135)$$

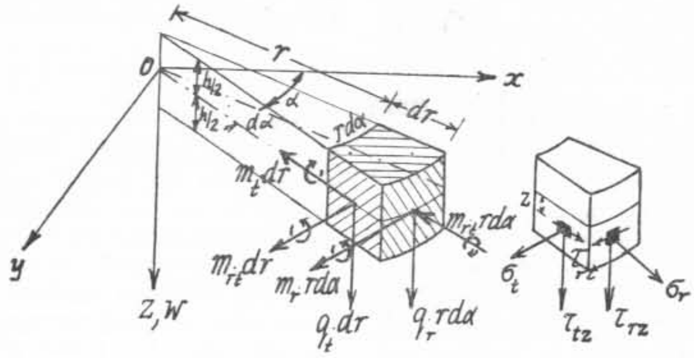
[33]

Ἡ ἐξ. (48), ἤτοι ΔΔw = p/N παραμένει ἐν ἰσχύϊ καὶ εἰς πολικὰς συντεταγμένας, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ὁ ἐκτελεστὴς ΔΔw δίδεται ἐν προκειμένῳ ὑπὸ τῆς ἐξ. (135).

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν παραμέτρων τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως εἴς τι σημεῖον τῆς πλακός, συναρτήσει τοῦ

(33) Πρβλ. A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. I 1924, § 26, σελ. 173 καὶ E. Κοκκινοπούλου: Σύμμορφος ἀπεικόνισις ἐπιπέδων ἐντατικῶν καταστάσεων «Τεχνικὰ Χρονικὰ» 1941, τεῦχος 237-238, σελ. 290—291.

βέλους w, τῶν πολικῶν συντεταγμένων r, α καὶ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ z ἀπὸ τοῦ μέσου ἐπιπέδου, ἀποχωρίζομεν ἐκ τῆς πλακός, τῇ βοηθείᾳ δύο κυλινδρικῶν τομῶν, ἀπεχουσῶν κατα dr, καὶ δύο μεσημβρινῶν τομῶν, σχηματιζουσῶν γωνίαν dα, ἀπειροστὸν στοιχεῖον μὲ κυλινδρικὰς ἕδρας hrdα καὶ μεσημβρινὰς hdr (σχ. 40). Καλέσωμεν σ_r, σ_t τὰς ὀρθὰς τάσεις, τ_{rt}, τ_{tz}, τ_{rz} τὰς διατμητικὰς τάσεις ἐπὶ τῶν ἑδρῶν hrdα, hdr εἰς ἀπόστασιν z ἀπὸ τοῦ μέ-



Σχ. 40

σου ἐπιπέδου, περαιτέρω ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς ἐξ. (40), § 4

$$m_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r \, z dz \, , \; m_t = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t \, z dz \, , \; m_{rt} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{rt} z dz \tag{136}$$

τὰς ἀνὰ μονάδα μήκους τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν ἀνηγμένας ῥοπὰς τῶν ὀρθῶν τάσεων σ_r, σ_t καὶ τῆς διατμητικῆς τ_{rt}, χαρακτηριζομένας ὡς ***καμπτικὰς ῥοπὰς*** (ἀκτινικὴν καὶ ἐφαπτομενικὴν) καὶ ***ῥοπὴν συστροφῆς*** τῆς πλακός, τέλος ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς ἐξ. (41)

$$q_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{rz} \, . \, dz \; , \quad q_t = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{tz} \, dz \tag{137}$$

τὰς ἀνὰ μονάδα μήκους τῶν ἑδρῶν h . rdα, hdr ἀνηγμένας συνισταμένας τῶν διατμητικῶν τάσεων τ_{rz}, τ_{tz}, ἃς χαρακτηρίζομεν ὡς ***τεμνούσας δυνάμεις*** τῆς πλακὸς (ἀκτινικὴν καὶ ἐφαπτομενικήν). Θετικαὶ κατευθύνσεις τῶν τάσεων σ, τ ὡς καὶ τῶν ῥοπῶν m καὶ τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων q ἐκλέγονται αἱ ἐν σχ. 40 διὰ βελῶν σημειούμεναι, ἐν ὁμοφωνίᾳ πρὸς τὰς ἐν § 4 γενομένας παραδοχὰς (πρβλ. σχ. 9, 9α).

Τῇ βοηθείᾳ ὑπολογισμῶν ἀναλόγων πρὸς τοὺς γενομένους διὰ τὴν περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως ὀρθογωνίων συντεταγμένων x, y (βλ. § 4), αἱ ὀρθαὶ τάσεις σ_r, σ_t καὶ ἡ διατμητικὴ τ_{rt} παρέχονται συναρτήσει τοῦ βέλους w εἰς πολικὰς συντεταγμένας ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)\right] \\
\sigma_t &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right] \\
\tau_{rt} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) = \\
&= -2Gz \, . \, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

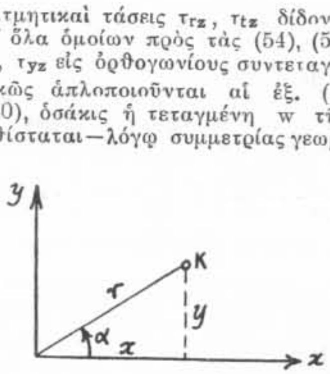
αἱ δὲ ῥοπαὶ κάμψεως καὶ συστροφῆς ὡς καὶ αἱ τέμνουσαι δυνάμεις ὑπὸ ἐκφράσεων παρεμφερῶν πρὸς τὰς (43), (47), ἤτοι

$$\left.\begin{aligned}
m_r &= -N\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)\right] \\
m_t &= -N\left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right] \\
m_{rt} &= -N(1-\mu) \, . \, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

$$q_r = -N \, . \, \frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) \; , \; q_t = -N \frac{1}{r} \, . \, \frac{\partial}{\partial \alpha}(\Delta w). \tag{140}$$

Τέλος αἱ διατμητικαὶ τάσεις τ_{rz}, τ_{tz} δίδονται ὑπὸ ἐξισώσεων καθ' ὅλα ὁμοίων πρὸς τὰς (54), (54'), παρεχούσας τὰς τ_{xz}, τ_{yz} εἰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας. [34]

Σημαντικῶς ἁπλοποιοῦνται αἱ ἐξ. (134). (135) καὶ (138) ἕως (140), ὁσάκις ἡ τεταγμένη w τῆς ἐπιφανείας κάμψεως καθίσταται—λόγῳ συμμετρίας γεωμετρικῆς, στη-



Σχ. 40 α

ρίξεως καὶ φορτίσεως τῆς πλακὸς περί τι κέντρον ἢ ἄξονα συμμετρίας—***συνάρτησις μιᾶς μόνον μεταβλητῆς***, ἤτοι τῆς πολικῆς ἀποστάσεως r (w = f (r)). Ἡ ἐπιφάνεια κάμψεως μετατρέπεται τότε εἰς ***ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς*** περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας τῆς πλακός, ἡ δὲ ἐντατικὴ κατάστασις, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν παραμόρφωσιν ταύτην τῆς πλακός, ὀνομάζεται ***ἀξονοσυμμετρική***. Τοιαύτη ἀξονοσυμμετρικὴ ἐντατικὴ κατάστασις παράγεται λ.χ. εἰς πλάκα κυκλικὴν ἀκτῖνος a καὶ σταθεροῦ πάχους, μὲ ὁμοιόμορφον στήριξιν, καθ' ὅλην τὴν περίμετρον αὐτῆς r = a, φορτιζομένην ὑπὸ κατακορύφων φορτίων p = φ (r), σταθερᾶς ἐντάσεως ἐπὶ περιφερείας r = σταθ.

Θὰ ἔχωμεν τότε $\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0$ καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ μερικὰ δι' ὁλικῶν διαφορικῶν

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \, \frac{dw}{dr}\right) \tag{134'}$$

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr}\right) \tag{135'}$$

(34) Παραλείπεται ἡ ἀπόδειξις τῶν ἐξ. (138) — (140). Διὰ μείζονας λεπτομερείας βλ. A. Nádai: Elastische Platten. 1925, & 47.

περαιτέρω

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) \\ \sigma_t &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) \\ \tau_{rt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (138')$$

καὶ

$$\left.\begin{aligned} m_r &= -N\left(\frac{d_2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) \\ m_t &= -N\left(\mu\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) \\ m_{rt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (139')$$

$$q_r = -N\cdot\frac{d}{dr}(\Delta w), \quad q_t = 0. \qquad (140')$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν θεωρηθεῖσαν ἀξονοσυμμετρικὴν ἐντατικὴν κατάστασιν αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον διατμητικαὶ τάσεις τ_{rt} μηδενίζονται, ὡσαύτως δὲ ἰσοῦνται πρὸς μηδὲν αἱ ἐπὶ τῶν μεσημβρινῶν ἑδρῶν λοιπαὶ διατμητικαὶ τάσεις τ_{tz}, διευθυνόμεναι καθέτως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον. (35)

Ἡ μερικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις (48) τοῦ βέλους κάμψεως τῆς πλακὸς μεταπίπτει εἰς τὴν ὁλικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν 4ης τάξεως

$$\left(\frac{d^2}{dr}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)=\frac{p}{N} \qquad (141)$$

ἧς ἡ γενικὴ λύσις εἶναι

$$w = c_1 + c_2\,.\,lnr + c_3 r^2 + c_4 r^2\,lnr + w_1 \ (36) \qquad (142)$$

ἔνθα τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)=0$$

ἐνῷ ὁ ὅρος w_1 παριστᾷ μίαν μερικὴν λύσιν τῆς ἀνομοιογενοῦς (141).

Ἐὰν συμφώνως πρὸς ἐξ. (134′) θέσωμεν

$$\Delta w_1 = \frac{d^2w_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw_1}{dr}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_1}{dr}\right)=u$$

εἰσαγάγωμεν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξ. (141), λαμβάνομεν τὴν ταὐτότητα

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{p}{N}$$

καὶ ἐκ ταύτης δι' ὁλοκληρώσεως

$$u = \frac{1}{N}\int\frac{dr}{r}\int prdr \qquad (143)$$

ἄρα

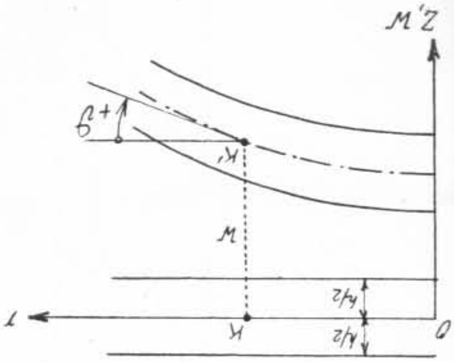
$$w_1 = \int\frac{dr}{r}\int urdr\,. \qquad (143')$$

Γνωστῆς οὔσης τῆς συναρτήσεως $p=\varphi(r)$ δυνάμεθα ἐν γένει ἐκ τῶν ἐξ. (143), (143′) νὰ προσδιορίσωμεν τὴν μερικὴν λύσιν w_1. Διὰ $p =$ σταθ., ἤτοι φόρτισιν ὁμοιόμορφως κατανεμημένην, γίνεται $u = pr^2/4N$ καὶ $w_1 = pr^4/64N$, ἡ δὲ γενικὴ λύσις (142)

$$w = c_1 + c_2\,lnr + c_3 r^2 + c_4 r^2\,lnr + \frac{pr^4}{64N}\,. \qquad (144)$$

Ἀπομένει νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ σταθεραὶ C_1 ἕως C_4 ἐκ τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν τῆς πλακός.

Καλέσωμεν ϑ τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς καμπύλης, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια κάμψεως τέμνεται ὑπὸ τοῦ τυχόντος μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου (r,z), θετικὴν ὅταν ἡ ἐπιφάνεια



Σχ. 41

κάμψεως στρέφει τὰ κυρτά πως τὰ ἄνω (σχ. 41) καὶ εἰσαγάγωμεν, ἀντὶ τοῦ βέλους w, ὡς μεταβλητὴν τὴν γωνίαν ταύτην ϑ. Θὰ εἶναι τότε

$$\vartheta \cong \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{dw}{dr} \qquad (145)$$

καὶ συμφώνως πρὸς ἐξ. (134′)–(140′)

$$\Delta w = \frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\vartheta}{r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(r\vartheta) \qquad (134'')$$

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\vartheta}{r}\right)=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{d_v}\right)\left(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right) \qquad (135'')$$

ἐπίσης

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right) \\ \sigma_t &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\vartheta}{r}\right) \\ \tau_{rt} &= 0 \end{aligned}\right\} (138'')$$

καὶ

$$\left.\begin{aligned} m_r &= -N\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right) \\ m_t &= -N\left(\mu\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\vartheta}{r}\right) \\ m_{rt} &= 0 \end{aligned}\right\} (139'')$$

$$q_r = -N\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right], \ q_t = 0 \qquad (140'')$$

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (141) γράφεται

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]=\frac{p}{N}$$

ἢ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαφόρισιν καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ r, προσέξωμεν δὲ ὅτι τὸ ἀριστερὸν μέλος δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ὁλικοῦ διαφορικοῦ

(35) Προκύπτει καὶ ἀπ' εὐθείας, ὅτι δέον νὰ εἶναι $\tau_{rt} = \tau_{tz} = 0$, καθ' ὅσον διὰ $\tau_{rt} \neq 0$ θὰ παρείχετο ροπὴ συστροφῆς m_{rt} ἐπί τε τῶν κυλινδρικῶν καὶ τῶν μεσημβρινῶν ἑδρῶν, μὲ ἐξ ἴσου δικαιολογημένην τὴν θετικὴν καὶ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, λόγῳ τῆς ὑφισταμένης συμμετρίας. Ὡσαύτως, διὰ $\tau_{tz} \neq 0$ θὰ ἀνεπτύσσοντο ἐπὶ τῶν ἑδρῶν hdr τέμνουσαι δυνάμεις q_t, αἵτινες θὰ προεκάλουν ὀλίσθησιν τῶν ἔναντι ἀλλήλων μεσημβρινῶν ἑδρῶν, μὴ συμβιβαζομένην πρὸς τὴν γενομένην παραδοχήν, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια κάμψεως εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.

(36) Drang u. Zwang Bd. I 1934, § 27, σελ. 175.

$$r\cdot\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]+\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]=$$
$$=\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]\right\}=\frac{1}{N}\,pr.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν δι' ὁλοκληρώσεως

$$r\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]=\frac{1}{N}\int prdr+c \qquad (146)$$

καὶ μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἀριστεροῦ μέλους

$$r\vartheta''+\vartheta'-\frac{\vartheta}{r}=\frac{1}{N}\int prdr+c. \qquad (146')$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς σταθερᾶς c θέτομεν εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἐξ. (146') $p=0$, θεωροῦμεν δηλαδὴ τὴν κυκλικὴν πλάκα φορτιζομένην μόνον ὑπὸ κατακορύφου συγκεντρωμένου φορτίου P, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς καὶ προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀριστεροῦ μέλους διὰ τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν $r=0$. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι τότε $\vartheta=\vartheta'=\vartheta''=0$, ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς προκύπτει ὑπὸ μορφὴν ἀόριστον. Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς ἀοριστίας εἶναι σκόπιμον νὰ συνδυάσωμεν τὰς ἐξ. (140'') καὶ (146). Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τούτου εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$q_r\cdot r=-Nr.\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]=-\int prdr-cN \qquad (147)$$

καὶ διὰ $p=0$

$$q_r\cdot r=-cN\,.$$

Διὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν φορτίσεως τῆς κυκλικῆς πλακὸς ὑπὸ συγκεντρωμένου φορτίου P, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς ἡ τέμνουσα δύναμις q_r εὐκόλως ὑπολογίζεται. Ὄντως, ἐάν, τῇ βοηθείᾳ κυλινδρικῆς τομῆς, ἀποχωρίσωμεν ἐκ τῆς πλακὸς τὸ κυλινδρικὸν τμῆμα ἀκτῖνος r, ἡ τέμνουσα δύναμις q_r ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς αὐτοῦ ἕδρας θὰ εἶναι, λόγῳ τῆς συμμετρίας, σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $-P/2\pi r$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $q_r\,r=-cN$ λαμβάνομεν ἑπομένως $-P/2\pi=-cN$, ἤτοι

$$c=+\frac{P}{2\pi N}. \qquad (148)$$

Ἡ σταθερὰ c μηδενίζεται ὅταν οὐδὲν συγκεντρωμένον φορτίον ἐνεργῇ εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακός. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (146') λαμβάνει κατὰ ταῦτα τὴν πλήρη διατύπωσιν

$$r\vartheta''+\vartheta'-\frac{\vartheta}{r}=\frac{1}{N}\left\{\int prdr+\frac{P}{2\pi}\right\} \qquad (149)$$

ἧς ἡ γενικὴ λύσις εἶναι

$$\vartheta=\alpha_1 r+\frac{\alpha_2}{r}+\vartheta_1+\vartheta_2 \qquad (150)$$ [37]

ὅπου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως $r\vartheta''+\vartheta'-\vartheta/r=0$,

ἐνῷ $$\vartheta_1=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{r}\int rdr\int\frac{dr}{r}\int pr\,dr \qquad (150')$$

εἶναι μερικὴ λύσις τῆς ἀνομοιογενοῦς $r\vartheta''+\vartheta'-\vartheta/r\equiv$

$$r\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right]=\frac{1}{N}\int prdr$$, εἰσαχθησομένη εἰς τὴν (150) ἐφ' ὅσον $p\neq0$, καὶ

$$\vartheta_2=\frac{P}{4\pi N}\,r\,lnr \qquad (150'')$$

ἡ μερικὴ λύσις τῆς ἀνομοιογενοῦς $r\vartheta''+\vartheta'-\vartheta/r=P/2\pi N$ ληφθησομένη ὑπ' ὄψιν ὅταν εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς ἐνεργῇ φορτίον $P\neq0$. Διὰ καθολικὴν ὁμοιόμορφον φόρτισιν $p=$σταθ. γίνεται $\vartheta_1=pr^3/16N$ καὶ ἡ γενικὴ λύσις (150)

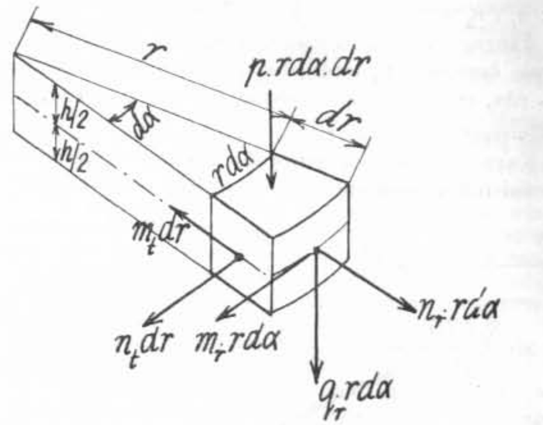
$$\vartheta=\alpha_1 r+\frac{\alpha_2}{r}+\frac{pr^3}{16N}+\frac{P}{4\pi N}\,r\,.\,lnr. \qquad (151)$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐξ. (142) καὶ (150), λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $dw_1/dr=\vartheta_1$, προκύπτει εὐκόλως ἡ κάτωθι ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σταθερῶν c καὶ α

$$\alpha_1=2c_3+c_4\ ,\ \alpha_2=c_2\ ,\ c_4=P/8\pi N\,.$$

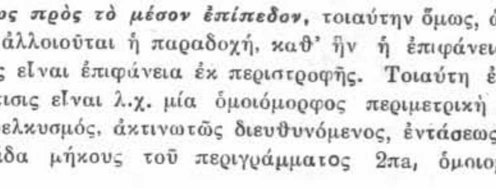
Θὰ εἶναι ἑπομένως διὰ $P=0$ ἐπίσης $c_4=0$.

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἡ κυκλικὴ πλάξ, πλὴν τῆς κατακορύφου φορτίσεως $p=\varphi(r)$ καὶ ἐνδεχομένως τοῦ συγκεντρωμένου φορτίου P ἐνεργοῦντος εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς, ὑποβάλλεται ἀκόμη εἰς ***ἐπίπεδον φόρτισιν παραλ-***



Σχ. 42

λήλως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον, τοιαύτην ὅμως, ὥστε νὰ μὴ ἀλλοιοῦται ἡ παραδοχή, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια κάμψεως εἶναι ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς. Τοιαύτη ἐπίπεδος φόρτισις εἶναι λ.χ. μία ὁμοιόμορφος περιμετρικὴ θλῖψις ἢ ἐφελκυσμός, ἀκτινωτῶς διευθυνόμενος, ἐντάσεως n ἀνὰ μονάδα μήκους τοῦ περιγράμματος 2πα, ὁμοιομόρφως



Σχ. 43

κατανεμημένος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας 2πα.h τοῦ συνόρου. Ἡ ἐπίπεδος φόρτισις θεωρουμένη καθ' ἑαυτήν, παράγει ἐπίπεδον ἐντατικὴν κατάστασιν μὲ κυρίας τάσεις σ'_r, σ'_t καὶ κυρίας μηκύνσεις ε'_r, ε'_t, τῆς διατμητικῆς συνιστώσης τ'_{rt} καὶ τῆς ὀλισθήσεως γ'_{rt} μηδενιζομένων λόγῳ τῆς γεωμετρικῆς καὶ φορτικῆς συμμετρίας. Αἱ τάσεις σ'_r, σ'_t κατανέμονται ὁμοιομόρφως καθ' ὅλον τὸ πάχος τῆς πλακός, ἔστωσαν δὲ n_r, n_t αἱ ἀνὰ μονάδα μήκους τῆς κυ-

(37) A. Nádai: Elastische Platten, 1925, § 16, σελ. 55.

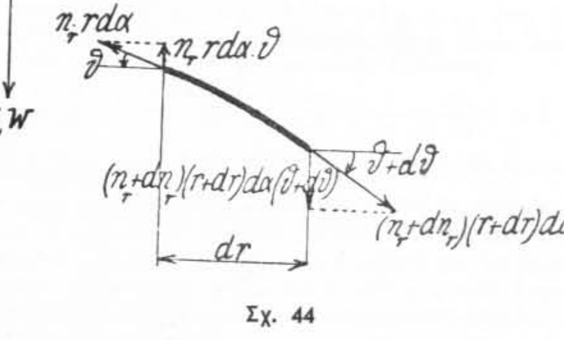
λινδρικῆς ἕδρας hrda καὶ τῆς μεσημβρικῆς ἕδρας hdr ἀναπτυσσόμεναι ὀρθαὶ δυνάμεις, ἤτοι,

$$n_r = \sigma'_r \cdot h \quad , \quad n_t = \sigma'_t \cdot h \qquad (152)$$

καλούμεναι ἀντιστοίχως ἀκτινικὴ καὶ ἐφαπτομενικὴ ὀρθὴ δύναμις (πρβλ. σχ. 42).

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν νέαν μορφὴν τῆς ἐξ. (149) ὅταν, πλὴν τῶν φορτίων p, P ἐνεργῇ συνάμα καὶ τὸ ἐπίπεδον δυναμικὸν σύστημα n, θὰ φαντασθῶμεν ὅπως εἰς τὴν § 7, τὰ δύο δυναμικὰ συστήματα ἐνεργοῦντα διαδοχικῶς, ἤτοι πρῶτον τὸ ἐπίπεδον σύστημα n, εἶτα προστιθέμενον τὸ σύστημα p, P. Κάμψιν τῆς πλακὸς προκαλεῖ μόνον τὸ κατακόρυφον δυναμικὸν σύστημα. Διὰ τοὺς ἐν § 7—ἐπ' εὐκαιρίᾳ ἀναλόγου ἐρεύνης γενομένης εἰς πλάκα ἀναφερομένην εἰς ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων — ἐκτεθέντας λόγους, ἐπιτρέπεται νὰ δεχθῶμεν, ὅτι κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κάμψεως τῆς πλακὸς αἱ ὀρθαὶ δυνάμεις n_r, n_t παραμένουν ἀμετάβλητοι. Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ ἀποχωρισθέντος στοιχείου ἐνεργοῦν ἄρα τελικῶς αἱ ὀρθαὶ δυνάμεις $n_r \cdot rd\alpha$, $n_t\, dr$, αἱ καμπτικαὶ ῥοπαὶ $m_r \cdot rd\alpha$, $m_t\, dr$ καὶ ἡ τέμνουσα δύναμις $q_r \cdot rd\alpha$, τέλος τὸ ἐξωτερικὸν φορτίον $prd\alpha \cdot dr$ (σχ. 42).

Καταστρώσωμεν ἤδη τὴν συνθήκην ἰσορροπίας ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ ἀποχωρισθέντος στοιχείου ἐνεργουσῶν, κα-



Σχ. 44

θέτως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον, ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Παρατηροῦμεν, ὅτι πλὴν τῶν δυνάμεων $p \cdot rd\alpha \cdot dr$ καὶ $q_r\, rd\alpha$ ἔχουν κατακορύφους συνιστώσας αἱ ὀρθαὶ δυνάμεις $n_r \cdot rd\alpha$, ἐμφανιζομένας λόγῳ τῆς κάμψεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου. Οὕτω, ἡ ὀρθὴ δύναμις $n_r \cdot rd\alpha$, ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἕδρας $h \cdot rd\alpha$, κλίνει ὑπὸ γωνίαν ϑ καὶ ἔχει κατακόρυφον συνιστῶσαν τὴν $n_r \cdot rd\alpha \cdot \vartheta$ (Σχ. 44) ἐνῷ ἐπὶ τῆς ἕδρας $h\,(r + dr)\, d\alpha$ ἐνεργεῖ ἡ ὀρθὴ δύναμις $(n_r + dn_r)(r + dr)\, d\alpha$ κλίνουσα ὑπὸ γωνίαν $(\vartheta + d\vartheta)$, ὁπότε ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα αὐτῆς ἔσεται $(n_r + dn_r)(r + dr)\, d\alpha \cdot (\vartheta + d\vartheta)$. Διαγραφομένων τῶν ἀπειροστῶν ἀνωτέρας τάξεως καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, ὅτι $n_r\, \vartheta dr + n_r\, rd\vartheta + r\vartheta dn_r = d\,(r\vartheta n_r)$, ἡ ὁλικὴ κατακόρυφος συνιστῶσα τῶν ἐπὶ τῶν κυλινδρικῶν ἑδρῶν τοῦ στοιχείου ἐνεργουσῶν ὀρθῶν δυνάμεων γίνεται ἴση πρὸς $d\,(r\vartheta n_r) \cdot d\alpha$, θετικὴ ὅταν κατευθύνεται πρὸς τὰ κάτω. Αἱ ὀρθαὶ δυνάμεις $n_t \cdot dr$ δὲν παρέχουν συνεπείᾳ κάμψεως τῆς πλακὸς κατακόρυφον συνιστῶσαν, ἀφοῦ ἡ ἐπιφάνεια κάμψεως εἶναι ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς. Ἡ ὁλικὴ κατακόρυφος συνιστῶσα τῶν ἐπὶ τῶν μεσημβρινῶν ἑδρῶν ἐφαρμοζομένων τεμνουσῶν δυνάμεων, εἶναι συμφώνως πρὸς σχ. 43 ἴση πρὸς $(q_r + dq_r)(r + dr)\, d\alpha - q_r \cdot rd\alpha = d\,(q_r\, r) \cdot d\alpha$, ἐφ' ὅσον παραμεληθοῦν τὰ ἀπειροστὰ ἀνωτέρας τάξεως μεγέθη. Θετικὴ κατεύθυνσίς της εἶναι πάλιν ἡ πρὸς τὰ κάτω. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῶν κατακορύφων προβολῶν γράφεται ἄρα

$$d(q_r\, r) \cdot d\alpha + d\,(r\vartheta n_r) \cdot d\alpha + prdr \cdot d\alpha = 0$$

ἐντεῦθεν δέ, κατόπιν διαιρέσεως διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος καὶ ὁλοκληρώσεως

$$q_r\, r + n_r\, r\vartheta + \int prdr + c = 0.$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸν ὅρον $q_r \cdot r$ τῇ βοηθείᾳ τῆς 1ης τῶν ἐξ. (140″), λαμβάνομεν

$$Nr\,\frac{d}{dr}\left[\,\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\,(r\vartheta)\,\right] - n_r\, r\vartheta = \int prdr + c$$

καὶ δι' ἀναπτύξεως τοῦ 1ου ὅρου τοῦ ἀριστεροῦ μέλους καὶ εἰσαγωγῆς τῆς τιμῆς $P/2\pi N$ τῆς σταθερᾶς c συμφώνως πρὸς ἐξ. (148)

$$r\vartheta'' + \vartheta' - \left(\frac{1}{r} + \frac{n_r}{N}\, r\right)\vartheta = \frac{1}{N}\left(\int prdr + \frac{P}{2\pi}\right)^{(38)}. \qquad (153)$$

Ἡ ἐξ. (153) παριστᾷ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς γωνίας κλίσεως ϑ τῆς ἐπιφανείας κάμψεως τῆς πλακός, ἐντεινομένης ἀξονοσυμμετρικῶς ἐν τε τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ καὶ καθέτως πρὸς αὐτό, εἶναι δὲ ἀντίστοιχος πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν εἰς § 7 ἐξ. (82) ἀναφερομένην εἰς σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων. Ἐνῷ αἱ ἐξ. (141) καὶ (149), ἡ ἀντιστοίχως αἱ (142) καὶ (150), χρησιμεύουν ὡς ἀφετηρία διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἀξονοσυμμετρικῶν ἐντατικῶν καταστάσεων κυκλικῶν πλακῶν, φορτιζομένων ὑπὸ κατακορύφων φορτίων, ἡ ἐξ. (153) θὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἀφετηρία διὰ τὴν διερεύνησιν τῆς περιπτώσεως ὑβώσεως κυκλικῶν πλακῶν ὑποβαλλομένων ἐπιπροσθέτως εἰς ἐπίπεδον ἀξονοσυμμετρικὴν φόρτισιν.

(Συνεχίζεται)

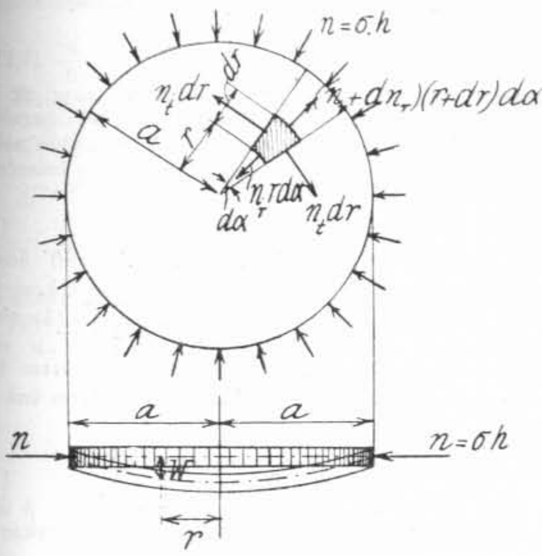
(38). Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν ἐξ. (153) εἰσέρχεται μόνον ἡ ἀκτινικὴ ὀρθὴ τάσις n_r οὐχὶ δὲ ἡ ἐφαπτομενική, ὀρθὴ τάσις n_t. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ἐπίπεδος φόρτισις n ἐθεωρήθη συμμετρική, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς προκαλουμένη ἐπίπεδος ἐντατικὴ κατάστασις νὰ συμβιβάζεται μὲ τὴν ὑπόθεσιν, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια κάμψεως εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια, ὁπότε n_r καὶ n_t συνδέονται διὰ ἁπλουστάτης πρὸς ἄλληλα σχέσεως (Βλ. καὶ 11, ἐξ. (154).)

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

§ ***11. Ὕβωσις κυκλικῆς πλακὸς ὑποβαλλομένης εἰς ὁμοιόμορφον περιμετρικὴν θλῖψιν.*** Θεωρήσωμεν πλάκα κυκλικὴν ἀκτῖνος α, μὲ ὁμοιόμορφον τὴν στήριξιν καθ' ὅλην τὴν περίμετρόν της—ἀρθρωτὴν ἢ διὰ πακτώσεως—ὑποβαλλομένην εἰς ὁμοιόμορφον περιμετρικὴν θλῖψιν ἐντάσεως n=σ.h ἀνὰ μονάδα μήκους τῆς περιμέτρου 2πα, μὲ ἀκτινικὴν πρὸς τὰ ἔσω τὴν κατεύθυνσιν (Σχ. 45). σ παριστᾶ τὴν τάσιν θλίψεως ἐπὶ τῆς συνοριακῆς ἐπιφανείας 2παh.



Σχ. 45

Συνεπείᾳ τῆς φορτίσεως ταύτης ὁ κυκλικὸς δίσκος περιπίπτει εἰς ἐπίπεδον ἐντατικὴν κατάστασιν μὲ κυρίας ὀρθὰς δυνάμεις n_r καὶ n_t. Διὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ἐν Σχ. 45 εἰκονιζομένου ἐν κατόψει στοιχείου τῆς πλακὸς δέον

$$n_t\, dr \,.\, d\alpha = (n_r + dn_r)(r + dr)\, d\alpha - n_r\, r d\alpha$$

ἤ, παραλειπομένου τοῦ ἀπειροστοῦ ἀνωτέρας τάξεως, $n_t\, dr = d(n_r\, r)$, ἐντεῦθεν δὲ δι' ὁλοκληρώσεως

$$n_t\, r = n_r\, r + c$$

καθ' ὅσον n_t = σταθερὰ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς πλακός(*). Ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἄνω ἐξισώσεως διὰ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ($r = 0$) προκύπτει $c = 0$, ἄρα $n_t = n_r$, ἐνῷ διὰ $r = \alpha$ (ὁπότε $n_r = -n$) θὰ ἔχωμεν $n_r\, \alpha = -n \,.\, \alpha$, ἤτοι

$$n_r = n_t = -n \qquad (154)$$

Ἡ συνθήκη ὑβώσεως τῆς κυκλικῆς πλακὸς θὰ προέλθῃ ἐκ τῆς ἐξ. (153) ἂν εἰς τὴν ταύτην θέσωμεν $p = P = 0$, $n_r = -n$. Εἰσάγοντες ὡς καὶ πρότερον (βλ. § 9, ἐξ. (101))

$$\lambda^2 = \frac{n}{N} \qquad (101)$$

λαμβάνομεν τὴν συνθήκην ὑβώσεως ὑπὸ τὴν μορφὴν ὁμογενοῦς διαφυρικῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως, δηλαδὴ

$$r^2\vartheta'' + r\vartheta' + (\lambda^2 r^2 - 1)\,\vartheta = 0. \qquad (155)$$

Χάριν σκοπιμότητος χρησιμοποιοῦμεν ἀντὶ τῆς r τὴν νέαν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν $u = \lambda r$, ὁπότε $\frac{d\vartheta}{dr} = \lambda \,.\, \frac{d\vartheta}{du}$ καὶ $\frac{d^2\vartheta}{dr^2} = \lambda^2 \,.\, \frac{d^2\vartheta}{du^2}$. Ἡ ἐξ. (155) μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$u^2 \frac{d^2\vartheta}{du^2} + u \frac{d\vartheta}{du} + (u^2 - 1)\,\vartheta = 0 \qquad (156)$$

ὑπαγομένην εἰς τὸν τύπον τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τοῦ Bessel, ἤτοι

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2)\, y = 0. \qquad (157)$$

Ἐὰν ἡ παράμετρος m εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ θετικός, ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξ. (157) δίδεται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος δύο συναρτήσεων ἤτοι

$$y = c_1 \,.\, J_m(x) + c_2 \,.\, Y_m(x) \qquad (158)$$

ἔνθα c_1, c_2 αἱ σταθεραὶ τῆς ὁλοκληρώσεως [39]. $J_m(x)$ καὶ $Y_m(x)$ εἶναι αἱ καλούμεναι κυλινδρικαὶ συναρτήσεις ἢ συναρτήσεις τοῦ Bessel, ἀντιστοίχως 1ου καὶ 2ου εἴδους, τάξεως m. Ἀμφότεραι ἐκφράζονται δι' ἀτερμόνων ἐκθετικῶν σειρῶν. Οὕτω ἡ συνάρτησις $J_m(x)$ τοῦ 1ου εἴδους δίδεται ὑπὸ τῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν **x** συγκλινούσης σειρᾶς

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m \,.\, \Gamma(m+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2\,(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \,.\, 4 \,.\, (2m+2)\,(2m+4)} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^\nu \,.\, x^{2\nu}}{2 \,.\, 4 \ldots\ldots 2\nu \,.\, (2m+2)\,(2m+4) \ldots (2m+2\nu)} + \ldots\ldots \right\}$$

ὅπου ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ἀνεγράφη καὶ ὁ γενικὸς (ν στὸς) ὅρος τῆς σειρᾶς, ὡς 1ου ὅρου λογιζομένου τοῦ $-x^2/2\,(2m+2)$, ἐνῷ διὰ m ἀκέραιον καὶ > 0 ἔχομεν ὡς γνωστὸν $\Gamma(m+1) = 1.2.3 \ldots m = m!$ [40]. Ἡ συνάρτησις $J_m(x)$ λαμβάνει οὕτω τὴν ἁπλουστέραν διατύπωσιν

$$J_m(x) = \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1\,(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, (m+1)\,(m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \right.$$

(*) $d\,(n_r\, r)$ παριστᾷ τὴν μεταβολὴν τοῦ γινομένου $(n_r\, r)$ κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀκτῖνος r εἰς τὴν (r+dr). Εἶναι φανερόν, ὅτι λόγῳ τῆς συμμετρίας θὰ εἶναι $d^2\,(n_r\, r) = 0$, ἄρα $d\,(n_r\, r)/dr = n_t$ = σταθερά, ἐφ' ὅλης τῆς πλακός.

(39) Βλ. J. Horn : Gewöhnliche Differentialgleichungen, Walter de Gruyter & Co, 1937, § 43.

(40) Ἡ συνάρτησις «Γάμμα» τοῦ **x** ὁρίζεται κατὰ Gauss ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως

$$\Gamma(x) = \underset{\nu \to \infty}{\text{ὁρ.}} \frac{1.2.3 \ldots (\nu-2)\,(\nu-1)}{x\,(x+1)\,(x+2) \ldots (x+\nu-1)} \,.\, \nu^x$$

ἢ καὶ

$$\Gamma(x+1) = \underset{\nu \to \infty}{\text{ὁρ.}} \frac{1.2.3 \ldots\ldots (\nu-1)\,\nu}{(x+1)\,(x+2) \ldots (x+\nu)} \,.\, \nu^x = x \cdot \Gamma(x)$$

Ἐκ τῶν ἄνω ἐκφράσεων εὑρίσκομεν $\Gamma(1) = 1$ καὶ διὰ m ἀκέραιον καὶ > 0

$$\Gamma(x+m) = x\,(x+1)\,(x+2) \ldots (x+m-1) \,.\, \Gamma(x).$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην $x=1$, εὑρίσκομεν

$$\Gamma(m+1) = 1.2.3 \ldots m \,.\, \Gamma(1) = m!$$

Πλὴν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως «Γάμμα», ἰσχύει ὡσαύτως κατὰ Legendre.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \,.\, t^{x-1} \,.\, dt \,.$$

Διὰ περισσοτέρας λεπτομερείας βλ. λ. χ. Mangoldt - Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik, Bd. III, 1933 § 142 κ. ἑ.

$$- \frac{1}{1.2.3.(m+1)(m+2)(m+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \Bigg\} \quad (159)$$

Ἡ συνάρτησις $Y_m(x)$ 2ου εἴδους ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σειρᾶς

$$Y_m(x) = J_m(x).\,ln x - x^{-m}.\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2^{m-2\nu-1}.(m-\nu-1)!}{\nu!} x^{2\nu} -$$

$$- \frac{x^m}{2^{m+1}.\,m!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu . \varrho_{m\nu} . x^{2\nu}}{2.4...2\nu.(2m+2)(2m+4)...(2m+2\nu)} \quad (160)$$

ὅπου

$$\varrho_{m\nu} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right) +$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m+\nu}\right).$$

Εἰς τὴν πρὸς ἐπίλυσιν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (156) εἶναι $m = 1$, ἄρα ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς ἔσεται συμφώνως πρὸς ἐξ. (158)

$$\vartheta = c_1 . J_1(u) + c_2 . Y_1(u) \;(^{41}) \quad (161)$$

ὅπου, ἐκ τῶν ἐξ. (159), (160)

$$J_1(u) = \frac{u}{2} \Bigg\{ 1 - \frac{(^1/_2\,u)^2}{1.2} + \frac{(^1/_2 u)^4}{1.2.2.3} -$$
$$- \frac{(^1/_2\,u)^6}{1.2.3.2.3.4} + \frac{(^1/_2\,u)^8}{1.2.3.4.2.3.4.5} - \ldots \Bigg\} \quad (162)$$

καὶ μὲ $0! = 1$

$$Y_1(u) = J_1(u).\,ln u - \frac{1}{u} -$$
$$- \frac{u}{4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu . \varrho_{1\nu} . u^{2\nu}}{2.4....2\nu.4.6....(2+2\nu)}. \quad (163)$$

Διὰ $u = \lambda r = 0$, ἤτοι εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακός, γίνεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω $J_1(u) = 0$, $Y_1(u) = \infty$, ἄρα $\vartheta = \infty$. Τῆς τιμῆς ταύτης $\vartheta = \infty$ εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς μὴ οὔσης παραδεκτῆς, ἐπιβαλλομένου δὲ ἀντιθέτως ὅπως εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς ἡ τιμὴ ϑ μηδενίζεται, δέον ἡ σταθερὰ c_2 νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε ἡ ἐξ. (161) γράφεται

$$\vartheta = c_1 . J_1(u) = c_1 . J_1(\lambda r) = c_1 \frac{\lambda r}{2} \Bigg\{ 1 - \frac{(^1/_2\,\lambda r)^2}{1.2} +$$
$$+ \frac{(^1/_2\,\lambda r)^4}{1.2.2.3} - \frac{(^1/_2\,\lambda r)^6}{1.2.3.2.3.4} + \ldots \Bigg\}. \quad (164)$$

Ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς συνθήκης (164) ἐξετάσωμεν ἤδη δύο χαρακτηριστικὰς περιπτώσεις στηρίξεως τῆς πλακός, ἤτοι τὴν περίπτωσιν τῆς περιμετρικῆς πακτώσεως καὶ τὴν τῆς ἁπλῆς (ἀρθρωτῆς) στηρίξεως.

α) ***Ἡ πλὰξ εἶναι πεπακτωμένη γύρωθεν*:** Θὰ εἶναι τότε διὰ $r = \alpha$: $\vartheta = dw/dr = 0$, ἤτοι συμφώνως πρὸς ἐξ. (164)

$$c_1 . J_1(\lambda\alpha) = 0 \quad (165)$$

Ἀποκλειομένης τῆς λύσεως $c_1 = 0$ —ἐπειδὴ τότε εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς πλακὸς (διὰ τυχὸν r) καὶ διὰ τυχοῦσαν τιμὴν $\lambda = \sqrt{n/N}$ (ἤτοι τῆς θλίψεως n) θὰ μηδενίζεται ἡ γωνία κλίσεως ϑ δηλαδὴ ἡ πλὰξ θὰ παραμένῃ ἐπίπεδος— ἀπομένει ἡ λύσις

$$J_1(\lambda\alpha) = 0 \quad (166)$$

ἔχουσα ἀπείρους ῥίζας φ_i $(i = 1, 2, 3 \ldots\ldots)$, καθ' ὅσον ἡ καμπύλη $J_1(\lambda\alpha)$ συναντᾷ ἀπειράκις τὸν ἄξονα $\lambda.\alpha$ (βλ. ὑποσημ. (41)). Ὁσάκις τὸ μέγεθος $\lambda = \sqrt{n/N}$ λαμβάνει τιμὰς τοιαύτας, ὥστε τὸ γινόμενον $\lambda\alpha = \sqrt{n/N}\,.\,\alpha$ νὰ ἰσοῦται πρὸς μίαν τῶν ῥιζῶν φ_i, ἡ πλὰξ ὑφίσταται ὕβωσιν. Ἡ ***κρίσιμος θλῖψις ὑβώσεως*** n_κ θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\sqrt{\frac{n_\kappa}{N}} . \alpha = \varphi_i \qquad \text{ἢ} \qquad n_\kappa = \frac{\varphi_i^2\, N}{\alpha^2} \quad (167)$$

καὶ ἑπομένως ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως

$$\sigma_\kappa = \frac{n_\kappa}{h} = \frac{\varphi_i^2\, N}{\alpha^2 h} = \frac{\varphi_i^2}{\pi^2} . \sigma_e \quad (168)$$

ἔνθα

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 h^2 E}{12\alpha^2(1-\mu^2)} = \frac{N\pi^2}{\alpha^2 h} \quad (169)$$

ἡ κατὰ Euler ***κρίσιμος τάσις λυγισμοῦ ἀμφιπάκτου ἰδεατῆς ῥάβδου,*** πλάτους διατομῆς ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, ὕψους h καὶ μήκους 2α, ἀποχωριζομένης νοερῶς κατὰ μῆκος μιᾶς διαμέτρου τῆς πλακός, ἐξ ὑλικοῦ μὲ μέτρον ἐλαστικότητος $E : (1-\mu^2)$ ἀντὶ E, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἐξ. (27) τῆς διδούσης τὴν δύναμιν λυγισμοῦ θλιβομένης ἀμφιπάκτου ῥάβδου, ἂν ἐκεῖ θέσωμεν $l = 2\alpha$, $J = 1.\frac{h^3}{12}$, $E : (1-\mu^2)$ ἀντὶ E καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς $F = 1.h$. Ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν σ_κ ἐνδιαφέρει, ὡς εἶναι φανερόν, ἡ ἐλαχίστη, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἐλαχίστην ἐξ ὅλων τῶν θετικῶν ῥιζῶν φ_i. Ἐκ τῶν πινάκων Jahnke u. Emde, Teubner 1909 σελ. 123, ἀντλοῦμεν τὰς πρώτας (μικροτέρας) ῥίζας τῆς κυλινδρικῆς συναρτήσεως $J_1(\lambda.\alpha)$ πρώτης τάξεως, ἤτοι τὰς $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 3{,}8317$, $\varphi_2 = 7{,}0156$, $\varphi_3 = 10{,}1735$, $\varphi_4 = 13{,}3237\ldots$. Ἐλαχίστη τούτων, ἐξαιρέσει τῆς $\varphi_0 = 0$, ἥτις δὲν ἐνδιαφέρει, εἶναι ἡ $\varphi_1 = 3{,}8317$ καὶ ἑπομένως

$$\min \sigma_\kappa = \frac{3{,}8317^2}{\pi^2} . \sigma_e = 1{,}487\, \sigma_e . \quad (170)$$

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἐκτεθέντα εἰς § 8 ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πλακὸς ἔναντι ὑβώσεως δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἔναντι λυγισμοῦ ὑποκαταστάτου ῥάβδου ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ μὲ λυγηρότητα $\pi \sqrt{\frac{E}{1{,}487\, \sigma_e}}$,

---

(41). Αἱ κυλινδρικαὶ συναρτήσεις $J_m(x)$, $Y_m(x)$ παρίστανται γραφικῶς εἰς τὸ σύστημα xy, ὑπὸ δύο κυματοειδῶν καμπυλῶν, ταλαντευομένων περὶ τὸν ἄξονα x, μὲ εὖρος φθῖνον σὺν τῇ αὐξήσει τοῦ x, προσεγγιζουσῶν διὰ μεγάλας τιμὰς x πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν βραδέως φθινουσῶν καμπυλῶν $A\,\eta\mu x / \sqrt{x}$, $B\,\sigma\upsilon\nu x / \sqrt{x}$. Ὄντως, ἐὰν εἰς τὴν ἐξ. (157) ἐκτελέσωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $\omega = \sqrt{x} . y$, ὁπότε $y' = \omega' / \sqrt{x} - \omega / 2x\sqrt{x}$, $y'' = \omega'' / \sqrt{x} - \omega' / x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} . \omega / 4x^3$, λαμβάνομεν τὴν ἁπλουστέραν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$x^2 \omega'' + \left(x^2 - m^2 + \frac{1}{4}\right) \omega = 0$$

$$\text{ἢ} \quad \omega'' + \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\right) \omega = 0$$

ἧς ἡ λύσις, διὰ μεγάλας τιμὰς x, προσεγγίζει πρὸς τὴν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\omega_0'' + \omega_0 = 0$. Τῆς τελευταίας ταύτης ἡ γενικὴ λύσις εἶναι ὡς γνωστὸν $\omega_0 = A\,\eta\mu x + B\,\sigma\upsilon\nu x$. Συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ γενικὴ λύσις (158) προσεγγίζει διὰ μεγάλας τιμὰς x πρὸς τὴν $y_0 = \omega_0 / \sqrt{x}$, ἤτοι πρὸς τὴν $y_0 = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\,\eta\mu x + B\,\sigma\upsilon\nu x)$, δικαιολογεῖται δὲ οὕτω ἡ ἀνωτέρω διατυπωθεῖσα ἰδιότης τῶν κυλινδρικῶν συναρτήσεων $J_m(x)$, $Y_m(x)$. Γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων τούτων διὰ ποικίλας τιμὰς τοῦ m πραγματικάς, παρέχουν οἱ πίνακες «Funktionentafeln» τῶν Jahnke u. Emde, Teubner 1909, 1923 σελ. 106 κ. ἑ.

καθ' ὅσον θλιβομένη ράβδος μὲ τὴν λυγηρότητα ταύτην παρουσιάζει τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς κίνδυνον λυγισμοῦ, ὃν κίνδυνον ὑβώσεως παρουσιάζει ἡ κυκλικὴ πλὰξ (ἡ κρίσιμος τάσις λυγισμοῦ τῆς ὑποκαταστάτου ράβδου ἰσοῦται τότε πρὸς τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως τῆς πλακός). Διὰ πλάκα ἐκ χάλυβος, μὲ $\mu = 0{,}3$, $E = 2100$ t/cm^2 λαμβάνομεν (πρβλ. ἐξ. 91)

$$\sigma_e = 1898\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2 \quad (t/cm^2) \tag{171}$$

καὶ ἑπομένως

$$\min \sigma_K = 1{,}487.1898\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2 \cong 2822\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2 \ (t/cm^2) \tag{172}$$

ἐνῷ ἡ λυγηρότης τῆς ὑποκαταστάτου χαλυβδίνης ράβδου ἴσου κινδύνου λυγισμοῦ γίνεται $\pi \frac{\alpha}{h}\sqrt{\frac{2100}{2822}} = 2{,}71\frac{\alpha}{h}$.

Πρὸς συμπλήρωσιν τῆς ἐρεύνης ἀπομένει ἀκόμη νὰ προσδιορισθῇ ἡ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως. Πρὸς τοῦτο δέον νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὴν συνάρτησιν $\vartheta = -\frac{dw}{dr}$ ὡς πρὸς r. Ἐκ τῆς ἐξ. (164) λαμβάνομεν

$$w = \int \vartheta\, dr + c = c_1 \int J_1(\lambda r)\, dr + c\,. \tag{173}$$

Ἐξ ἄλλου μεταξὺ τῶν κυλινδρικῶν συναρτήσεων $J_1(u)$ καὶ $J_0(u)$ τάξεως 1 καὶ 0 ἰσχύει ἡ σχέσις [42]

$$J_1(u) = -\frac{d}{du} J_0(u) = -J_0'(u) \tag{174}$$

ἢ

$$\int J_1(u)\, du = -J_0(u) \tag{174'}$$

ὅπου ἡ συνάρτησις $J_0(u)$ προκύπτει ἐκ τῆς ἐξ. (159) ἐὰν εἰς ταύτην θέσωμεν u ἀντὶ **x**, $m = 0$, $0! = 1$, ἤτοι

$$J_0(u) = 1 - \frac{(^1/_2\, u)^2}{1!^2} + \frac{(^1/_2\, u)^4}{2!^2} - \frac{(^1/_2\, u)^6}{3!^2} + \dots \tag{175}$$

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (174'), (175) καὶ ἐπειδὴ $dr = du/\lambda$, ἡ ἐξ. (173) γράφεται

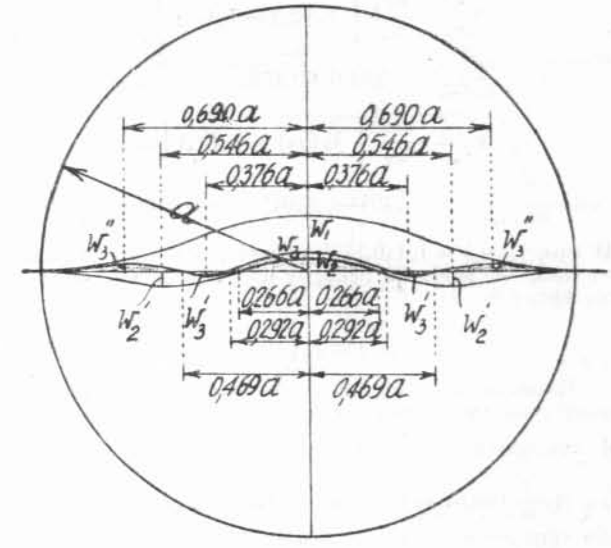
$$w = c - \frac{c_1}{\lambda}\left\{1 - \frac{(^1/_2\,\lambda r)^2}{1!^2} + \frac{(^1/_2\,\lambda r)^4}{2!^2} - \frac{(^1/_2\,\lambda r)^6}{3!^2} + \dots\right\} \tag{176}$$

ἢ συντομώτερον

$$w = c - \frac{c_1}{\lambda}\,.\,J_0(\lambda r). \tag{176'}$$

Ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ βέλους w παράγονται δι' ἐκείνας τὰς τιμὰς λr, δι' ἃς καθίσταται $J_0(\lambda r) = \max$ ἢ $\min$, ἤτοι συμφώνως πρὸς ἐξ. (174) ὅταν $J_1(\lambda r) = 0$. Κορυφαὶ τῶν ὕβων παρουσιάζονται ἄρα εἰς τὰ σημεῖα τῆς πλακός, ὅπου $\lambda r = \varphi_i$. Ἐὰν ἡ πλὰξ ὑποβάλλεται εἰς τὴν ἐλαχίστην θλῖψιν ὑβώσεως $\min n_K = \varphi_1^2\, N/\alpha^2$ παράγεται εἷς μόνον ὗβος μὲ κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακός. Ἐὰν ὑποβάλλεται εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν θλῖψιν ὑβώσεως $n_K = \varphi_2^2\, N/\alpha^2$ θὰ εἶναι τότε $\lambda r = \sqrt{\frac{n_K}{N}}\,.\,r = \frac{\varphi_2}{\alpha}\,.\,r$, ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ βέλους w θὰ παράγωνται διὰ $\frac{\varphi_2}{\alpha}\, r = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ἤτοι διὰ $r = 0$, $r = \alpha\varphi_1/\varphi_2 = \alpha.3{,}8317/7{,}0156 = 0{,}546\alpha$ καὶ $r = \alpha$. Δημιουργοῦνται ἀντὶ ἑνός, τρεῖς ὗβοι (Σχ. 46). Ἐὰν ἡ θλῖψις ὑβώσεως εἶναι $n_K = \varphi_3^2\, N/\alpha^2$ θὰ ἔχωμεν $\lambda r \equiv \sqrt{\frac{n_K}{N}}\,.\,r = \frac{\varphi_3}{\alpha}\,.\,r$, ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ βέλους w θὰ παράγωνται διὰ $\frac{\varphi_3}{\alpha}\, r = \varphi_0$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ἤτοι διὰ $r = 0$, $r = \alpha\varphi_1/\varphi_3 = \alpha.3{,}8317/10{,}1735 = 0{,}376\alpha$, $r = \alpha\varphi_2/\varphi_3 = \alpha.7{,}0156/10{,}1735 = 0{,}690\alpha$ καὶ $r = \alpha$, δημιουργουμένων ἤδη πέντε ὕβων, κ.ο.κ.

Διὰ $r = \alpha$ δέον νὰ εἶναι $w = 0$, λαμβάνομεν ἑπομένως



Σχ. 46

ἐκ τῆς ἐξ. (176') $0 = c - c_1 . J_0(\lambda\alpha)/\lambda$ καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν παράμετρον λ διὰ τοῦ λόγου φ_i/α

$$c = \frac{\alpha c_1}{\varphi_i} J_0(\varphi_i)$$

ὁπότε ἡ ἐξ. (176') γίνεται

$$w = \frac{\alpha c_1}{\varphi_i}\left[J_0(\varphi_i) - J_0\left(\frac{\varphi_i\, r}{\alpha}\right)\right]. \tag{176''}$$

Ἐὰν ἡ πλὰξ ὑποβάλλεται εἰς τὴν ἐλαχίστην θλῖψιν $\min n_K = \varphi_1^2\, N/\alpha^2$ τὸ μέγιστον βέλος ὑβώσεως w_1 θὰ παράγεται ὡς εἴδομεν εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς ($r = 0$) καὶ δίδεται δυνάμει τῆς ἐξ. (176'') ἐκ τῆς σχέσεως

$$w_1 = \frac{\alpha c_1}{\varphi_1}\left[J_0(\varphi_1) - J_0(0)\right] = \frac{\alpha c_1}{3{,}8317}(-0{,}4028 - 1) = -0{,}366\, \alpha c_1$$

καθ' ὅσον $J_0(\varphi_1) = J_0(3{,}8317) = -0{,}4028$ (πίνακες Jahnke u. Emde 1909, σελ. 123) καὶ $J_0(0) = 1$ (πρβλ. ἐξ. 175).

Διὰ $n_K = \varphi_2^2\, N/\alpha^2$ αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ w_2 καὶ w_2' τοῦ βέλους ὑβώσεως παράγονται εἰς τὰ σημεῖα $r = 0$, $r = \alpha\varphi_1/\varphi_2$, ἑπομένως θὰ εἶναι

$$w_2 = \frac{\alpha c_1}{\varphi_2}\left[J_0(\varphi_2) - J_0(0)\right] = \frac{\alpha c_1}{7{,}0156}(+0{,}3001 - 1) = -0{,}0998\, \alpha c_1$$

καὶ

$$w_2' = \frac{\alpha c_1}{\varphi_2}\left[J_0(\varphi_2) - J_0(\varphi_1)\right] = \frac{\alpha c_1}{7{,}0156}(+0{,}3001 + 0{,}4028) = +0{,}1002\, \alpha c_1$$

(42) Βλ. Funktionentafeln τῶν Jahnke u. Emde, Teubner 1909, 1923, σελ. 90. Ἐπίσης βλ. ὑποσημ. (43).

καθ' ὅσον ἐκ τῶν μνημονευθέντων πινάκων εὑρίσκομεν $J_0(\varphi_2) = J_0(7{,}0156) = +0{,}3001$.

Διὰ $n_K = \varphi_3^2 N/\alpha^2$ αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ w_3, w_3', w_3'' παράγονται ὡς εἴδομεν εἰς τὰ σημεῖα $r = 0$, $r = \alpha\varphi_1/\varphi_3$, $r = \alpha\varphi_2/\varphi_3$, ἐκ τῆς ἐξ. (176″) ὑπολογίζομεν ἄρα

$$w_3 = \frac{\alpha c_1}{\varphi_3}\Big[J_0(\varphi_3) - J_0(0)\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{10{,}1735}(-0{,}2497 - 1) = -0{,}1230\,\alpha c_1$$

$$w_3' = \frac{\alpha c_1}{\varphi_3}\Big[J_0(\varphi_3) - J_0(\varphi_1)\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{10{,}1735}(-0{,}2497 + 0{,}4028) = +0{,}0151\,\alpha c_1$$

$$w_3'' = \frac{\alpha c_1}{\varphi_3}\Big[J_0(\varphi_3) - J_0(\varphi_2)\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{10{,}1735}(-0{,}2497 - 0{,}3001) = -0{,}0541\,\alpha c_1\,,\ \text{κ.ο.κ.}$$

Ἡ τιμὴ $J_0(\varphi_3) = J_0(10{,}1735)$, εὑρέθη ἐκ τῶν πινάκων ἴση πρὸς $-0{,}2497$. Τὸ βέλος w μηδενίζεται ἐν γένει εἰς τὰς θέσεις δι' ἅς;

$$J_0(\varphi_i) = J_0\left(\varphi_i \frac{r}{\alpha}\right).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι πλὴν τῶν σημείων τοῦ περιγράμματος $r = \alpha$ τῆς πλακός, ἱκανοποιοῦν τὴν ἄνω συνθήκην αἱ τετμημέναι $\varphi_i \frac{r}{\alpha}$ τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης $J_0\left(\varphi_i \frac{r}{\alpha}\right)$ μετὰ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων, εἰς ἀπόστασιν $J_0(\varphi_i)$ ἀπὸ τούτου. Διὰ $\varphi_i = \varphi_2 = 7{,}0156$ δέον $J_0(\varphi_2) = J_0\left(\varphi_2 \frac{r}{\alpha}\right)$ ἢ $+0{,}3001 = J_0\left(\varphi_2 \frac{r}{\alpha}\right)$. Τὴν συνθήκην ταύτην ἱκανοποιεῖ ἐκτὸς τῆς $r = \alpha$ καὶ ἡ τιμὴ $\varphi_2 \frac{r}{\alpha} = 1{,}87$ (πίνακος Jahnke u. Emde σελ. 112) ἤτοι ἡ τιμὴ $r = \alpha \frac{1{,}87}{7{,}0156} = 0{,}266\,\alpha$. Διὰ $\varphi_i = \varphi_3 = 10{,}1735$ δέον $J_0(\varphi_3) = J_0\left(\varphi_3 \frac{r}{\alpha}\right)$ ἢ $-0{,}2497 = J_0\left(\varphi_3 \frac{r}{\alpha}\right)$, τὴν συνθήκην δὲ ταύτην ἱκανοποιοῦν, πλὴν τῆς $r = \alpha$, αἱ τιμαὶ $\varphi_3 \frac{r}{\alpha} = 2{,}97$ (πίνακες σελ. 113) καὶ $\varphi_3 \frac{r}{\alpha} = 4{,}77$ (πίνακες σελ. 114) ἤτοι αἱ τιμαὶ $r = \alpha \frac{2{,}97}{10{,}1735} = 0{,}292\,\alpha$ καὶ $r = \alpha \frac{4{,}77}{10{,}1735} = 0{,}469\,\alpha$. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ σημεῖα μηδενισμοῦ διὰ $\varphi_i = \varphi_4, \varphi_5 \ldots$

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν περιέχονται εἰς Σχ. 46, ὅπου ἐσχεδιάσθησαν αἱ τρεῖς πρῶται καμπύλαι ὑβώσεως διὰ $\varphi_i = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

β) ***Ἡ πλὰξ στηρίζεται ἀρθρωτῶς γύρωθεν:*** Ἐκ τῶν ἐξ. (139″) καὶ (164) ἔχομεν

$$m_r = -N\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right) =$$

$$= -c_1 N\left\{\frac{d}{dr}J_1(\lambda r) + \frac{\mu}{r}J_1(\lambda r)\right\}$$

ἐπειδὴ δὲ $\frac{d}{dr}J_1(\lambda r) = \lambda \cdot \frac{d}{d(\lambda r)}J_1(\lambda r)$, ἐνῷ ἐξ ἄλλου μεταξὺ τῶν κυλινδρικῶν συναρτήσεων $J_{m-1}(u)$, $J_m(u)$ καὶ $J'_m(u)$ ἰσχύει ἡ γενικὴ σχέσις [43]

$$J_{m-1}(u) = \frac{m}{u}J_m(u) + J'_m(u) \tag{177}$$

ἄρα διὰ $m = 1$

$$J_0(u) = \frac{1}{u}J_1(u) + \frac{d}{du}J_1(u)\,, \tag{177'}$$

ἡ ἄνω σχέσις γράφεται

$$m_r = -c_1 N\left\{\lambda \cdot J_0(\lambda r) - \frac{1-\mu}{r}J_1(\lambda r)\right\}.$$

Ἡ συνοριακὴ συνθήκη τῆς πλακὸς εἶναι, διὰ $r = \alpha$: $m_r = 0$, ἤτοι

$$\lambda\alpha \cdot J_0(\lambda\alpha) - (1-\mu)J_1(\lambda\alpha) = 0 \tag{178}$$

ἧς αἱ ῥίζαι $\varphi_i = \lambda\alpha$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ παρέχουν, βάσει τῆς ἐξ. (167) τὴν κρίσιμον θλῖψιν ὑβώσεως n_K, ἐντεῦθεν δὲ καὶ τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως $\sigma_K = n_K / h$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐνταῦθα ἐμφανίζεται ἡ n_K ἢ σ_K ὡς συνάρτησις τοῦ συντελεστοῦ μ. Διὰ χάλυβα μὲ $\mu = 0{,}3$ ἡ συνθήκη (178) γράφεται

$$\lambda\alpha \cdot J_0(\lambda\alpha) - 0{,}7 \cdot J_1(\lambda\alpha) = 0 \tag{178'}$$

ταύτης δὲ αἱ ῥίζαι $\varphi_i = \lambda\alpha$ δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν γραφικῶς, ἂν ἀπὸ συστήματος ὀρθογωνίων συντεταγμένων χαραχθοῦν αἱ καμπύλαι $\lambda\alpha \cdot J_0(\lambda\alpha)$ καὶ $0{,}7 \cdot J_1(\lambda\alpha)$ καὶ προσδιορισθοῦν αἱ τετμημέναι $\varphi_i = \lambda\alpha$ τῶν σημείων τομῆς αὐτῶν. Διὰ τὴν χάραξιν τῶν καμπυλῶν τούτων χρησιμοποιοῦμεν τοὺς πίνακας Jahnke u. Emde σελ. 112 κ. ἑ., περιέχοντας τὰς τιμὰς τῶν κυλινδρικῶν συναρτήσεων $J_0(x)$, $J_1(x)$ μηδενικῆς καὶ 1ης τάξεως, διὰ $x = 0$ ἕως 15,50. Αἱ καμπύλαι $\lambda\alpha \cdot J_0(\lambda\alpha)$ καὶ $0{,}7 \cdot J_1(\lambda\alpha)$ ἐσχεδιάσθησαν εἰς Σχ. 47 διὰ τὸ διάστημα $\lambda\alpha = 1{,}5$ ἕως 9. Αἱ τεταγμέναι τῶν καμπυλῶν ὑπελογίσθησαν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο διὰ διαδοχικὴν μεταβολὴν τοῦ λα κατὰ 0,5 καὶ περιέχονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα III. Τὰ σημεῖα τομῆς T_1, T_2; $T_3 \ldots$ τῶν καμπυλῶν ἔχουν τετμημένας $\varphi_1 = 2{,}05$, $\varphi_2 = 5{,}39$, $\varphi_3 = 8{,}57 \ldots$

Πρὸς ἔλεγχον εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων Jahnke u. Emde τὰς τιμὰς $J_0(2{,}05) = +0{,}1951$, $J_1(2{,}05) = +0{,}5730$, ἐπίσης $J_0(5{,}39) = -0{,}0447$, $J_1(5{,}39) = -0{,}3456$ καὶ $J_0(8{,}57) = +0{,}0228$, $J_1(8{,}57) = -0{,}2731$ καὶ πιστοποιοῦμεν ὅτι πράγματι εἶναι $2{,}05 \cdot J_0(2{,}05) \cong$

---

(43) Συμφώνως πρὸς «Handbuch der Physik» Bd, III, Mathematische Hilfsmittel der Physik, 1928, Kap. 7, § 14 σελ. 277, μεταξὺ τῶν συναρτήσεων 1ου εἴδους J_{m-1}, J_m, J_{m+1} καὶ τῆς 1ης παραγώγου J'_m τῆς J_m, ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d}{du}J_m(u) &= J_{m-1}(u) - J_{m+1}(u) \\ J_{m-1}(u) + J_{m+1}(u) &= \frac{2m}{u}J_m(u) \end{aligned}\right\}$$

ὅπου ἡ παράμετρος m = τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμός. Δι' ἀθροίσεως ἢ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων

$$\left.\begin{aligned} J_{m-1}(u) &= \frac{m}{u}J_m(u) + \frac{d}{du}J_m(u) \\ J_{m+1}(u) &= \frac{m}{u}J_m(u) - \frac{d}{du}J_m(u) \end{aligned}\right\}$$

Ἐπὶ πλέον ἰσχύει διὰ m = ἀκέραιος ἀριθμός, $J_{-m}(u) = (-1)^m \cdot J_m(u)$.

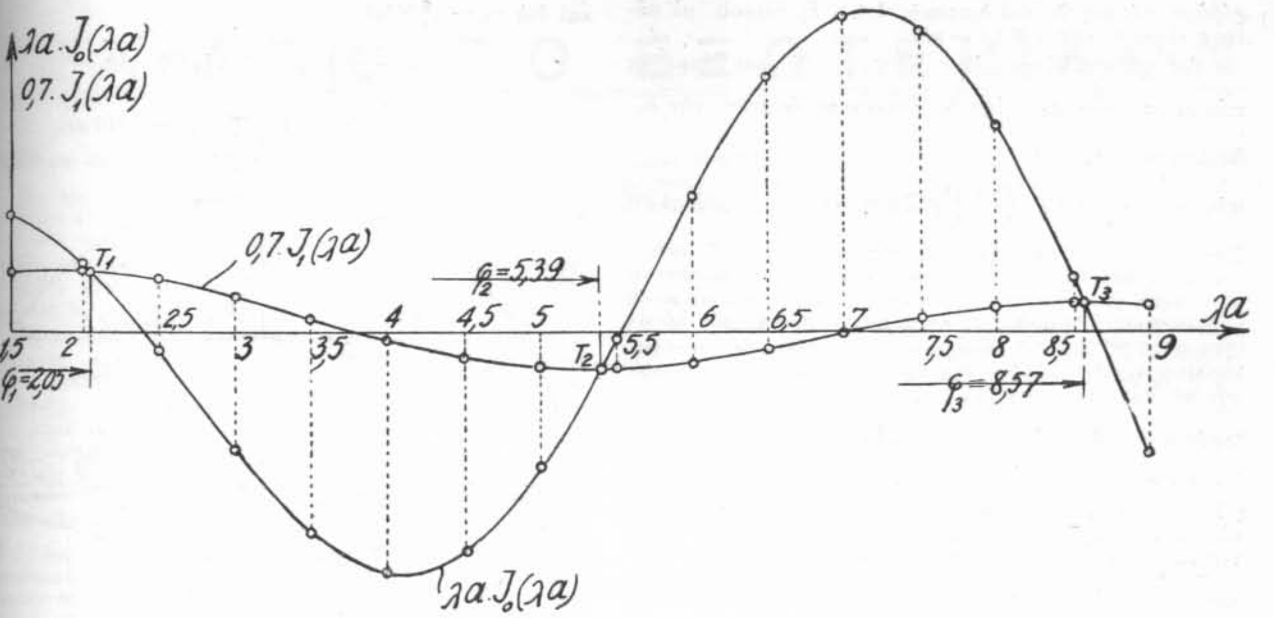
Διὰ $m = 0$ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως τοῦ ἄνω συστήματος

$$J_1(u) = -\frac{d}{du}J_0(u) = -J_0'(u) \tag{174}$$

ἐνῷ διὰ $m = 1$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς 1ης

$$J_0(u) = \frac{1}{u}J_1(u) + \frac{d}{du}J_1(u) \tag{177'}$$

ἣν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν καὶ ἐκ τῆς 2ας διὰ $m = -1$, ἐὰν συνάμα ἐθέτομεν $J_{-1}(u) = -J_1(u)$.



Σχ. 47

ΠΙΝΑΞ III. ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΙΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ (178')

λa	$J_0(\lambda a)$	$J_1(\lambda a)$	$\lambda a . J_0(\lambda a)$	$0{,}7 J_1(\lambda a)$
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,7677	+0,3905
2,0	+0,2239	+0,5761	+0,4478	+0,4033
2,5	−0,0484	+0,4971	−0,1209	+0,3480
3,0	−0,2601	+0,3391	−0,7803	+0,2374
3,5	−0,3801	+0,1374	−1,3303	+0,0962
4,0	−0,3971	−0,0660	−1,5884	−0,0462
4,5	−0,3205	−0,2311	−1,4422	−0,1618
5,0	−0,1776	−0,3276	−0,8880	−0,2293
5,5	−0,0068	−0,3414	−0,0374	−0,2390
6,0	+0,1506	−0,2767	+0,9036	−0,1937
6,5	+0,2601	−0,1538	+1,6906	−0,1077
7,0	+0,3001	−0,0047	+2,1007	−0,0033
7,5	+0,2663	+0,1352	+1,9972	+0,0946
8,0	+0,1717	+0,2346	+1,3736	+0,1642
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,3561	+0,1912
9,0	−0,0903	+0,2453	−0,8127	+0,1717

$\cong 0{,}7 . J_1\,(2{,}05)$, ἐπίσης $5{,}39 . J_0(5{,}39) \cong 0{,}7 . J_1\,(5{,}39)$ καὶ $8{,}57 . J_0(8{,}57) \cong 0{,}7 . J_1\,(8{,}57)$ κ.ο.κ.

Ὁσάκις τὸ μέγεθος $\lambda = \sqrt{n/N}$ λαμβάνει τιμὰς τοιαύτας, ὥστε $\lambda a = \varphi_i$ ἡ πλὰξ ὑφίσταται ὕβωσιν. Ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως δίδεται, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πεπακτωμένης πλακός, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τύπου (168), ὅπου $\sigma_e = \dfrac{\pi^2 h^2 E}{12 a^2 (1-\mu^2)}$ παριστᾷ, ὅπως καὶ ἐκεῖ, τὴν κατὰ Euler κρίσιμον τάσιν λυγισμοῦ **ἀμφιπάκτου** (44) ἰδεατῆς

(44) Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν, προκειμένου περὶ ἀρθρωτῶς στηριζομένης πλακός, ἀντὶ τῆς σ_e τὴν κρίσιμον τάσιν λυγισμοῦ $\sigma'_e = \dfrac{\pi^2 h^2 E}{48\, a^2 (1-\mu^2)}$ ἀμφιαρθρωτῆς ἰδεατῆς ῥάβδου μήκους 2α. Χάριν ὁμοιομορφίας καὶ συγκρίσεως μὲ τὴν περίπτωσιν α) προτιμῶμεν νὰ διατηρήσωμεν τὴν σ_e, παριστῶσαν ἄλλωστε ἐπίσης καὶ τὴν κρίσιμον τάσιν λυγισμοῦ ἀμφιαρθρωτῆς ἰδεατῆς ῥάβδου μήκους α (ἀντὶ 2α).

ράβδου, μήκους 2α καὶ διατομῆς 1.h , ἐξ ὑλικοῦ μὲ μέτρον ἐλαστικότητος $E : 1 - \mu^2$).

Διὰ χάλυβα εἶναι $\min \varphi_i = \varphi_1 = 2{,}05$ καὶ ἑπομένως

$\min \sigma_K = \frac{2{,}05^2}{\pi^2}\,\sigma_e$, ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὴν σ_e δυνάμει τῆς ἐξ. (171)

$$\min \sigma_K = \frac{2{,}05^2}{\pi^2}.1898\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2 \cong 808{,}5\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2 (t/cm^2) \quad (179)$$

Συγκρίνοντες μὲ τὴν ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν τῆς πεπακτωμένης πλακὸς (ἐξ. 172) διαπιστοῦμεν, ὅτι ἡ πεπακτωμένη πλὰξ ὑβοῦται συνεπείᾳ περιμετρικῆς θλίψεως πολὺ μεγαλυτέρας ἢ ἡ ἀρθρωτὴ πλὰξ καὶ δὴ κατὰ τὸν λόγον $2822/808{,}5 \cong 3{,}5$. Ἡ λυγηρότης τῆς ὑποκαταστάτου χαλυβδίνης ράβδου εὑρέθη διὰ τὴν πεπακτωμένην χαλυβδίνην πλάκα ἴση πρὸς $2{,}71\,\alpha/h$, διὰ τὴν ἀρθρωτῶς στηριζομένην θὰ εἶναι ἑπομένως $(2{,}71\,\alpha/h).\sqrt{3{,}5} = 5{,}06\,\frac{\alpha}{h}$.

Τὸ βέλος ὑβώσεως w θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐξ. (176') ἢ (176''), ὡς καὶ διὰ τὴν πεπακτωμένην πλάκα, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ἐνταῦθα $\varphi_i = \lambda\alpha$ παριστᾷ τὰς ρίζας τῆς ἐξ. (178) ἢ (178'). Ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ βέλους w παράγονται δι' ἐκείνας τὰς τιμὰς $\lambda r = \frac{\varphi_i}{\alpha} r$, δι' ἃς $J_0(\lambda r) = \max$ ἢ $\min$, ἤτοι διὰ τιμὰς $\frac{\varphi_i}{\alpha} r$ ἴσας πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $J_1(u) = 0$. Τὰς ρίζας ταύτας ἀνεζητήσαμεν προηγουμένως κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς πεπακτωμένης πλακός, εὕρομεν δὲ ταύτας ἴσας πρὸς 0 , 3,8317 , 7,0156 , 10,1735,.... Ἐὰν ἡ χαλυβδίνη ἀρθρωτῶς στηριζομένη πλὰξ ὑποβάλλεται εἰς τὴν ἐλαχίστην θλῖψιν ὑβώσεως $\min n_K = \varphi_1^2\,N/\alpha^2$ παράγεται εἰς μόνον ὕβος μὲ κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακός. Ἐὰν ὑποβάλλεται εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν θλῖψιν $n_K = \varphi_2^2\,N/\alpha^2$, αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ βέλους w θὰ παράγωνται διὰ $\lambda r \equiv \frac{\varphi_2}{\alpha} r = 0$, 3,8317, ἤτοι διὰ $r = 0$ καὶ $r = \frac{3{,}8317}{\varphi_2}\alpha = \frac{3{,}8317}{5{,}39}\alpha = 0{,}711\,\alpha$. Ἐὰν ἡ θλῖψις εἶναι $n_K = q_3^2\,N/\alpha^2$, αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ βέλους παράγονται διὰ $\lambda r \equiv \frac{\varphi_3}{\alpha} r = 0$, 3,8317 , 7,0156 , ἤτοι διὰ $r = 0$, $r = \frac{3{,}8317}{8{,}57}\alpha = 0{,}447\,\alpha$ καὶ $r = \frac{7{,}0156}{8{,}57}\alpha = 0{,}829\,\alpha$,κ.ο.κ. (Σχ. 48)

Ἐκ τῆς ἐξ. (176'') προσδιορίζομεν περαιτέρω τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν βελῶν ὑβώσεως. Θὰ εἶναι, διὰ $n_K = \varphi_1^2\,N/\alpha^2$.

$$w_1 = \frac{\alpha c_1}{\varphi_1}\Big[\,J_0(\varphi_1) - J_0(0)\,\Big] = \frac{\alpha c_1}{2{,}05}\Big[\,J_0(2{,}05) - 1\,\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{2{,}05}(0{,}1951 - 1) \cong -\,0{,}392\,\alpha c_1 \; .$$

ἀντιστοίχως διὰ $n_K = q_2^2\,N/\alpha^2$

$$w_2 = \frac{\alpha c_1}{\varphi_2}\Big[\,J_0(\varphi_2) - J_0(0)\,\Big] =$$

$$\frac{\alpha c_1}{5{,}39}\Big[\,J_0(5{,}39) - 1\,\Big] \cong -\,0{,}194\,\alpha c_1$$

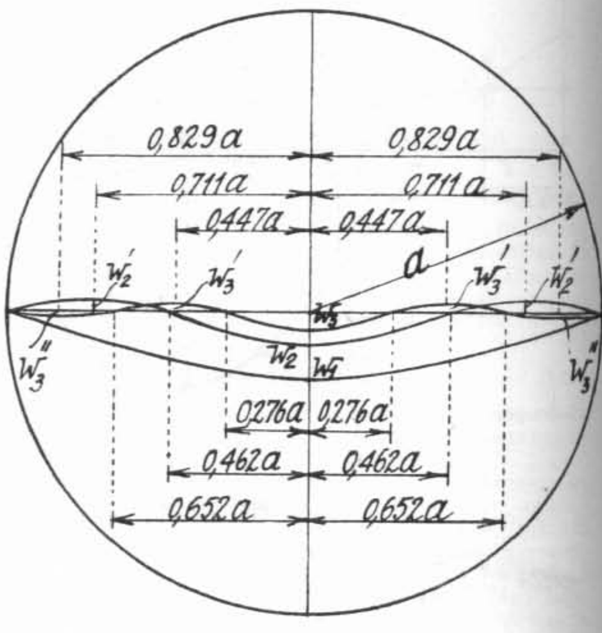
$$w_2' = \frac{\alpha c_1}{\varphi_2}\Big[\,J_0(\varphi_2) - J_0(3{,}8317)\,\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{5{,}39}\Big[\,J_0(5{,}39) + 0{,}4028\,\Big] \cong +\,0{,}066\,\alpha c_1$$

καὶ διὰ $n_K = \varphi_3^2\,N/\alpha^2$

$$w_3 = \frac{\alpha c_1}{\varphi_3}\Big[\,J_0(\varphi_3) - J_0(0)\,\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{8{,}57}\Big[\,J_0(8{,}57) - 1\,\Big] \cong \ldots -\,0{,}114\,\alpha c_1$$



Σχ. 48

$$w_3' = \frac{\alpha c_1}{\varphi_3}\Big[\,J_0(\varphi_3) - J_0(3{,}8317)\,\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{8{,}57}\Big[\,J_0(8{,}57) + 0{,}4028\,\Big] \cong +\,0{,}050\,\alpha c_1$$

$$w_3'' = \frac{\alpha c_1}{\varphi_3}\Big[\,J_0(q_3) - J_0(7{,}0156)\,\Big] =$$

$$= \frac{\alpha c_1}{8{,}57}\Big[\,J_0(8{,}57) - 0{,}3001\,\Big] \cong -\,0{,}032\,\alpha c_1 \; .$$

Τὰ σημεῖα μηδενισμοῦ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως προσδιορίζονται εὐκόλως, ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πεπακτωμένης πλακός: Διὰ $\varphi_i = \varphi_2 = 5{,}39$ δέον $J_0(5{,}39) = J_0\left(5{,}39\,\frac{r}{\alpha}\right)$, ἢ $-\,0{,}0447 = J_0\left(5{,}39\,\frac{r}{\alpha}\right)$. Τὴν συνθήκην ταύτην ἱκανοποιεῖ, ἐκτὸς τῆς $r = \alpha$ καὶ ἡ τιμὴ $5{,}39\,\frac{r}{\alpha} \cong 2{,}49$ (πίνακες Jahnke u. Emde σελ. 112) ἤτοι $r = \frac{2{,}49}{5{,}39}\alpha = 0{,}462\,\alpha$. Διὰ $\varphi_i = \varphi_3 = 8{,}57$ δέον $J_0(8{,}57) = J_0\left(8{,}57\,\frac{r}{\alpha}\right)$, ἢ $+\,0{,}0228 = J_0\left(8{,}57\,\frac{r}{\alpha}\right)$, τὴν συνθήκην δὲ ταύτην ἱκανοποιοῦν, ἐκτὸς τῆς $r = \alpha$ καὶ αἱ τιμαὶ $8{,}57\,\frac{r}{\alpha} \cong 5{,}59$, $8{,}57\,\frac{r}{\alpha} \cong 2{,}36$ (πίνακες σελ. 112, 115) ἤτοι αἱ $r = \frac{5{,}59}{8{,}57}\alpha = 0{,}652\,\alpha$, $r = \frac{2{,}36}{8{,}57}\alpha = 0{,}276\,\alpha$. Ἀναλόγως δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ σημεῖα μηδενισμοῦ διὰ $\varphi_i = \varphi_4$, φ_5....

Εἰς Σχ. 48 εἰκονίζεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἡ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως διὰ $\varphi_i = \varphi_1$, φ_2 , φ_3 .

(Συνεχίζεται)

Ἀντιθέτως ὁ ἄλλος κλάδος τῆς πυρηνικῆς τεχνικῆς χρησιμοποιεῖ τὰς τεραστίας ποσότητας θερμότηκος, αἱ ὁποῖαι ἐκλύονται κατὰ τὰς πυρηνικὰς ἀντιδράσεις, τὰς λαμβανούσας χώραν ἐντὸς τῶν αὐτῶν Στηλῶν Οὐρανίου τῶν χρησιμοποιουμένων διὰ τὴν παραγωγὴν τεχνητῶν ραδιενεργῶν σωμάτων καὶ Πλουτωνίου. Ἡ θερμικὴ αὕτη ἐνέργεια, ἢ ἡ ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ ταύτης παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια. εἶναι συνεπῶς ὑποπροϊὸν τῆς ἀντιδράσεως, δι' ἧς παράγονται αἱ τεχνηταὶ ραδιενεργοὶ οὐσίαι καὶ τὸ Πλουτώνιον. Ἀναλόγως ὅμως τῶν ἑκάστοτε συνθηκῶν δύναται ἀντιστρόφως νὰ θεωρηθῇ ὡς κύριον προϊὸν ἡ θερμικὴ ἐνέργεια καὶ τὰ λοιπὰ προϊόντα ὡς δευτερεύοντα. Καὶ ἐδῶ ἡ νέα μέθοδος παραγωγῆς ἐνεργείας, διὰ τῆς διασπάσεως τοῦ ἀτόμου, παρουσιάζει ἔναντι τῶν παλαιοτέρων μεθόδων τὸ σοβαρώτατον πλεονέκτημα ὅτι ἐπιτρέπει εὔκολον μεταφορὰν ἀπὸ τόπου εἰς τόπον τῆς ἐνεργοπαραγωγοῦ οὐσίας καὶ συνεπῶς καθιστᾷ δυνατὴν τὴν βιομηχανικὴν ἀνάπτυξιν Χωρῶν, αἱ ὁποῖαι στεροῦνται φυσικῶν πηγῶν ἐνεργείας, ὡς ὑδατοπτώσεων ἢ κοιτασμάτων ὑγρῶν ἢ στερεῶν καυσίμων, ἀρκεῖ βεβαίως νὰ πληρῶνται αἱ λοιπαὶ προϋποθέσεις, αἱ ἀπαιτούμεναι διὰ τὴν ἐγκατάστασιν τῶν σχετικῶν βιομηχανιῶν. Διότι ἤδη ἡ μᾶζα ἡμίσεος χιλιογράμμου Οὐρανίου θὰ ἐπήρκει διὰ τὴν ἀπελευθέρωσιν ποσότητος ἐνεργείας, ἀνερχομένης εἰς 12.000.000 περίπου ὡριαίων χιλιοβάτ, ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν καῦσιν 1500 τόνων περίπου γαιάνθρακος, καιομένου κατὰ τὴν συνήθως ἐφαρμοζομένην μέθοδον καὶ σημαντικῶς ὑπερβαινούσης τὴν ἡμερησίαν κατανάλωσιν μιᾶς χώρας τόσον βιομηχανικῶς προηγμένης ὅσον ἡ Μεγάλη Βρεττανία. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅμως καταφαίνεται εὐκόλως ὅτι διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ἀτομικῆς ἐνεργείας ἀπαλλασσόμεθα τοῦ ἀπὸ μακροῦ ἐπικρεμαμένου ἐπὶ τῆς ἀνθρωπότητος φόβου μιᾶς ἐπικειμένης ἐξαντλήσεως τῶν φυσικῶν ἀποθεμάτων εἰς καυσίμους ὕλας. Βεβαίως καὶ τὰ ἀποθέματα Οὐρανίου καὶ Θορίου δὲν εἶναι ἀνεξάντλητα. Ἀλλὰ εἶναι λίαν ἐνδεχόμενον ὅτι καὶ ἄλλα φυσικὰ στοιχεῖα ἐκτὸς τοῦ Οὐρανίου καὶ τοῦ Θορίου θὰ ἀνακαλυφθοῦν καὶ τὰ ὁποῖα θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ ὑποβληθοῦν εἰς πυρηνικὰς ἀντιδράσεις. Ἐὰν μάλιστα κατορθωθῇ νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παραγωγὴν ἐνεργείας ὁ πυρὴν τοῦ Ὑδρογόνου, τότε θὰ διαθέτῃ ὁ ἄνθρωπος μίαν ἀνεξάντλητον πηγὴν ἐνεργείας μὲ ἀπείρους δυνατότητας. Τοιουτοτρόπως ὅμως (καὶ μέχρι τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ ἀτομοκινήτου κινητῆρος) θὰ ὑποστῇ μίαν ἐξέλιξιν καὶ ὁλόκληρος ἡ βιομηχανία ἠλεκτρισμοῦ, ἡ ὁποία θὰ ἦτο ἀδύνατος ἄνευ τῆς ὑπάρξεως τοῦ γιγαντιαίου ταμιευτῆρος τῆς ἀτομικῆς ἐνεργείας. Πλοῦτος ὅμως ἐνεργείας τοιαύτης μορφῆς θὰ ἀποτελέσῃ τὸν πραγματικὸν πλοῦτον τοῦ κόσμου. Καθόσον, ὡς γνωστόν, εἶναι τόσον σοβαρὰ ἡ συμβολὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ τὴν πρόοδον ἑνὸς λαοῦ, ὥστε ἡ μέση ἀνὰ κάτοικον ἐτησίως καταναλισκομένη ποσότης βὰτ νὰ λαμβάνεται ὡς δείκτης τῆς βαθμίδος πολιτισμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ λαὸς οὗτος.

Τοιουτοτρόπως ὅλαι αἱ ἐνδείξεις συνηγοροῦν εἰς τὸ ὅτι ἡ ἀτομικὴ ἐνέργεια ἐγκαινιάζει μίαν νέαν περίοδον εἰς τὴν Τεχνικήν, τὴν περίοδον τῆς Ἀτομικῆς Τεχνικῆς καὶ ὅτι ἓν σοβαρώτατον καθῆκον ἐπιπίπτει εἰδικώτερον ἐπὶ τῆς ἐνεργειακῆς οἰκονομίας τοῦ κόσμου.

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

§ 12. *Ὕβωσις κυκλικῆς πλακὸς ὑποβαλλομένης εἰς περιμετρικὴν θλῖψιν καὶ συνάμα εἰς κατακόρυφον φόρτισιν.*

α) Τὸ κατακόρυφον φορτίον εἶναι ὁμοιομόρφως κατανεμημένον ἐφ' ὅλης τῆς πλακός. Πλὴν τῆς ὁμοιομόρφου περιμετρικῆς θλίψεως $n_r = -n$ ἡ πλὰξ ὑποβάλλεται καὶ εἰς ὁμοιόμορφον καθολικὴν κατακόρυφον φόρτισιν p. Ἐκ τῆς ἐξ. (153), μὲ

$$n_r = -n\ ,\ P = 0\ ,\ p = \text{σταθ.}\ \text{καὶ} \int p r dr = p \int_0^r r dr = $$

$$= p\,\frac{r^2}{2}\ ,\ \text{λαμβάνομεν}$$

$$r\vartheta'' + \vartheta' - \left(\frac{1}{r} - \frac{n}{N}\,r\right)\vartheta = \frac{p}{2N}\,r^2$$

καὶ ἂν εἰσαγάγωμεν πάλιν, συμφώνως πρὸς ἐξ. (101), $\lambda^2 = n/N$

$$r^2\vartheta'' + r\vartheta' + (\lambda^2 r^2 - 1)\,\vartheta = \frac{p}{2N}\,r^3\ . \tag{180}$$

Μία μερικὴ λύσις τῆς ἀνομοιογενοῦς ταύτης διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ $\vartheta_1 = \dfrac{pr}{2\lambda^2 N}$, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦμεν δι' εἰσαγωγῆς τῆς τιμῆς ταύτης εἰς ἐξ. (180). Ἡ γενικὴ λύσις τῆς ὁμοιογενοῦς (πρβλ. ἐξ. 155) εὑρέθη εἰς § 11, διδομένη ὑπὸ τῆς ἐξ. (161), ἤτοι $\vartheta_0 = c_1.J_1(\lambda r) + c_2.Y_1(\lambda r)$. Ἄρα ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξ. (180) θὰ εἶναι

$$\vartheta = \frac{pr}{2\lambda^2 N} + c_1.J_1(\lambda r) + c_2.Y_1(\lambda r) \tag{181}$$

ἤ, λόγῳ μηδενισμοῦ τῆς ϑ εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς $(r=0)$, ἐξ οὗ προκύπτει $c_2 = 0$.

$$\vartheta = \frac{pr}{2\lambda^2 N} + c_1.J_1(\lambda r)\,. \tag{181'}$$

Δι' ὁλοκληρώσεως πρὸς r εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ βέλους κάμψεως

$$w = \frac{pr^2}{4\lambda^2 N} + c_1 \int J_1(\lambda r)\,dr + c$$

ἢ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (174')

$$w = \frac{pr^2}{4\lambda^2 N} - \frac{c_1}{\lambda}.J_0(\lambda r) + c\ ,$$

Διὰ $r = \alpha$ εἶναι $w = 0$ καὶ ἑπομένως $c = \dfrac{c_1}{\lambda}.J_0(\lambda\alpha) - $

$- \dfrac{p\alpha^2}{4\lambda^2 N}$, ὁπότε

$$w = \frac{p}{4\lambda^2 N}\,(r^2 - \alpha^2) + \frac{c_1}{\lambda}\left[J_0(\lambda\alpha) - J_0(\lambda r)\right]. \tag{182}$$

Ἐὰν ἡ πλὰξ εἶναι *πεπακτωμένη* κατὰ τὴν περίμετρον αὐτῆς, θὰ ἰσχύῃ ἡ συνοριακὴ συνθήκη: $\vartheta = 0$ διὰ $r = \alpha$, δηλαδὴ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (181')

$$0 = \frac{p\alpha}{2\lambda^2 N} + c_1.J_1(\lambda\alpha)\ \ \text{ἐντεῦθεν δὲ}$$

$$c_1 = -\frac{p\alpha}{2\lambda^2 N}\cdot\frac{1}{J_1(\lambda\alpha)}\quad \text{καὶ}$$

$$w = \frac{p\alpha^2}{4\lambda^2 N}\left\{\frac{2}{\lambda\alpha}\cdot\frac{J_0(\lambda r) - J_0(\lambda\alpha)}{J_1(\lambda\alpha)} - 1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right\}. \tag{183}$$

Διὰ πλάκα ***ἀρθρωτῶς στηριζομένην*** ἡ συνοριακὴ συνθήκη θὰ εἶναι: $m_r = 0$ διὰ $r = \alpha$, ἤτοι τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (139''), (177') καὶ (181')

$$(1+\mu)\frac{p\alpha}{2\lambda^2 N} + c_1 \lambda\alpha . J_0(\lambda\alpha) - c_1(1-\mu).J_1(\lambda\alpha) = 0$$

ἐντεῦθεν δὲ

$$c_1 = \frac{p\alpha}{2\lambda^2 N} \cdot \frac{1+\mu}{(1-\mu).J_1(\lambda\alpha) - \lambda\alpha . J_0(\lambda\alpha)}$$

καὶ ἐκ τῆς ἐξ. (182)

$$w = \frac{p\alpha^2}{4\lambda^2 N}\left[\frac{2}{\lambda\alpha}\cdot\frac{(1+\mu)\left[J_0(\lambda\alpha) - J_0(\lambda r)\right]}{(1-\mu).J_1(\lambda\alpha) - \lambda\alpha . J_0(\lambda\alpha)} - \right.$$

$$\left. - 1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right]. \qquad (184)$$

Συνεπείᾳ τῆς κατακορύφου φορτίσεως p ἡ πλὰξ κάμπτεται, ἡ δὲ ἀναζήτησις τῆς συνθήκης ὑβώσεως συμπίπτει ἐν προκειμένῳ μὲ τὴν ἀναζήτησιν τῆς λ, δι' ἣν τὸ βέλος w καθίσταται ἀπείρως μέγα (πρβλ. § 2). Ἐκ τῶν ἐξ. (183), (184) συνάγομεν, ὅτι διὰ τὴν πεπακτωμένην πλάκα γίνεται $w = \infty$ διὰ τὰς τιμὰς λα ἴσας πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $J_1(\lambda\alpha) = 0$, ἐνῷ διὰ πλάκα ἀρθρωτῶς στηριζομένην $w = \infty$ καθιστοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(1-\mu) J_1(\lambda\alpha) - \lambda\alpha . J_0(\lambda\alpha) = 0$. Συγκρίνοντες πρὸς τὰς ἐξ. (166) καὶ (178) συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ὕβωσις παράγεται διὰ τὰς ἰδίας ἀκριβῶς τιμὰς τῆς θλίψεως n_K, δι' ἃς καὶ ἡ ἐν τῇ προηγουγένῃ § 11 ἐξετασθεῖσα πλάξ, ἄνευ κατακορύφου φορτίσεως p.

β) Εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς ἐνεργεῖ τὸ συγκεντρωμένον φορτίον P: Ἐὰν εἰς ἐξ. (153) θέσωμεν $n_r = -n$, $p = 0$, λαμβάνομεν

$$r\vartheta'' + \vartheta' - \left(\frac{1}{r} - \frac{n}{N} r\right)\vartheta = \frac{P}{2\pi N}$$

ἤ, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ (101)

$$r^2\vartheta'' + r\vartheta' + (\lambda^2 r^2 - 1)\vartheta = \frac{P}{2\pi N} r . \qquad (185)$$

Ταύτης μερικὴ λύσις εἶναι ἡ $\vartheta_1 = P/2\pi\lambda^2 N r$, ἄρα ἡ γενικὴ λύσις ἔσεται

$$\vartheta = \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\cdot\frac{1}{r} + c_1 . J_1(\lambda r) + c_2 . Y_1(\lambda r) \qquad (186)$$

ὅπου ἐνταῦθα $c_2 \neq 0$, ἐπειδὴ εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς $(r = 0)$ μηδενίζεται μόνον ὁ 2ος ὅρος $c_1 . J_1(\lambda r)$, ἐνῷ οἱ δύο λοιποὶ καθίστανται ἀπείρως μεγάλοι, ἡ δὲ τιμὴ τῆς θ δέον νὰ παραμένῃ πεπερασμένη καὶ δὴ ἴση πρὸς μηδέν.

Δι' ὁλοκληρώσεως πρὸς r εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξ. (186)

$$w = \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\cdot \ln r + c_1 \int J_1(\lambda r)\, dr + c_2 \int Y_1(\lambda r) dr + c_3$$

ἤ, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (174') καὶ τῆς

$$\left.\begin{aligned} Y_1(\lambda r) &= -\frac{d}{d(\lambda r)} Y_0(\lambda r) \\ \int Y_1(\lambda r) . d(\lambda r) &= - Y_0(\lambda r)\ (45) \end{aligned}\right\} \qquad (187)$$

$$w = \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\cdot \ln r - \frac{c_1}{\lambda} J_0(\lambda r) - \frac{c_2}{\lambda} Y_0(\lambda r) + c_3 . \ (188)$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς σταθερᾶς c_2 χρησιμοποιοῦμεν τὴν συνθήκην: $\vartheta = 0$ διὰ $r = 0$. Ἡ συνάρτησις $Y_1(\lambda r)$ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξ. (163), ἢ ἂν θέσωμεν χάριν ἁπλοποιήσεως

$$2.4 \ldots . 2\nu . 4.6 \ldots . (2+2\nu) = 2^{\nu}(1.2 \ldots \nu) . 2^{\nu}(2.3 \ldots (1+\nu))$$
$$= \nu!\,(1+\nu)!\,2^{2\nu}$$

ὑπὸ τῆς

$$Y_1(\lambda r) = J_1(\lambda r) . \ln(\lambda r) - \frac{1}{\lambda r} -$$

$$- \frac{\lambda r}{4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,(1+\nu)!}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2\nu} . \varrho_{1\nu} \qquad (163')$$

ἔνθα

$$\varrho_{1\nu} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1+\nu}\right) .$$

Διὰ νὰ παραμένῃ πεπερασμένη ἡ τιμὴ θ εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς δέον εἰς τὴν ἐξ. (186) οἱ ὅροι, οἵτινες περιέχουν τὴν μεταβλητὴν r εἰς τὸν παρονομαστήν, ν' ἀλληλαναιροῦνται, ἤτοι ὁ πρῶτος ὅρος $\frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\cdot\frac{1}{r}$ νὰ ἀναιρῆται ὑπὸ τοῦ ὅρου $-\frac{c_2}{\lambda r}$, ὀφειλομένου εἰς τὸν 2ον ὅρον τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἐξ. (163'). Οὕτω εὑρίσκομεν

$$C_2 = \frac{P}{2\pi\lambda N} \qquad (189)$$

$$\text{καὶ} \quad \vartheta = \frac{P}{2\pi\lambda N}\left[\frac{1}{\lambda r} + Y_1(\lambda r)\right] + c_1 . J_1(\lambda r). \qquad (186')$$

Ἡ ἐξ. (188) γίνεται

$$w = \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\left[\ln r - Y_0(\lambda r)\right] - \frac{c_1}{\lambda} J_0(\lambda r) + c_3$$

ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν τῇ βοηθείᾳ τῶν συνοριακῆς συνθήκης: $w = 0$ διὰ $r = \alpha$, τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς c_3

$$c_3 = \frac{c_1}{\lambda} J_0(\lambda\alpha) - \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\left[\ln\alpha - Y_0(\lambda\alpha)\right] \qquad (190)$$

καὶ ἐπομένως

$$w = \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\left[\ln\frac{r}{\alpha} + Y_0(\lambda\alpha) - Y_0(\lambda r)\right] +$$

$$+ \frac{c_1}{\lambda}\left[J_0(\lambda\alpha) - J_0(\lambda r)\right]. \qquad (188')$$

Ἐὰν ἡ πλὰξ εἶναι ***πεπακτωμένη*** κατὰ τὴν περίμετρον $r = \alpha$, θὰ ἰσχύῃ ἡ συνοριακὴ συνθήκη: $\vartheta = 0$ διὰ $r = \alpha$ καὶ προσδιορίζομεν οὕτω ἐκ τῆς ἐξ (186') τὴν σταθερὰν c_1, ἤτοι

$$c_1 = -\frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\cdot\frac{1 + \lambda\alpha . Y_1(\lambda\alpha)}{\alpha . J_1(\lambda\alpha)} \qquad (191)$$

περαιτέρω δὲ ἐκ τῆς ἐξ. (188') τὸ βέλος κάμψεως

$$w = \frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\left\{\ln\frac{r}{\alpha} + Y_0(\lambda\alpha) - Y_0(\lambda r) - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + \lambda\alpha . Y_1(\lambda\alpha)}{\lambda\alpha . J_1(\lambda\alpha)}\left[J_0(\lambda\alpha) - J_0(\lambda r)\right]\right\} \qquad (192)$$

Κατὰ ταῦτα, πλὰξ κυκλικὴ πεπακτωμένη, φορτιζομένη εἰς τὸ κέντρον διὰ συγκεντρωμένου φορτίου P καὶ περιμετρικῶς θλιβομένη ὑπὸ δυνάμεως $n = \lambda^2 N$, ὑφίσταται κάμψιν, ἧς τὸ βέλος δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξ. (192). Αἱ ἐντὸς ἀγκύλης ἐκφράσεις $J_0(\lambda\alpha)$, $J_0(\lambda r)$, $J_1(\lambda\alpha)$ παρέχονται ἐν ἀναπτύξει ὑπὸ τῶν ἐξ (175), (162) αἱ δὲ $Y_0(\lambda\alpha)$, $Y_0(\lambda r)$, $Y_1(\lambda\alpha)$ ἐκ τῆς ἐξ. (160) διὰ $m = 0, 1$, ἢ καὶ τῶν ἐξ. (163), (163'). Διὰ καταλλήλων μετασχηματισμῶν εὑρίσκομεν [46]

(45) Βλ. πίνακες Jahnke u. Emde, σελ. 94. Μεταξὺ τῶν συναρτήσεων 2ου εἴδους $Y_1(u)$ καὶ $Y_0(u)$ 1ης καὶ μηδ)κῆς τάξεως ἰσχύει σχέσις ἐντελῶς ἀνάλογος πρὸς τὴν (174').

(46) Βλ. ὑποσημ. (45)

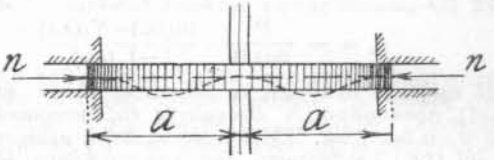
$$Y_0(u)=J_0(u)\,.\,\ln u+(u/2)^2-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(u/2)^4}{2!^2}+$$
$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(u/2)^6}{3!^2}-\ldots\ldots\ldots \qquad (193)$$

$$Y_1(u)=J_1(u)\,.\ln u-\frac{1}{u}J_0(u)-\frac{u}{2}+$$
$$+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(u/2)^3}{1!\,2!}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(u/2)^5}{2!\,3!}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots=-Y'_0(u)\,. \qquad (194)$$

Διὰ μικρὰς τιμὰς r γίνεται $J_0(\lambda r)\to 1$, $J_0(\lambda r)\,.\ln(\lambda r) = J_0(\lambda r)\,[\ln\lambda+\ln r\,]\to \ln\lambda+\ln r$, $Y_0(\lambda r)\to \ln\lambda+\ln r$ καὶ

$\ln\frac{r}{\alpha}-Y_0(\lambda r)=\ln r-\ln\alpha-Y_0(\lambda r)\to\ln r-\ln\alpha-\ln\lambda-\ln r= -\ln(\lambda\alpha)$. Διὰ $r\to 0$ ἡ ἐντὸς ἀγκύλης τῆς ἐξ. (192) παράστασις $\ln\frac{r}{\alpha}-Y_0(\lambda r)$ τείνει πρὸς $-\ln(\lambda\alpha)$, τὸ βέλος w διατηρεῖται πεπερασμένον. Ὕβωσις παράγεται καὶ πάλιν διὰ τιμὰς λα ἴσας πρὸς τὰς ρίζας ἐξισώσεως $J_1(\lambda\alpha)=0$, ἤτοι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῆς θλίψεως n_K, δι' ἃς ὑβοῦται ἡ πεπακτωμένη πλὰξ ἄνευ συγκεντρωμένου φορτίου P, ἐξετασθεῖσα εἰς § 11.

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὸ φορτιζόμενον κέντρον τῆς πλακὸς τηρεῖται ***ἀκίνητον***. Μεταπίπτομεν τότε εἰς τὴν



Σχ. 48 α

περίπτωσιν κυκλικῆς πλακός, ὑποβαλλομένης εἰς περιμετρικὴν θλῖψιν, πεπακτωμένης γύρωθεν καὶ ***συνάμα στηριζομένης εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς*** (σχ. 48 α). Προστίθεται ἡ συνοριακὴ συνθήκη: w=0 διὰ r=0.

ΠΙΝΑΞ IV ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΙΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ (196)

λa	$Y_1(\lambda a)$	$J_1(\lambda a)$	$\lambda a . Y_1(\lambda a)$	$\lambda a . J_1(\lambda a)$	$L(\lambda a)=\frac{1+\lambda a Y_1(\lambda a)}{\lambda a . J_1(\lambda a)}$	$\ln(\lambda a)$	$Y_0(\lambda a)$	$J_0(\lambda a)$	$\ln(\lambda a)-Y_0(\lambda a)$	$1-J_0(\lambda a)$	$R(\lambda a)=\frac{\ln(\lambda a)-Y_0(\lambda a)}{1-J_0(\lambda a)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
4	+0,6174	-0,0660	+2,4696	-0,2640	-13,140	1,3863	-0,0727	-0,3971	+1,4590	+1,3971	+1,043
4,5	+0,4460	-0,2311	+2,0070	-1,0399	-2,950	1,5041	-0,3430	-0,3205	+1,8471	+1,3205	+1,400
5	+0,1943	-0,3276	+0,9715	-1,6380	-1,203	1,6094	-0,5052	-0,1776	+2,1146	+1,1776	+1,798
5,5	-0,0769	-0,3414	-0,4229	-1,8777	-0,308	1,7047	-0,5340	-0,0068	+2,2387	+1,0068	+2,220
6	-0,3070	-0,2767	-1,8420	-1,6602	+0,507	1,7918	-0,4352	+0,1506	+2,2270	+0,8494	+2,620
6,5	-0,4484	-0,1538	-2,9146	-0,9997	+1,915	1,8718	-0,2420	+0,2601	+2,1138	+0,7399	+2,855
6,6	-0,4633	-0,1250	-3,0578	-0,8250	+2,490	1,8871	-0,1963	+0,2740	+2,0834	+0,7260	+2,870
6,7	-0,4736	-0,0953	-3,1731	-0,6385	+3,400	1,9021	-0,1495	+0,2851	+2,0516	+0,7149	+2,870
6,8	-0,4791	-0,0652	-3,2579	-0,4434	+5,080	1,9169	-0,1018	+0,2931	+2,0187	+0,7069	+2,860
6,9	-0,4799	-0,0349	-3,3113	-0,2408	+9,590	1,9315	-0,0538	+0,2981	+1,9853	+0,7019	+2,830
7,0	-0,4760	-0,0047	-3,3320	-0,0329	+70,880	1,9459	-0,0060	+0,3001	+1,9519	+0,6999	+2,785
7,1	-0,4675	+0,0252	-3,3192	+0,1789	-12,950	1,9601	+0,0412	+0,2991	+1,9189	+0,7009	+2,740
7,2	-0,4546	+0,0543	-3,2731	+0,3910	-5,820	1,9741	+0,0873	+0,2951	+1,8868	+0,7049	+2,675
7,3	-0,4375	+0,0826	-3,1937	+0,6030	-3,640	1,9879	+0,1320	+0,2882	+1,8559	+0,7118	+2,605
7,4	-0,4163	+0,1096	-3,0806	+0,8110	-2,560	2,0015	+0,1747	+0,2786	+1,8268	+0,7214	+2,530
7,5	-0,3914	+0,1352	-2,9355	+1,0140	-1,910	2,0149	+0,2151	+0,2663	+1,7998	+0,7337	+2,450
8,0	-0,2212	+0,2346	-1,7696	+1,8768	-0,410	2,0794	+0,3709	+0,1717	+1,7085	+0,8283	+2,060
8,5	-0,0091	+0,2731	-0,0773	+2,3213	+0,397	2,1401	+0,4293	+0,0419	+1,7108	+0,9581	+1,785
9,0	+0,1921	+0,2453	+1,7289	+2,2077	+1,236	2,1972	+0,3821	-0,0903	+1,8151	+1,0903	+1,665
9,1	+0,2271	+0,2324	+2,0666	+2,1148	+1,450	2,2083	+0,3612	-0,1142	+1,8471	+1,1142	+1,658
9,2	+0,2595	+0,2174	+2,3874	+2,0001	+1,693	2,2192	+0,3368	-0,1367	+1,8824	+1,1367	+1,656
9,3	+0,2889	+0,2004	+2,6868	+1,8637	+1,970	2,2300	+0,3094	-0,1577	+1,9206	+1,1577	+1,660
9,4	+0,3151	+0,1816	+2,9619	+1,7070	+2,320	2,2407	+0,2791	-0,1768	+1,9616	+1,1768	+1,668
9,5	+0,3381	+0,1613	+3,2119	+1,5323	+2,745	2,2513	+0,2463	-0,1939	+2,0050	+1,1939	+1,679
10	+0,3962	+0,0435	+3,9620	+0,4350	+11,400	2,3026	+0,0589	-0,2459	+2,2437	+1,2429	+1,805

Ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι

$$\underset{r\to 0}{\text{ὅρ.}}\left[\ln\frac{r}{\alpha}\,Y_0(\lambda r)\right]=-\ln(\lambda\alpha),$$

λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (188').

$$0=\frac{P}{2\pi\lambda^2 N}\left[-\ln(\lambda\alpha)+Y_0(\lambda\alpha)\right]+\frac{c_1}{\lambda}\left[J_0(\lambda\alpha)-1\right]$$

ἤτοι

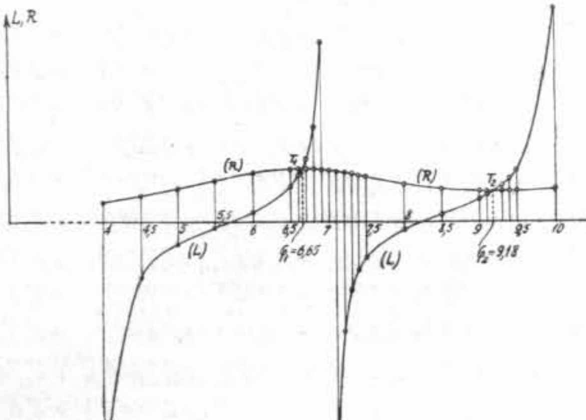
$$c_1=-\frac{P}{2\pi\lambda N}\cdot\frac{\ln(\lambda\alpha)-Y_0(\lambda\alpha)}{1-J_0(\lambda\alpha)}. \qquad (195)$$

Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς c_1 δίδεται ἐξ ἄλλου ὑπὸ τῆς ἐξ. (191), προκυψάσης δι' ἐφαρμογῆς τῆς συνοριακῆς συνθήκης $\vartheta=0$ διὰ $r=\alpha$. Ἐξισοῦντες τὰ δεξιὰ μέλη τῶν ἐξ. (191) καὶ (195) λαμβάνομεν ἄρα τὴν συνθήκην ὑβώσεως τῆς στηριζομένης ὡς ἐν σχ. (48α) πλακός, ἤτοι

$$\frac{1+\lambda\alpha.Y_1(\lambda\alpha)}{\lambda\alpha.J_1(\lambda\alpha)}=\frac{\ln(\lambda\alpha)-Y_0(\lambda\alpha)}{1-J_0(\lambda\alpha)} \qquad (196)$$

Αἱ ρίζαι $\lambda\alpha=\varphi_i$ $(i=1, 2, 3\ldots)$ τῆς συνθήκης (196) παρέχουν τὴν κρίσιμον θλῖψιν ὑβώσεως $n_\kappa=\varphi_i^2\,N/\alpha^2$ (πρβλ. ἐξ. 167).

Τὰς ρίζας φ_i προσδιορίζομεν γραφικῶς. Παραστήσωμεν χάριν συντομίας διὰ $L(\lambda\alpha)$ τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς ἐξ. (196), διὰ $R(\lambda\alpha)$ τὸ δεξιὸν μέλος αὐτῆς καὶ χαράξωμεν διὰ διαφόρους τιμὰς $\lambda\alpha$ τὰς καμπύλας L καὶ R. Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων τομῆς τῶν καμπυλῶν τούτων δίδουν τὰς ρίζας $\lambda\alpha=\varphi_i$. Εἰς σχ. 49 εἰκονίζονται αἱ καμπύλαι L καὶ R εἰς τὸ διάστημα $\lambda\alpha=4-10$, διὰ τὴν χάραξιν τῶν ὁποίων ἐχρησιμοποιήθησαν τὰ δεδομένα τῆς 6ης καὶ 12ης στήλης τοῦ πίνακος IV. Αἱ πρὸς καταρτισμὸν τοῦ πίνακος ἀναγκαῖαι τιμαὶ J_0, J_1, Y_0, Y_1 ἐλήφθησαν ἐκ τῶν πινάκων Jahnke u. Emde.



Σχ. 49

Ἐν σχ. 49 προσδιορίζομεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τομῆς $T_1, T_2,\ldots$ τῶν καμπυλῶν L, R, ἤτοι τὰς $\varphi_1=6{,}65$, $\varphi_2=9{,}18\ldots.$ Παρατηροῦμεν ὅτι $\min\varphi_i=6{,}65$

ἄρα

$$\min c_\kappa=\left(\frac{6{,}65}{\pi}\right)^2.\sigma_e=4{,}486\,.\,\sigma_e \qquad (197)$$

καὶ διὰ χαλυβδίνην πλάκα, συμφώνως πρὸς ἐξ. (171)

$$\min c_\kappa=4{,}486.1898\left(\frac{h}{a}\right)^2\simeq 8514\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2 \qquad (198)$$

Συγκρίνοντες μὲ ἐξ. (170), (172), (179) συνάγομεν, ὅτι ἡ πεπακτωμένη κατὰ τὴν περίμετρον καὶ στηριζομένη εἰς τὸ κέντρον κυκλικὴ πλὰξ ὑφίσταται ὕβωσιν συνεπείᾳ θλίψεως τριπλασίας περίπου ἢ ἡ κατὰ τὴν περίμετρον μόνον πεπακτωμένη πλάξ, καὶ ὑπερδεκαπλασίας ἢ ἡ ἀρθρωτῶς γύρωθεν στηριζομένη πλάξ.

ΜΕΡΟΣ Β'.

§ 13. *Τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως τῆς ἐν τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ καὶ καθέτως πρὸς αὐτὸ ἐντεινομένης πλακός. Ἡ ἐνεργειακὴ συνθήκη ὑβώσεως τῆς πλακός.* (17)

Ἀναφέρωμεν τὴν πλάκα εἰς ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων Oxyz καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι αὕτη ὑποβάλλεται εἰς φόρτισιν $p=f(x, y)$ καθέτως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον, ἐπὶ πλέον δὲ κατὰ τὸ περίγραμμα αὐτῆς εἰς ἐπίπεδον φόρτισιν s_x, s_y, t_{xy}, t_{yx} παραλλήλως πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον (πβλ. § 7, Σχ. 15), ὁμοιομόρφως κατανεμημένην καθ' ὅλον τὸ πάχος h τοῦ περιγράμματος. Ἡ κάθετος φόρτισις p, θεωρουμένη ὡς μόνη ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς πλακός, δημιουργεῖ ἐντατικὴν κατάστασιν καθοριζομένην ὑπὸ τῶν καμπτικῶν ροπῶν m_x, m_y, τῆς ροπῆς συστροφῆς m_{xy} καὶ τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων q_x, q_y (πρβλ. § 4), ἐνῷ μόνη ἡ ἐπίπεδος φόρτισις s, t προκαλεῖ ἐντατικὴν κατάστασιν ἐπίπεδον, μὲ ὀρθὰς καὶ διατμητικὰς δυνάμεις n_x, n_y, n_{xy}, θεωρουμένας καὶ ταύτας ὡς γνωστὰς συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων x, y (προβλ. § 7). Κατὰ τὴν συνύπαρξιν τῶν φορτίσεων p καὶ s, t ἡ ἐντατικὴ κατάστασις τῆς πλακὸς θ' ἀποτελῇ ἐπαλληλίαν τῶν μερικῶν ἐντατικῶν καταστάσεων τῶν ὀφειλομένων εἰς ἕκαστον τῶν δυναμικῶν συστημάτων p καὶ s, t.

Ὑποθέσωμεν περαιτέρω, ὅτι ἡ εἰς τὴν σύγχρονον φόρτισιν p καὶ s, t ἀντιστοιχοῦσα παραμόρφωσις τῆς πλακὸς συνετελέσθη καὶ ὅτι ἡ πλὰξ τελεῖ ἐν ἠρεμίᾳ ἐν τῇ τελικῇ καταστάσει ἐντάσεως καὶ παραμορφώσεως αὐτῆς, ζητήσωμεν δὲ νὰ ἐξακριβώσωμεν κατὰ πόσον ἡ τελικὴ αὕτη κατάστασις ἰσορροπίας εἶναι εὐσταθὴς ἢ οὔ. Δώσωμεν πρὸς τοῦτο εἰς τὴν πλάκα ***ἀπειροστὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν***, πέραν τῆς ἤδη συντελεσθείσης, συμβιβαζομένην πρὸς τὰς συνθήκας στηρίξεως, καὶ ἐφαρμόσωμεν ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν (3) τὴν ἀρχὴν τῶν δυνατῶν ἔργων διὰ τὴν δυνατὴν ταύτην παραμόρφωσιν καὶ τὴν πραγματικὴν ἐντατικὴν κατάστασιν τῆς πλακός, συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα εἰς § 1. Ἐὰν παραστήσωμεν χάριν συντομίας μὲ $\underline{A}_\xi\equiv\Sigma\underline{P}.\underline{\Delta\delta}$ τὸ δυνατὸν ἔργον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καὶ εἰσαγάγωμεν ἀντὶ ΔΑ τὴν παράστασιν $\underline{A}_\pi$ τοῦ δυνατοῦ ἔργου παραμορφώσεως, ἡ ἐξ. (3) γράφεται

$$\underline{A}_\pi-\underline{A}_\xi=\Delta^2 A \qquad (199)$$

ἡ δὲ συνθήκη εὐσταθείας $\Delta^2 A>0$ γίνεται

$$\underline{A}_\pi-\underline{A}_\xi>0 \qquad (200)$$

ἢ εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν τῆς μεταπτώσεως ἀπὸ τῆς εὐσταθοῦς εἰς τὴν ἀσταθῆ κατάστασιν

$$\underline{A}_\pi-\underline{A}_\xi=0 \qquad (201)$$

---

(17) Βλ. Bryan «London Mathematical Society Proceedings» 1891 καὶ 1894. Ἐπίσης Timoschenko: «Sur la stabilité des systèmes élastiques», Annales des Ponts et Chaussées 1913 καὶ Zeitschrift f. Math. Phys.» Bd. 58, σελ. 337, 1910 καὶ «Über die Stabilität versteifter Platten» der Eisenbau 1921 καὶ Handbuch der Phys. und techn. Mechanik», Bd. IV 1931. Περαιτέρω βλ. Nadai: «Elastische Platten», Berlin 1925, ἐπίσης Reissner: «Zeitschrift f. Angew. Mathematik und Mechanik», Bd. V 1925, ἐπίσης Geckeler: «Handbuch der Physik» Bd. VI, 1128 ἐπίσης Hartmann: «Knickung, Kippung, Beulung» Leipzig u.Wien, 1937.

(Συνεχίζεται)

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 318)

Ἡ τυχοῦσα δυνατὴ παραμόρφωσις, χαρακτηριζομένη ὑπὸ τῶν δυνατῶν βελῶν κάμψεως $\underline{w}$ τῆς πλακός, εἶναι πραγματοποιήσιμος διὰ τόσῳ μικροτέρας ἐξωτερικῆς ἐπενεργείας (λ. χ. ἐλαφρᾶς κρούσεως), ὅσῳ περισσότερον προσεγγίζει πρὸς τὴν μορφήν, ἣν λαμβάνει ἡ ἐπιφάνεια **κάμψεως κατὰ** τὴν στιγμὴν τῆς μεταπτώσεώς της ἀπὸ τῆς εὐσταθοῦς εἰς τὴν ἀσταθῆ μορφήν, δηλαδὴ ὅσῳ ἡ εἰς τὴν θεωρουμένην δυνατὴν παραμόρφωσιν $\underline{w}$ ἀντιστοιχοῦσα διαφορὰ $\underline{A}_\pi - \underline{A}_\xi$ εἶναι ***μικροτέρα***, ἐγγυτέρα πρὸς τὴν ὁριακὴν τιμὴν μηδὲν τῆς ἐξ. (201). Κατὰ ταῦτα, ἡ ***συνθήκη ὑβώσεως*** τῆς πλακὸς διατυποῦται πληρέστερον ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\underline{A}_\pi - \underline{A}_\xi \begin{cases} \min \\ 0 \end{cases} \qquad (202)$$

ὅπου τὸ διπλοῦν σύμβολον τοῦ δεξιοῦ μέλους ἔχει τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἡ δυνατὴ παραμόρφωσις $\underline{w}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐξ ὑβώσεως παραγομένη, ἐφ' ὅσον καθιστᾷ ***ἐλαχίστην*** τὴν διαφορὰν $\underline{A}_\pi - \underline{A}_\xi$, τείνουσαν ὁριακῶς πρὸς μηδενισμόν.

Ἀρκεσθῶμεν ἐφεξῆς εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς περιπτώσεως, **καθ' ἣν** ἡ πλὰξ ὑποβάλλεται ***μόνον*** εἰς ἐπίπεδον φόρτισιν s, t, τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον φορτίσεως p μηδενιζομένης. Εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς καθαρᾶς ὑβώσεως τῆς πλακός, καθ' ἣν ἡ τυχὸν κύρτωσις τοῦ μέσου ἐπιπέδου αὐτῆς δύναται ν' ἀποδοθῇ μόνον εἰς ἐκφυγὴν τῆς πλακὸς ἀπὸ τῆς ἀσταθοῦς ἐπιπέδου μορφῆς της. Ἐκλέξωμεν ἐξ ἄλλου, καθ' ὃ ἔχομεν δικαίωμα, τὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν $\underline{w}$ τοιαύτην, ὥστε κατὰ τὴν συντέλεσίν της τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων s, t, νὰ παραμένουν ἀκίνητα. Ὁ περιορισμὸς οὗτος ἀποτελεῖ μόνον ἁπλοποίησιν τοῦ ἀκολουθοῦντος ὑπολογισμοῦ, οὐδαμῶς θίγουσαν τὴν γενικότητα τῶν προελευσομένων συμπερασμάτων. Θὰ εἶναι τότε $\underline{A}_\xi = \Sigma \overline{P}.\Delta\overline{\delta} = 0$, ἡ δὲ συνθήκη ὑβώσεως (202) γράφεται

$$\underline{A}_\pi = \begin{cases} \min \\ 0 \end{cases} \qquad (203)$$

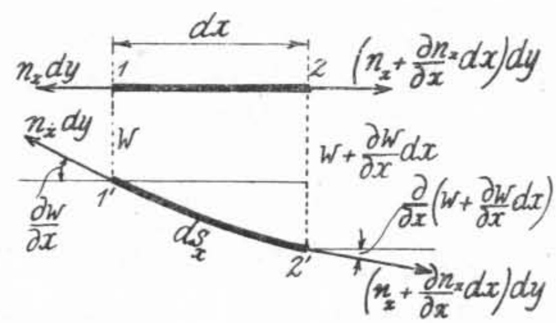
Ὅπως εἰς τὴν ράβδον (βλ. § 2) οὕτω καὶ εἰς τὰς πλάκας τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως A_π ἀναλύεται εἰς δύο ὅρους. Ὁ πρῶτος, ὃν παριστῶμεν $\underline{A}_\mu$, ὀφείλεται εἰς τὴν δυνατὴν μήκυνσιν τοῦ τυχόντος γραμμικοῦ στοιχείου ds τοῦ μέσου ἐπιπέδου, δηλαδὴ εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ μήκους αὐτοῦ ἀπὸ ds εἰς ds + Δds καὶ τὴν ἀλλαγὴν θέσεως αὐτοῦ ἐν τῷ χώρῳ καὶ καλεῖται ***δυνατὸν ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου τῆς πλακός.*** Ὁ δεύτερος ὅρος, παριστώμενος $\underline{A}_\kappa$, προέρχεται ἐκ τῆς δυνατῆς σχετικῆς στροφῆς καὶ ὀλισθήσεως δύο γειτονικῶν παραλλήλων στοιχείων ἐπιφανείας dxdz ἢ dydz τῆς πλακός, εἶναι προϊὸν τῶν εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ μέσου ἐπιπέδου ἀναπτυσσομένων δυνατῶν καμπτικῶν ροπῶν $\underline{m}_x$, $\underline{m}_y$, ροπῶν συστροφῆς $\underline{m}_{xy}$ καὶ τεμνουσῶν δυνάμεων $\underline{q}_x$, $\underline{q}_y$, καλεῖται δὲ ***δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως τῆς πλακός.*** Αἱ τεταγμέναι $\underline{W}$ τῆς δυνατῆς ἐπιφανείας κάμψεως θεωροῦνται πολὺ μικραί, ἐπιτρέπεται ἄρα, ὡς καὶ πρότερον (§ 7), νὰ δεχθῶμεν τὰς παραμέτρους n_x, n_y, n_{xy} τῆς πραγματικῆς ἐπιπέδου ἐντατικῆς καταστάσεως ὡς ἀμεταβλήτους κατὰ τὴν ἐπιτέλεσιν τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως. Λαμβάνομεν οὕτω τὴν συνθήκην ὑβώσεως τῆς πλακὸς ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A_\mu + A_\kappa = \begin{cases} \min \\ 0 \end{cases} \;{}^{(48)} \qquad (204)$$

(48) Παραλείπομεν ἐφεξῆς τὰς κάτωθεν τῶν Αμ, Ακ γραμμὰς δηλωτικὰς τοῦ δυνατοῦ τῆς παραμορφώσεως. Ἐπίσης πρὸς ἁπλουστευσιν γράφομεν κατωτέρω w ἀντὶ $\underline{w}$, Δds ἀντὶ $\underline{\Delta ds}$ κλπ.

Ἔλθωμεν ἤδη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν δυνατῶν ἔργων A_μ, A_κ.

Συνεπείᾳ τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, τὸ στοιχεῖον hdxdy τῆς πλακός, ἐπὶ τῶν ἑδρῶν hdy τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν αἱ ὀρθαὶ δυνάμεις $n_x\,dy$ $\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x}dx\right)dy$, λαμβάνει τὴν θέσιν 1'2' (Σχ. 50), τῶν ἐπὶ τοῦ μέσου ἐπιπέδου ἄκρων αὐτοῦ 1, 2 μετακινουμένων κατακορύφως κατὰ w καὶ $w + \frac{\partial w}{\partial x}dx$ (48). Ἡ ὀρθὴ δύναμις $n_x\,dy$ κλίνει, μετὰ τὴν ἐπιτέλεσιν τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial w}{\partial x}$, ἡ $\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x}dx\right)dy$ ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right)$, τὸ δὲ μῆκος dx τοῦ στοιχείου ἐπιμηκύνεται εἰς ds_x.



Σχ. 50

Ἐκ Σχ. 50 προκύπτει:

$$ds_x^2 = dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx^2 = dx^2\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

ἄρα συμφώνως πρὸς ἐξ. (6) τῆς § 2

$$ds_x = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \cong dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

καὶ

$$ds_x - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (205)$$

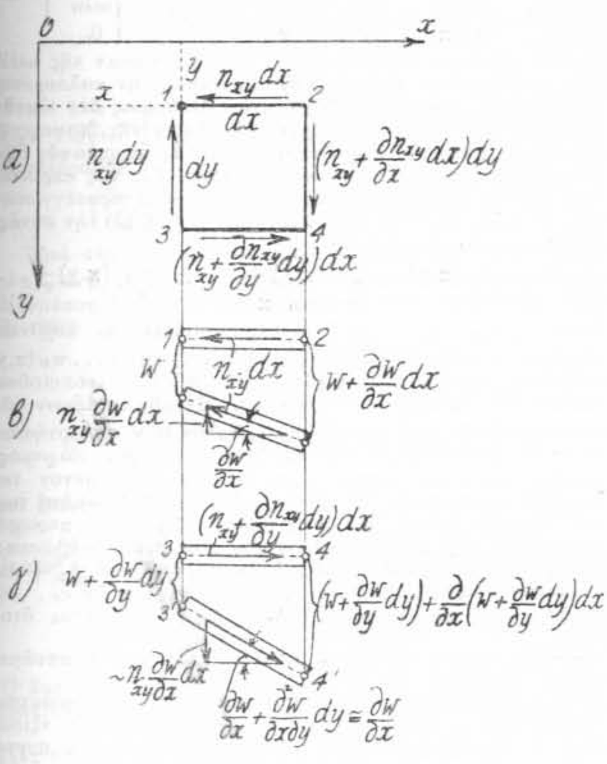
Παραλειπομένων τῶν μεταβολῶν τῆς $n_x\,dy$ καὶ τῆς κλίσεώς της κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τῆς ἕδρας x εἰς τὴν x + dx — τῶν μεταβολῶν τούτων παρεχουσῶν ἀπειροστὴν ἀνωτέρας τάξεως συμβολὴν εἰς τὸ δυνατὸν ἔργον τῶν ὀρθῶν δυνάμεων $n_x.\,dy$ — ἀπομένει ὡς στοιχειῶδες δυνατὸν ἔργον τῶν ὀρθῶν τούτων δυνάμεων τὸ γινόμενον

$$n_x dy\left(ds_x - dx\right) = n_x\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy \qquad (206)$$

καὶ ἐντελῶς ἀναλόγως, τὸ στοιχειῶδες δυνατὸν ἔργον τῶν ὀρθῶν δυνάμεων $n_y\,dx$, ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν y, y + dy, εὑρίσκεται ἴσον πρὸς

$$n_y\,dx\,(ds_y - dy) = n_y\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dxdy. \qquad (207)$$

Πλὴν τῶν ὀρθῶν δυνάμεων $n_x dy$, $n_y dx$ ἐπιτελοῦν στοιχειῶδες δυνατὸν ἔργον μηκύνσεως καὶ αἱ τέμνουσαι δυνάμεις $n_{xy}dx$, $n_{xy}dy$. Ὑπολογίσωμεν λ. χ. τὸ στοιχειῶδες ἔργον τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν y, y + dy ἐνεργουσῶν τεμνουσῶν δυνάμεων. Ἡ ἐπὶ τῆς ἕδρας y, ἡ 1—2, (Σχ. 51α) ἐνεργοῦσα τέμνουσα δύναμις $n_{xy}dx$ κλίνει, μετὰ τὴν ἐπιτέλεσιν τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial w}{\partial x}$, ἡ δὲ κατακόρυφος συνιστῶσα αὐτῆς—θετικὴ ὅταν κατευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω—ἔχει τὴν τιμὴν $n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}dx$ (Σχ. 51 β). Ἐπὶ τῆς ἕδρας y + dy, ἢ 3 — 4, ἐνεργεῖ ἡ τέμνουσα δύναμις $\left(n_{xy}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}dy\right)dx$, ἥτις μετὰ τὴν δυνατὴν παραμόρφω-



Σχ. 51

σιν κλίνει ὑπὸ γωνίαν $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dy$, ἴσην περίπου πρὸς $\frac{\partial w}{\partial x}$ ἐὰν παραλειφθῇ ἡ ἀνωτέρας τάξεως μικρὰ μεταβολὴ $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dy$. Ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς τεμνούσης δυνάμεως $\left(n_{xy}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}dy\right)dx$—θετικὴ ὅταν κατευθύνεται πρὸς ἀ κάτω—γίνεται κατὰ ταῦτα (Σχ. 51 γ):

$$\left(n_{xy}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}dy\right)dx.\ \frac{\partial w}{\partial x} \cong n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

ἐὰν καὶ πάλιν παραμεληθῇ τὸ ἀνωτέρας τάξεως ἀπειροστὸν μέγεθος $\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}dxdy$. Κατὰ τὴν δυνατὴν παραμόρφωσιν παράγουν ἔργον μόνον αἱ κατακόρυφοι αὗται συνιστῶσαι $n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}dx$, ἐπειδὴ δὲ αὗται κατευθύνονται ἀντιθέτως, τὰ δὲ σημεῖα ἐφαρμογῆς των ὑφίστανται σχετικὴν πρὸς ἄλληλα μετακίνησιν ἴσην πρὸς $\frac{\partial w}{\partial y}dy$ (49), τὸ δυνατὸν ἔργον τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν $n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}dx$ γίνεται ἴσον πρὸς $+\frac{1}{2}n_{xy}\frac{dw}{dx}dx.\ \frac{dw}{dy}dy$. ***Ὁ πολλαπλασιαστὴς $1/_2$ εἶναι ἐνταῦθα ἀπαραίτητος, καθ' ὅσον αἱ παράγουσαι τὸ δυνατὸν ἔργον κατακόρυφοι συνιστῶσαι δὲν εἶναι σταθεραὶ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ φαινομένου τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, ἀλλ' αὐξάνουν ἀπὸ Ο μέχρι τῆς τελικῆς των τιμῆς $n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}dx$, ὁμοῦ μετὰ τῶν παραμορφώσεων.***

Μὲ ἐντελῶς ἀνάλογον συλλογισμὸν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ δυνατὸν ἔργον τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων $n_{xy}dy$, $\left(n_{xy}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial x}dx,\right)dy$, ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν x, x + dx, ἢ 1—3, 2—4 τοῦ στοιχείου (Σχ. 51α). Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς διὰ τὰς ἕδρας y, y + dy τὸ δυνατὸν ἔργον $+\frac{1}{2}n_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}dy.\ \frac{dw}{dx}dx$, ἑπομένως τὸ ὁλικὸν δυνατὸν ἔργον τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων τοῦ στοιχείου ἴσον πρὸς

$$n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}dxdy. \qquad (208)$$

Τὸ ὁλικὸν δυνατὸν ἔργον τοῦ στοιχείου ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου αὐτοῦ γίνεται ἄρα συμφώνως πρὸς ἐξ. (206), (207) καὶ (208)

$$d\overline{A\mu} = \frac{1}{2}n_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}n_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dxdy + $$
$$+ n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}dxdy \qquad (209)$$

τὸ δὲ ***ὁλικὸν δυνατὸν ἔργον τῆς πλακὸς ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου αὐτῆς***

$$A\mu = \int\int\left[\frac{1}{2}n_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}n_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy. \qquad (210)$$

Ὡς πρὸς τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως A_κ, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παράγουσαι τὸ ἔργον τοῦτο δυναταὶ καμπτικαὶ ῥοπαί, ῥοπαὶ συστροφῆς καὶ τέμνουσαι δυνάμεις $\underline{m}_x$, $\underline{m}_y$, $\underline{m}_{xy}$, $\underline{q}_x$, $\underline{q}_y$ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδὲν κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως, αὐξάνουν δὲ βαθμιαίως μέχρι τῆς τελικῆς των τιμῆς σὺν τῇ ἐξελίξει τοῦ φαινομένου τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως. Πρὸς ὑπολογισμὸν ἄρα τοῦ δυνατοῦ ἔργου κάμψεως ἐφαρμόζεται ὡς ἔχει ὁ τύπος ὑπολογισμοῦ τοῦ πραγματικοῦ ἔργου παραμορφώσεως, διατηρουμένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 1/2. Ἐὰν $\underline{\sigma}$, $\underline{\tau}$ παριστοῦν τὰς τελικὰς ἐντατικὰς παραμέτρους τῆς δυνατῆς παραμορφώσεως εἴς τι σημεῖον x, y, z τῆς πλακός, τὸ ἀνὰ μονάδα ὄγκου εἰς τὴν θέσιν x, y, z ἀνηγμένον ἔργον κάμψεως—ἤτοι τὸ καλούμενον εἰδικὸν ἔργον παραμορφώσεως $\underline{\alpha}$—ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν ἀνωτέρω ἐντατικῶν παραμέτρων ὑπὸ τῆς γνωστῆς σχέσεως (50).

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{2E}\left(\underline{\sigma}_x^2+\underline{\sigma}_y^2+\underline{\sigma}_z^2\right) - \frac{\mu}{E}\left(\underline{\sigma}_x\underline{\sigma}_y+\underline{\sigma}_y\underline{\sigma}_z+\underline{\sigma}_z\underline{\sigma}_x\right) +$$
$$+\frac{1}{2G}\left(\underline{\tau}_{xy}^2+\underline{\tau}_{yz}^2+\underline{\tau}_{zx}^2\right). \qquad (211)$$

Παραλειπομένης τῆς μικρᾶς ἐπιρροῆς τῶν διατμητικῶν παραμέτρων $\underline{\tau}_{yz}$, $\underline{\tau}_{zx}$ καὶ τιθεμένου συμφώνως πρὸς τὰς παραδοχὰς τῆς § 4: $\underline{\sigma}_z = 0$, ἡ ἄνω σχέσις γράφεται:

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{2E}\left(\underline{\sigma}_x^2+\underline{\sigma}_y^2\right) - \frac{\mu}{E}\underline{\sigma}_x\underline{\sigma}_y + \frac{1+\mu}{E}\underline{\tau}_{xy}^2 =$$
$$= \frac{1}{2E}\left[\underline{\sigma}_x^2+\underline{\sigma}_y^2-2\mu\,\underline{\sigma}_x\underline{\sigma}_y+2(1+\mu)\,\underline{\tau}_{xy}^2\right] \qquad (211')$$

(49) Σιωπηρῶς παραμελεῖται καὶ πάλιν ἡ ἀπειροστὴ ἀνωτέρας τάξεως μεταβολὴ $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy$ ἔναντι τῆς $\frac{\partial w}{\partial y}dy$.

(50) Βλ. Ν. Κιτσίκη: Στατικὴ Ι, § 90, σελ. 195.

ὅπου συνάμα τὸ μέτρον ὀλισθήσεως G ἀντικατεστάθη, συμφώνως πρὸς ἐξ. (35), ὑπὸ τοῦ ἴσου του $E/2(1+\mu)$. Ἐκ τῆς ἐξ. (211′) εὑρίσκομεν τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως τοῦ στοιχείου dx.dy.h, ἤτοι

$$dA_\kappa = dxdy \int_{-h/2}^{+h/2} \underline{\alpha}\, dz = \frac{dxdy}{2E} \int_{-h/2}^{+h/2} \Big[\underline{\sigma}_x^2 + \underline{\sigma}_y^2 - 2\mu \underline{\sigma}_x \underline{\sigma}_y + 2(1+\mu)\underline{\tau}_{xy}^2 \Big] dz. \qquad (212)$$

Ἀλλ' εἶναι συμφώνως πρὸς ἐξ. (43′)

$$\underline{\sigma}_x = \frac{\underline{m}_x \cdot z}{h^3/12}, \quad \underline{\sigma}_y = \frac{\underline{m}_y \cdot z}{h^3/12}, \quad \underline{\tau}_{xy} = \frac{\underline{m}_{xy} \cdot z}{h^3/12} \qquad (213)$$

ἄρα

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \underline{\sigma}_x^2\, dz = \left(\frac{\underline{m}_x}{h^3/12}\right)^2 \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{12 \underline{m}_x^2}{h^3},$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \underline{\sigma}_y^2\, dz = \frac{12 \underline{m}_y^2}{h^3}$$

καὶ

$$2\mu \int_{-h/2}^{+h/2} \underline{\sigma}_x \cdot \underline{\sigma}_y \cdot dz = \frac{12}{h^3} \cdot 2\mu\, \underline{m}_x \cdot \underline{m}_y,$$

$$2(1+\mu) \int_{-h/2}^{+h/2} \underline{\tau}_{xy}^2\, dz = \frac{12}{h^3} \cdot 2(1+\mu)\, \underline{m}_{xy}^2.$$

Ἡ ἐξ. (212) λαμβάνει οὕτω τὴν μορφὴν

$$dA_\kappa = \frac{6}{Eh^3}\Big[\underline{m}_x^2 + \underline{m}_y^2 - 2\mu\, \underline{m}_x m_y + 2(1+\mu)\, \underline{m}_{xy}^2 \Big] dxdy. \qquad (214)$$

Εἰσάγομεν ἤδη εἰς ἐξ. (214) τὰς τιμὰς m_x, m_y m_{xy} ἐκ τῶν ἐξ. (43). Κατόπιν ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν

$$dA_\kappa = \frac{6}{Eh^3} N^2 (1-\mu^2) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dxdy$$

ἤ, ἐὰν θέσωμεν $N(1-\mu^2) = Eh^3/12$ (βλ. ἐξ. 42) καὶ χρησιμοποιήσωμεν τὸν διαφορικὸν ἐκτελεστὴν $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (βλ. ἐξ. 45 καὶ 49),

$$dA_\kappa = \frac{N}{2} \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] \right\} dxdy \qquad (215)$$

καὶ ἐντεῦθεν τὸ ὁλικὸν ἔργον ἐκ κάμψεως τῆς πλακὸς

$$A_\kappa = \frac{N}{2} \iint \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] \right\} dxdy \qquad (216)$$

Εἰσάγοντες τὰς ἐκφράσεις A_μ, A_κ ἐκ τῶν ἐξ. (210), (216) εἰς τὴν ἐξ. (204), λαμβάνομεν τὴν συνθήκην ὑβώσεως τῆς ἐν τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ ἐντεινομένης πλακὸς ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left.\begin{aligned} &\iint \left[\frac{1}{2} n_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} n_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + n_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dxdy + \frac{N}{2} \iint \Big\{ (\Delta w)^2 - \\ &- 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] \Big\} dxdy = \begin{cases} \min \\ 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (217)$$

Ἡ συνθήκη (217) ἀποτελεῖ τὴν ἀφετηρίαν τῆς μελέτης προβλημάτων ὑβώσεως πλακῶν κατὰ τὴν καλουμένην *ἐνεργειακὴν μέθοδον*, ἐφαρμόζεται δὲ ὁσάκις δὲν εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν λύσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (82), τὴν ἁρμόζουσαν εἰς τὰς συνοριακὰς συνθήκας τῆς ἐξεταζομένης περιπτώσεως. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον προσεγγίσεων τοῦ W. Ritz, καθ' ἣν εἰσάγομεν εἰς τὴν ἐξ. (217) τὴν συνάρτησιν w ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$w = c_1 w_1(x,y) + c_2 w_2(x,y) + \ldots + c_r w_r(x,y) + \ldots + c_n w_n(x,y) \qquad (218)$$

ἔνθα $c_1, c_2 \ldots c_r \ldots c_n$ ἄγνωστοι συντελεσταὶ τυχόντος πλήθους n καὶ $w_1(x,y)$, $w_2(x,y), \ldots w_r(x,y) \ldots w_n(x,y)$ ἰσάριθμοι τυχοῦσαι συναρτήσεις τῶν x, y ἱκανοποιοῦσαι πάντως τὰς συνοριακὰς συνθήκας. Μεταβαλλομένων τῶν συντελεστῶν c_r ὑπὸ ὡρισμένην ἐκλογὴν τῶν συναρτήσεων $w_r(x,y)$, μεταβάλλεται καὶ τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως $A_\mu + A_\kappa$, προσεγγίζον ἢ ἀπομακρυνόμενον τοῦ ὁριακοῦ μηδενισμοῦ. Ἡ ὑπὸ τῆς ἐξ. (218) διδομένη τιμὴ τοῦ δυνατοῦ βέλους κάμψεως προσεγγίζει τόσῳ περισσότερον πρὸς τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ βέλους ὑβώσεως, ὅσῳ μικρότερον καθίσταται τὸ δυνατὸν ἔργον $A_\mu + A_\kappa$ συνεπείᾳ καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν συντελεστῶν c_r. Διὰ μεταβλητὰ c_r τὸ ἐλάχιστον $(A_\mu + A_\kappa)$ παράγεται ὅταν $\frac{\partial}{\partial c_r}(A_\mu + A_\kappa) = 0$ $(r = 1,2,3 \ldots r \ldots n)$. Ἀποκτῶμεν οὕτω n τὸν ἀριθμόν, ἤτοι ἰσαρίθμους πρὸς τοὺς ἀγνώστους συντελεστὰς c_r γραμμικὰς ὡς πρὸς c_r ὁμογενεῖς ἐξισώσεις, ἐξ ὧν δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς συντελεστὰς (ἀφοῦ ὡς ἐκ τῆς ὁμογενείας τῶν ἐξισώσεων ἡ μία τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀπόρροια τῶν λοιπῶν), ἀσφαλῶς ὅμως τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις. Τὸ κατὰ προσέγγισιν βέλος ὑβώσεως προκύπτει τότε, δυνάμει τῆς ἐξ. (218), ἐκπεφρασμένον συναρτήσει τῶν $w_r(x,y)$ καὶ ἑνὸς μόνου (ἀντὶ n) ἀγνώστου συντελεστοῦ, ἐνῷ τὸ κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως θὰ προκύψῃ κατ' ἀρχὴν ἐκ τῆς συνθήκης μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων $\frac{\partial}{\partial c_r}(A_\mu + A_\kappa) = 0$. Ὁ ἀριθμὸς n τῶν ὅρων τῆς ἐξ. (218) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐπιδιωκομένης ἀκριβείας προσεγγίσεως: αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ n αὐξάνει προφανῶς καὶ ἡ ἀκρίβεια προσεγγίσεως τῆς ἐκλεγείσης λύσεως.

Εἴς τινας ἁπλᾶς περιπτώσεις εἶναι δυνατόν, λόγῳ τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος, νὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν ἐκλογὴν n = 1, ἤτοι νὰ εἰσαγάγωμεν

$$w = c_1 w_1(x,y) \qquad (218')$$

ὁπότε θὰ ἐφαρμόσωμεν πλέον τὴν συνθήκην (217) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A_\mu + A_\kappa = 0$$

αὕτη δὲ θὰ παράσχῃ συνάμα τὴν συνθήκην, ἐξ ἧς θὰ ὑπολογισθῇ τὸ κατὰ μεγάλην ἢ μικρὰν προσέγγισιν ἀκριβὲς κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως.

§ 14. *Ἐφαρμογὴ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου εἴς τινας ἁπλᾶς περιπτώσεις τοῦ προβλήματος ὑβώσεως πλακῶν.*

α) Ἡ πλὰξ στηρίζεται ἀρθρωτῶς γύρωθεν καὶ ὑποβάλλεται εἰς ὁμοιόμορφον θλῖψιν $n_x = -n$: Τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐξητάσαμεν ἤδη κατ' ἄλλον τρόπον εἰς τὴν § 8. Εἰσάγομεν, ὡς καὶ ἐκεῖ ἐπράξαμεν, τὴν συνάρτησιν w ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$w = c \,.\, \eta\mu \frac{i\pi}{\alpha} x \,.\, \eta\mu \frac{\kappa\pi}{b} y \quad (i,\kappa = 1, 2, 3 \ldots.) \tag{85}$$

ἥτις ὡς εἴδομεν ἱκανοποιεῖ τὰς συνοριακὰς συνθήκας $w = 0$, $\Delta w = 0$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - w.\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - w\,\frac{\kappa^2\pi^2}{b^2}\,,$$

$$(\Delta w)^2 = w^2\pi^4 \left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2$$

καὶ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = i^2\kappa^2 \frac{c^2\pi^4}{\alpha^2 b^2}\left(\eta\mu^2 \frac{i\pi}{\alpha} x - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\kappa\pi}{b} y\right)$$

περαιτέρω δὲ

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = c^2 \frac{i^2\pi^2}{\alpha^2} \sigma\upsilon\nu^2 \frac{i\pi}{\alpha} x \,.\, \eta\mu^2 \frac{\kappa\pi}{b} y.$$

Διὰ τὴν προκειμένην ἐπίπεδον φόρτισιν εἶναι $n_y = n_{xy} = 0$, $n_x = - n$ ὁπότε τὸ ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου τῆς πλακὸς γίνεται συμφώνως πρὸς ἐξ. (210)

$$A\mu = \int\!\!\int \frac{1}{2} n_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy =$$

$$= - \frac{n}{2} \cdot \frac{c^2 i^2\pi^2}{\alpha^2} \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 \frac{i\pi}{\alpha} x \,.\, dx \int_0^b \eta\mu^2 \frac{\kappa\pi}{b} y \,.\, dy$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 \frac{i\pi}{\alpha} x \,.\, dx = \frac{\alpha}{2}, \quad \int_0^b \eta\mu^2 \frac{\kappa\pi}{b} y \,.\, dy = \frac{b}{2} (i,\kappa = 1,2,3 \ldots) \tag{219}$$

$$A\mu = - \frac{n}{8} c^2 i^2 \pi^2 . \frac{b}{\alpha}\,. \tag{220}$$

Ὁ 2ος ὅρος τῆς παριστώσης τὸ ἔργον κάμψεως ἐκφράσεως (216) γράφεται

$$2(1-\mu)\frac{N}{2}\int\!\!\int\left[\frac{\partial^2 w}{dx^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{dy^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx dy =$$

$$= (1-\mu)\, N\, i^2\kappa^2 \frac{c^2\pi^4}{\alpha^2 b^2} \int\!\!\int \left(\eta\mu^2 \frac{i\pi}{\alpha} x - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\kappa\pi}{b} y\right) dx dy$$

$$= (1-\mu)\, N\, i^2\kappa^2 \frac{c^2\pi^4}{\alpha^2 b^2} \left(\frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha b}{2}\right) = 0$$

ὁπότε ὡς ἔργον ἐκ κάμψεως ἀπομένει

$$A\kappa = \frac{N}{2}\int\!\!\int (\Delta w)^2 dx dy = \frac{N\pi^4}{2}\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 .$$

$$. \, c^2 \int_0^\alpha \eta\mu^2 \frac{i\pi}{\alpha} x \,.\, dx \,.\, \int_0^b \eta\mu^2 \frac{k\pi}{b} y \,.\, dy$$

ἢ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (219)

$$A\kappa = + \frac{N}{8} c^2\pi^4 \left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 . \, \alpha b. \tag{221}$$

Ἡ συνθήκη ὑβώσεως (204) ἢ (217) γράφεται ἄρα

$$- \frac{n}{8} c^2 i^2 \pi^2 \frac{b}{\alpha} + \frac{N}{8} c^2 \pi^4 \left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 \alpha b = 0$$

ἐντεῦθεν δὲ ὑπολογίζομεν τὴν κρίσιμον θλῖψιν ὑβώσεως

$$n_\kappa = N\pi^2 \left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2}{i^2}$$

ἤ, ἂν θέσωμεν $\alpha/b = \varrho$

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2}\left(\frac{i}{\varrho} + \frac{\kappa^2\varrho}{i}\right)^2 . \tag{87}$$

Εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν ἐξ. (87), ἣν εἰς § 8 ἐξηγάγομεν δι' ἐφαρμογῆς τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (82). Ὁ περαιτέρω ὑπολογισμὸς τῆς κρισίμου τάσεως σ_κ καὶ $\min\sigma_\kappa$ παραμένει πανομοιότυπος πρὸς τὸν ἐκτεθέντα εἰς § 8.

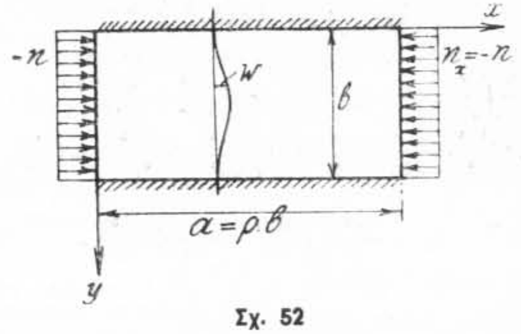
β) Αἱ θλιβόμεναι ἕδραι $x=0$, $x=\alpha$ στηρίζονται ἀρθρωτῶς, αἱ λοιπαὶ ἕδραι $y=0$, $y=b$ εἶναι πεπακτωμέναι: Τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπραγματεύθημεν ὡσαύτως, ἐκκινήσαντες ἐκ τῆς διαφορικῆς ἐξ. (82), εἰς § 9α (πρβλ. Σχ. 24). Εἰσάγομεν, ἐν ὁμοφωνίᾳ πρὸς ἐξ. (98), § 9, τὸ βέλος ὑβώσεως ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$w = Y.\, \eta\mu \frac{i\pi}{\alpha} x \quad (i = 1,2,3 \ldots.) \tag{98}$$

ἔνθα $Y = f(y)$ παριστᾷ τὸν νόμον μεταβολῆς τῶν βελῶν ὑβώσεως κατὰ τὴν ἐγκαρσίαν ἔννοιαν τοῦ ἄξονος y (Σχ. 52). Εἶναι εὔλογον νὰ δεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν

$$Y = c\,(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{b} y) = 2c\,\eta\mu^2 \frac{\pi}{b} y \tag{222}$$

ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρὸς ἐξ. (26), § 2, παριστῶσαν τὴν δυνατὴν γραμμὴν λυγισμοῦ ἀμφιπάκτου ῥάβδου. Εἶναι πρά-



Σχ. 52

γματι διὰ $y = 0$, $y = \beta$: $Y = 0$ καὶ $\frac{dY}{dy} = \frac{2\pi}{b} c.\, \eta\mu \frac{2\pi}{b} y = 0$

καὶ διὰ $y = \frac{b}{2}$: $\frac{dY}{dy} = O$. Κατὰ ταῦτα τὸ δυνατὸν βέλος ὑβώσεως γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$w = c\,(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{b} y)\, \eta\mu \frac{i\pi}{\alpha} x \quad (i = 1, 2, 3. \ldots) \tag{223}$$

ἱκανοποιοῦσαν ὡς εἴδομεν τὰς συνοριακὰς συνθήκας τῶν πεπακτωμένων ἑδρῶν $y = 0$, $y = b$ ὡς καὶ τὰς $w = 0$, $\Delta w = 0$, τῶν ἀρθρωτῶν ἑδρῶν $x = 0$, $x = \alpha$ (πρβλ. § 9).

Ἐὰν χάριν συντομίας θέσωμεν

$$\frac{i\pi}{\alpha} x = u, \ \frac{2\pi}{b} y = \upsilon \ \text{ ἤτοι } \eta\mu \frac{i\pi}{\alpha} x = \eta\mu u,$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{b} y = \sigma\upsilon\nu\upsilon \tag{224}$$

λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξ. (223)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - c\, \frac{i^2\pi^2}{\alpha^2} (1 - \sigma\upsilon\nu\upsilon)\eta\mu u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\, \frac{4\pi^2}{b^2} \sigma\upsilon\nu\upsilon . \eta\mu u,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c\,.\, \frac{2i\pi^2}{\alpha b} \eta\mu\upsilon . \sigma\upsilon\nu u, \quad (\Delta w)^2 = c^2\pi^4 \left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{4}{b^2}\right)^2 \upsilon\nu^2\upsilon.$$

$$\eta\mu^2 u + c^2 \frac{i^4\pi^4}{\alpha^4} \eta\mu^2 u - 2\, c^2 \frac{i^2\pi^4}{\alpha^2}\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{4}{b^2}\right) \sigma\upsilon\nu\upsilon . \eta\mu^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = - 4c^2 \frac{i^2\pi^4}{\alpha^2 b^2} \,.$$

$$. \, (\sigma\upsilon\nu\upsilon . \eta\mu^2 u - \sigma\upsilon\nu^2\upsilon . \eta\mu^2 u + \eta\mu^2\upsilon . \sigma\upsilon\nu^2 u)$$

καὶ

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = c^2 \frac{i^2\pi^2}{\alpha^2} (\sigma\upsilon\nu^2 u + \sigma\upsilon\nu^2\upsilon . \sigma\upsilon\nu^2 u - 2\sigma\upsilon\nu\upsilon . \sigma\upsilon\nu^2 u).$$

Ἐπειδὴ συμφώνως πρὸς ἐξ. (219) εἶναι

$$\left.\begin{aligned} &\int\!\!\int \sigma\upsilon\nu^2 u . dx dy = \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 u . dx \int_0^b dy = \frac{\alpha b}{2}, \\ &\int\!\!\int \sigma\upsilon\nu^2\upsilon . \sigma\upsilon\nu^2 u . dx dy = \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 u . dx \int_0^b \sigma\upsilon\nu^2\upsilon . dy = \frac{\alpha b}{4} \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

ἐνῷ

$$\iint \sigma\upsilon\nu u . \sigma\upsilon\nu^2 u . dx dy = \int_0^a \sigma\upsilon\nu^2 u dx \int_0^b \sigma\upsilon\nu u dy = 0$$

ἀφοῦ

$$\int_0^b \sigma\upsilon\nu u . dy = \frac{b}{2\pi}\left[\eta\mu\frac{2\pi y}{b}y\right]_0^b = 0, \qquad (225')$$

τὸ ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου ὑπολογίζεται ἴσον πρὸς

$$A_\mu = -\frac{n}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy = -\frac{3n}{8}c^2 i^2 \pi^2 \frac{b}{\alpha}. \qquad (226)$$

Ἐξ ἄλλου, λόγῳ τῶν ἐξ. (225), (225') ὁ ὅρος

$$\iint\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx dy$$

τοῦ ἔργου ἐκ κάμψεως μηδενίζεται, ἀπομένει δὲ

$$A_\kappa = \frac{N}{2}\iint(\Delta w)^2 dx dy = \frac{N}{2}\left[c^2\pi^4\left(\frac{i^2}{\alpha^2}+\frac{4}{b^2}\right)^2\frac{\alpha b}{4} + \right.$$

$$\left. + c^2\frac{i^4\pi^4}{\alpha^4}\cdot\frac{\alpha b}{2}\right] = \frac{N}{8}c^2\pi^4\left[\left(\frac{i^2}{\alpha^2}+\frac{4}{b^2}\right)^2 \alpha b + \frac{2i^4 b}{\alpha^3}\right]$$

ἤ

$$A_\kappa = \frac{Nc^2\pi^4}{8}\left(\frac{3i^4 b}{\alpha^3}+\frac{16\alpha}{b^3}+\frac{8i^2}{\alpha b}\right). \qquad (227)$$

Ἡ συνθήκη ὑβώσεως $A_\mu + A_\kappa = 0$ παρέχει οὕτω τὴν κρίσιμον θλῖψιν ὑβώσεως

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{3b^2}\left[\frac{16}{i^2}\left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 + 3i^2\left(\frac{b}{\alpha}\right)^2 + 8\right]$$

ἤ, ἂν θέσωμεν $\alpha/b=\varrho$

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{3b^2}\left[16\left(\frac{\varrho}{i}\right)^2 + 3\left(\frac{i}{\varrho}\right)^2 + 8\right]. \qquad (228)$$

Ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἐξ. (228), τῇ βοηθείᾳ καὶ τῆς ἐξ. (90), § 8

$$\sigma_\kappa = \frac{n_\kappa}{h} = \sigma_e \cdot \varphi_i . \qquad (229)$$

ὅπου

$$\varphi_i = \frac{16}{3}\left(\frac{\varrho}{i}\right)^2 + \left(\frac{i}{\varrho}\right)^2 + \frac{8}{3}. \qquad (230)$$

Ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ φ_i, ἄρα $\min\sigma_\kappa$ παράγεται δι' ἐκείνην τὴν τιμὴν i, δι' ἣν

$$\partial\varphi_i/\partial i = -\frac{32}{3}\frac{\varrho^2}{i^3} + \frac{2i}{\varrho^2} = 0, \qquad \text{ἤτοι}$$

$i = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}} = \varrho$, ἢ $\varrho/i = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{3} = 0{,}658$. Θὰ εἶναι ἑπομένως

$$\min\varphi_i = \frac{8}{3}(1+\sqrt{3}) = 7{,}2856$$

καὶ

$$\min\sigma_\kappa = 7{,}2856 . \sigma_e \qquad (231)$$

Ἡ αὐστηρὰ ἀναλυτικὴ λύσις τῆς § 9 ἔδωκε, συμφώνως πρὸς ἐξ. (116), τὴν τιμὴν $\min\sigma_\kappa = 7\sigma_e$, κατὰ 4,1 % μικροτέραν τῆς ὑπὸ τῆς ἐξ. (231) παρεχομένης. Ἔτι μεγαλειτέρα ἐμφανίζεται ἡ προσέγγισις μεταξὺ τῆς ἀναλυτικῆς καὶ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου, ἀναφορικῶς πρὸς τὸν λόγον ϱ, δι' ὃν παράγεται $\min\sigma_\kappa$: ἡ αὐστηρὰ λύσις παρέχει λόγον ϱ=0,66 i, ἡ δὲ λύσις διὰ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου τὸν λόγον ϱ=0,658 i, πρακτικῶς ἴσον πρὸς τὸν προηγούμενον.

Διὰ τυχόντα λόγον ϱ≠0,658 i, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ φ_i ἄρα καὶ σ_κ δύναται ν' ἀναζητηθῇ κατὰ τρόπον ἐντελῶς ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐκτεθέντα εἰς § 8, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς ἀναζητήσεως τοῦ ἐλαχίστου τῆς παραστάσεως $\left(\frac{i}{\varrho}+\frac{\varrho}{i}\right)$ ὅταν i λαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1,2,3 . . . ἐνῷ ϱ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς καὶ ἄνω (πρβλ. Σχ. 21). Θὰ ἐχαράσσομεν πρὸς τοῦτο τὰς καμπύλας

$$\varphi_1 = \frac{16}{3}\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{8}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{16}{3}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\varrho}\right)^2 + \frac{8}{3},$$

$$\varphi_3 = \frac{16}{3}\left(\frac{\varrho}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{\varrho}\right)^2 + \frac{8}{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ἀντιστοίχως διὰ i=1,2,3,... καὶ ἐκ τῆς ὁμάδος τῶν καμπυλῶν τούτων θὰ ἐξελέγομεν ὡς ἰσχύοντα μόνον τὰ τμήματα μὲ ἐλαχίστην τεταγμένην. Παρέλκει ὅμως ἐνταῦθα ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος καὶ ἀρκούμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν μόνον τῆς $\min\sigma_\kappa$, τόσῳ μᾶλλον καθ' ὅσον πρόκειται περὶ κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμοῦ.

γ) Ἡ ἕδρα y=0 στηρίζεται ἀρθρωτῶς, ἡ ἕδρα y=b εἶναι ἐλευθέρα στηρίξεως, αἱ θλιβόμεναι ἕδραι x=b, x=α στηρίζονται ἀρθρωτῶς: Τὴν αὐστηρὰν λύσιν τῆς περιπτώσεως ταύτης ἐπραγματεύθημεν εἰς § 9γ (Σχ. 32). Εἶναι εὔλογον νὰ δεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν τὸν νόμον Y=f(y) μεταβολῆς τῶν δυνατῶν βελῶν κάμψεως ὡς γραμμικόν, ἤτοι Y=c.y. Βεβαίως, ἐφ' ὅσον παράγονται δυναταὶ ὀρθαὶ τάσεις $\underline{\sigma}_x$ καὶ δυναταὶ καμπτικαὶ ῥοπαὶ $\underline{m}_x$ θὰ δημιουργοῦνται λόγῳ τῆς ἐγκαρσίου συστολῆς καὶ δυναταὶ ὀρθαὶ τάσεις $\underline{\sigma}_y$ καὶ καμπτικαὶ ῥοπαὶ $\underline{m}_y$, θὰ κυρτοῦται ἄρα ἡ πλὰξ καὶ κατὰ τὴν ἐγκαρσίαν ἔννοιαν y. Οὐχ ἧττον, εἴδομεν εἰς § 9γ. ὅτι ἡ ὡς ἄνω στηριζομένη καὶ θλιβομένη πλὰξ ὑβοῦται διὰ πάντα λόγον α/b=ϱ, σχηματίζουσα ἕνα μόνον ὗβον. Αὐξανομένου τοῦ μήκους α τῆς πλακὸς αὐξάνει προφανῶς ἡ ἀστάθεια τῆς ἰσορροπίας της, ἡ μετάπτωσις τῆς ἐπιπέδου πλακὸς εἰς τὴν κατάστασιν ὑβώσεως καθίσταται εὐχερεστέρα, τὸ δυνατὸν ἔργον παραμορφώσεως $A_\mu + A_\kappa$ τείνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸν ὁριακὸν μηδενισμόν, ἐλαττοῦται τὸ δυνατὸν ἔργον κάμψεως A_κ, ἄρα καὶ αἱ καμπτικαὶ ῥοπαὶ $\underline{m}_x$ καὶ αἰσθητότερον αἱ πολλαπλασίως μικρότεραι $\underline{m}_y$. Συμβιβάζεται δὲ ἡ παραδοχὴ Y=cy μὲ τὴν δημιουργίαν ἐλαχίστου ἔργου A_κ, καθ' ὅσον τότε τὸ ἔργον κάμψεως κατὰ τὴν ἐγκαρσίαν ἔννοιαν y ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

Μὲ παραδοχὴν Y=cy, ἡ εἰσακτέα εἰς τὴν συνθήκην (217) κατὰ προσέγγισιν συνάρτησις w γίνεται οὕτω

$$w = cy\eta\mu\frac{i\pi}{\alpha}x = cy\eta\mu u \qquad (232)$$

ἱκανοποιοῦσα, ὡς εἶναι φανερόν, τὰς συνοριακὰς συνθήκας w=0, Δw=0 ἐπὶ τῶν ἑδρῶν x=0, x=α, y=0 καὶ τὰς (61) ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας συνοριακῆς ἕδρας y=b.

Ἐκ τῆς ἐξ. (232) εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -c\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}y\eta\mu u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c\frac{i\pi}{\alpha}\sigma\upsilon\nu u,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = c^2\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}y^2\sigma\upsilon\nu^2 u$$

καὶ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = -c^2\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2 u,$$

$$(\Delta w)^2 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x}\right)^2 = c^2\frac{i^4\pi^4}{\alpha^4}\cdot y^2\eta\mu^2 u.$$

Ἐκ τῆς ἐξ. (210) ὑπολογίζομεν, τῇ βοηθείᾳ καὶ τῶν ἐξ. (219), τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου

$$A_\mu = -\frac{n}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy =$$

$$= -\frac{n}{2}c^2\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}\int_0^b y^2 dy\int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 u dx = -\frac{n}{2}\frac{c^2 i^2\pi^2}{\alpha^2}\cdot\frac{b^3}{3}\cdot\frac{\alpha}{2}$$

ἤ

$$A_\mu = -\frac{n}{12}\cdot\frac{c^2 i^2 \pi^2}{\alpha}\cdot b^3 \qquad (233)$$

καὶ ἐκ τῆς ἐξ. (216) τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως

$$A_\kappa = \frac{N}{2}\left\{\frac{c^2 i^4 \pi^4}{\alpha^4}\int_0^b y^2 dy \int_0^\alpha \eta\mu^2 u dx + \right.$$

$$\left. + 2(1-\mu)\frac{c^2 i^2 \pi^2}{\alpha^2}\int_0^b dy \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 u dx\right\}$$

ἤ

$$A_\kappa = \frac{N}{12} c^2 i^2 \pi^2 \frac{b}{\alpha}\left[i^2\pi^2\frac{b^2}{\alpha^2} + 6(1-\mu)\right]. \qquad (234)$$

Αἱ ἐκφράσεις A_μ καὶ A_κ τῶν ἐξ. (233), (234), εἰσαγόμεναι εἰς τὴν συνθήκην ὑβώσεως $A_\mu + A_\kappa = 0$, παρέχουν τὴν τιμὴν τῆς κρισίμου θλίψεως

$$n_\kappa = \frac{N}{b^2}\left[i^2\pi^2\frac{b^2}{\alpha^2} + 6(1-\mu)\right]$$

ἢ μὲ $\alpha/b = \varrho$

$$n_\kappa = \frac{N}{b^2}\left[\frac{i^2\pi^2}{\varrho^2} + 6(1-\mu)\right] \qquad (235)$$

Ἐλαχίστη θλῖψις ὑβώσεως παράγεται διὰ i=1, ἤτοι

$$n_\kappa = \frac{N}{b^2}\left[\frac{\pi^2}{\varrho^2} + 6(1-\mu)\right]$$

καὶ ἐντεῦθεν

$$\sigma_\kappa = \frac{n_\kappa}{h} = \frac{N\pi^2}{b^2 h}\left[\frac{1}{\varrho^2} + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2}\right] = \sigma_e\left[\frac{1}{\varrho^2} + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2}\right] \qquad (236)$$

Διὰ χάλυβα εἶναι $\sigma_e = 1898\left(\frac{h}{b}\right)^2$ (t/cm²) καὶ μ=0,3.

Ἡ ἐξ. (236) γράφεται τότε

$$\sigma_\kappa = \sigma_e\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{4{,}2}{\pi^2}\right). \qquad (236')$$

Διὰ $\varrho = \infty$ (πλὰξ λίαν ἐπιμήκης) γίνεται, συμφώνως πρὸς ἐξ. (236′), $\min\sigma_\kappa = \frac{4{,}2}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}426.\sigma_e$, εὑρίσκομεν δηλαδὴ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς τιμήν, ἣν διὰ τῆς αὐστηρᾶς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἐν § 9γ ὑπελογίσαμεν (πρβλ. ἐξ 128). Διὰ $\varrho \neq \infty$ ἐμφανίζονται μικραὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀναλυτικῆς καὶ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου. Εἰς τὸν κάτωθι πίνακα V παρατίθενται, χάριν συγκρίσεως, αἱ τιμαὶ σ_κ τῆς χαλυβδίνης πλακὸς διὰ λόγον $\varrho = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \ldots \ldots \infty$, ὡς προέκυψαν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου (ἐξ. 126) καὶ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου (ἐξ. 236′). Αἱ διαφοραὶ εἶναι ἀνεπαίσθητοι, ἐλαττούμεναι ἀπὸ 1,52% ($\varrho = \pi/6$) εἰς 0 ($\varrho = \infty$). Ἡ ἐπιτευχθεῖσα διὰ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου προσέγγισις ἀποδεικνύεται πλέον ἢ ἱκανοποιητική, ἡ δὲ ἀξία τῆς μεθόδου καθίσταται ἔτι μᾶλλον καταφανής, ὅταν ἡ πολύπλοκος καὶ διεξοδικὴ ἀνάπτυξις τῆς § 9γ παραβληθῇ μὲ τὴν ἁπλῆν καὶ ταχεῖαν τῆς παρούσης παραγράφου.

δ) Ἡ ἕδρα y=0 εἶναι πεπακτωμένη, ἡ ἕδρα y=b εἶναι ἐλευθέρα στηρίξεως, αἱ θλιβόμεναι ἕδραι x=0, x=α στηρίζονται ἀρθρωτῶς. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπραγματεύθημεν ἀναλυτικῶς εἰς § 9δ (πρβλ. Σχ. 34). Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου εἰσάγομεν εὐλόγως τὴν συνάρτησιν w ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$w = c\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi y}{2b}\right)\eta\mu\frac{i\pi}{\alpha}x \quad (i=1,2,3\ldots) \qquad (237)$$

ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρὸς ἐξ. (28) τῆς § 2, παριστῶσαν τὸν νόμον τῆς δυνατῆς γραμμῆς λυγισμοῦ τοῦ θλιβομένου προβόλου (πρβλ. Σχ. 6).

Θέτοντες χάριν συντομίας

$$\frac{\pi y}{2b} = \upsilon, \quad \frac{i\pi}{\alpha}x = u \qquad (238)$$

εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξ. (237)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -c\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}(1-\sigma\upsilon\nu\upsilon)\,\eta\mu u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\frac{\pi^2}{4b^2}\sigma\upsilon\nu\upsilon.\eta\mu u$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c\frac{i\pi^2}{2\alpha b}\eta\mu\upsilon.\sigma\upsilon\nu u, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = c^2\frac{i^2\pi^2}{\alpha^2}(1-\sigma\upsilon\nu\upsilon)^2.\sigma\upsilon\nu^2 u$$

$$\text{καὶ } (\Delta w)^2 = c^2\pi^4\eta\mu^2 u\left[\frac{i^4}{\alpha^4} + \left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4b^2}\right)^2\sigma\upsilon\nu^2\upsilon - \right.$$

$$\left. - \frac{2i^2}{\alpha^2}\left(\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4b^2}\right)\sigma\upsilon\nu\upsilon\right].$$

Λόγῳ τῶν ἐξ. (219) καὶ τῶν

$$\int_0^b \sigma\upsilon\nu^2\upsilon dy = \int_0^b \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi y}{2b}dy = \frac{b}{2},$$

ΠΙΝΑΞ V. ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΟΣ ΤΟΥ ΣΧ. 32.

$\rho = \frac{a}{b}$	Ἐνεργειακὴ μέθοδος $\sigma'_\kappa = \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{4{,}2}{\pi^2}\right)\sigma_e$	Ἀναλυτικὴ μέθοδος $\sigma_\kappa = \left(\frac{m_2}{\pi}\right)^2\sigma_e$	Διαφοραί % $\left\{\frac{\sigma'_\kappa - \sigma_\kappa}{\sigma_\kappa}\times 100\right\}$
$\pi/6 = 0{,}5236$	$\frac{40{,}2}{\pi^2}\sigma_e = 4{,}073.\sigma_e$	$\frac{6{,}29^2}{\pi^2}\sigma_e = 4{,}012.\sigma_e$	1,52 %
$\pi/3 = 1{,}0472$	$\frac{13{,}2}{\pi^2}\sigma_e = 1{,}337.\sigma_e$	$\frac{3{,}604^2}{\pi^2}\sigma_e = 1{,}318.\sigma_e$	1,44
$\pi/2 = 1{,}5708$	$\frac{8{,}2}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}831.\sigma_e$	$\frac{2{,}848^2}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}823.\sigma_e$	0,97
$\pi = 3{,}1416$	$\frac{5{,}2}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}527.\sigma_e$	$\frac{2{,}272^2}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}523.\sigma_e$	0,77
$2\pi = 6{,}2832$	$\frac{4{,}45}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}451.\sigma_e$	$\frac{2{,}10^2}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}448\sigma_e$	0,67
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	$\frac{4{,}20}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}426.\sigma_e$	$\frac{4{,}20}{\pi^2}\sigma_e = 0{,}426.\sigma_e$	0

$$\int_0^b \text{συν}\,\upsilon\,dy = \int_0^b \text{συν}\frac{\pi y}{2b}\,dy = \frac{2b}{\pi} \qquad (239)$$

τὸ ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου ὑπολογίζεται ἴσον πρὸς

$$A\mu = -\frac{n}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = -\frac{n}{8}c^2 i^2\pi\frac{b}{\alpha}(3\pi-8) \qquad (240)$$

ἐὰν δὲ προσέτι εἰσαγάγωμεν α/b=ρ, εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\iint(\Delta w)^2 dxdy = \frac{c^2 i^2\pi^3}{64\alpha b}\left[16(3\pi-8)\left(\frac{i}{\rho}\right)^2 + \pi\left(\frac{\rho}{i}\right)^2 + 8(\pi-4)\right]$$

καὶ

$$\iint\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy = -\frac{c^2 i^2\pi^3}{4\alpha b}$$

ὁπότε τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως θὰ εἶναι

$$A_\kappa = \frac{N}{8}\cdot\frac{c^2i^2\pi^3}{\alpha b}\left[(3\pi-8)\left(\frac{i}{\rho}\right)^2+\frac{\pi}{16}\left(\frac{\rho}{i}\right)^2+\frac{\pi-4}{2}+2(1-\mu)\right]. \qquad (241)$$

Ἐκ τῆς συνθήκης ὑβώσεως $A_\mu + A_\kappa = 0$ ἡ κρίσιμος θλῖψις ὑβώσεως ὑπολογίζεται τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξ. (240), (241) ἴση πρὸς

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2}\left[\left(\frac{i}{\rho}\right)^2 + \frac{\pi}{16(3\pi-8)}\left(\frac{\rho}{i}\right)^2 + \frac{\pi-4}{2(3\pi-8)}+\frac{2(1-\mu)}{3\pi-8}\right]$$

ἢ καὶ

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2}\left[\left(\frac{i}{\rho}\right)^2 + 0{,}1378\left(\frac{\rho}{i}\right)^2 - 0{,}3012 + 1{,}4036(1-\mu)\right] \qquad (242)$$

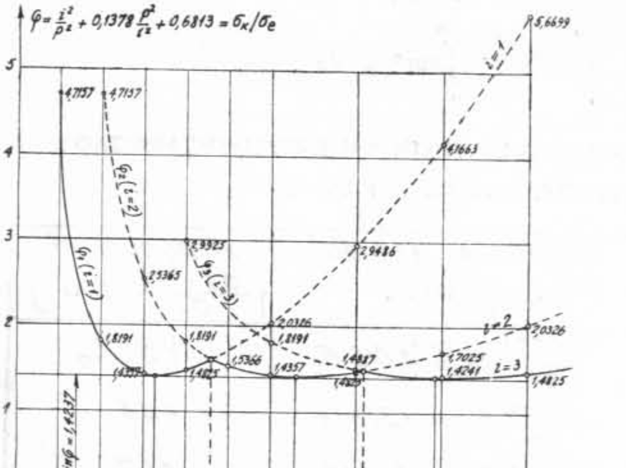
ἐκ ταύτης δὲ ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως

$$\sigma_\kappa = \frac{n_\kappa}{h} = \frac{N\pi^2}{b^2h}\left[\ldots\ldots\right] = \sigma_e\cdot\varphi_i \qquad (243)$$

ἔνθα φ_i παριστᾷ τὴν ἐντὸς ἀγκύλης παράστασιν τῆς ἐξ. (242)

Διὰ χάλυβα, μὲ $\mu=0{,}3$ θὰ εἶναι

$$\sigma_\kappa = \sigma_e\cdot\varphi_i = \frac{N\pi^2}{b^2h}\left[\left(\frac{i}{\rho}\right)^2+0{,}1378\left(\frac{\rho}{i}\right)^2+0{,}6813\right]. \qquad (243')$$



Σχ. 53

Ἡ $\min\sigma_\kappa$ παράγεται διὰ τιμὴν i/ρ μηδενίζουσαν τὴν $\partial\varphi_i / \partial(i/\rho)$, ἤτοι διὰ $i/\rho = \sqrt[4]{0{,}1378} = 0{,}609$, ἢ $\rho \cong 1{,}64\, i$. Ἡ τιμὴ αὕτη $\rho=1{,}64\, i$ συμβιβάζεται ἱκανοποιητικώτατα μὲ τὴν $\rho=1{,}635\, i$, ἣν εἰς § 9δ εὕρομεν διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου. Θέτοντες εἰς ἐξ. (243') $i/\rho=0{,}609$ εὑρίσκομεν διὰ τὴν χαλυβδίνην πλάκα

$$\min\sigma_\kappa = 1{,}424\,\sigma_e \qquad (244)$$

ἐνῷ συμφώνως πρὸς ἐξ. (133) ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος παρέσχε $\min\sigma_\kappa = 1{,}28\,\sigma_e$. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὸ προκῦψαν διὰ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου σφάλμα εἶναι αἰσθητόν, ἀνερχόμενον εἰς 11 % περίπου.

Διὰ $\rho \neq 1{,}64\, i$ ἡ ἀντίστοιχος $\min\sigma_\kappa$ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ, ἂν προηγουμένως προσδιορισθῇ τὸ $\min\varphi_i$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δοθεῖσαν τιμὴν ρ. Πρὸς τοῦτο χαράσσομεν τὰς καμπύλας $\varphi_i(\rho)$ ὅταν i λαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1,2,3 ..... ἐνῷ ρ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0 καὶ ἄνω. Εἰς Σχ. 53 ἐσχεδιάσθησαν αἱ καμπύλαι

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{\rho}\right)^2+0{,}1378\rho^2+0{,}6813,\quad \varphi_2 = \left(\frac{2}{\rho}\right)^2+0{,}1378\left(\frac{\rho}{2}\right)^2+0{,}6813,\quad \varphi_3=\left(\frac{3}{\rho}\right)^2+0{,}1378\left(\frac{\rho}{3}\right)^2+0{,}6813,$$

.... ἀντιστοίχως διὰ i=1,2,3..... καὶ ἐκ τῆς ὁμάδος τῶν καμπυλῶν τούτων ἐξελέγησαν ὡς ἰσχύοντα μόνον τὰ τμήματα μὲ ἐλαχίστην τεταγμένην, διακρινόμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς. Ὅλαι αἱ καμπύλαι ἔχουν κοινὸν ἐλάχιστον, ἴσον πρὸς $\min\varphi_2 \cong 1{,}424$. Διὰ λόγον $\rho=0$— 2,30 ἰσχύει $i = 1$ καὶ $\sigma_\kappa = \varphi_i\,\sigma_e$, διὰ $\rho=2{,}30$—4,10 ἰσχύει $i = 2$ καὶ $\sigma_\kappa = \varphi_2\,\sigma_e$ .... κ.ο.κ. Εἶναι σκόπιμον τὸ διὰ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου προκύπτοντα ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ νὰ πολλαπλασιασθοῦν τελικῶς ἐπὶ τὸν λόγον $1{,}28/1{,}424 \cong 0{,}90$, μετριαζομένου οὕτω αἰσθητῶς τοῦ ἐκ τῆς προσεγγίσεως σφάλματος. Οὕτω λ. χ. διὰ $\rho=1$ ἰσχύει συμφώνως πρὸς Σχ. 53 $i=1$ καὶ $\sigma_\kappa = 0{,}90.1{,}8191\sigma_e \cong 1{,}64\,\sigma_e$.

Σχ. 54

ε) Ἡ πλὰξ στηρίζεται διὰ πακτώσεως γύρωθεν καὶ ὑποβάλλεται εἰς θλῖψιν $n_x = -n$. (Σχ. 54) : Τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν ἐξητάσαμεν διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου. Ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρὸς ἐξ. (222) δυνάμεθα, διὰ πλευρὰς α, b οὐχὶ πολὺ διαφόρους ἀλλήλων, ἤτοι λόγον $\alpha/b=\rho\cong 1$, νὰ θέσωμεν κατὰ προσέγγισιν

$$w = c\left(1-\text{συν}\frac{2\pi}{b}y\right)\left(1-\text{συν}\frac{2\pi}{\alpha}x\right) \qquad (245)$$

ἢ ἄν, χάριν συντομίας, ἀντικαταστήσωμεν

$$2\pi x/\alpha = u\ ,\quad 2\pi y/b = \upsilon$$

$$w = c(1-\text{συν}u)(1-\text{συν}\upsilon). \qquad (245')$$

Τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων (219), (225), (225') ὑπολογίζομεν εὐκόλως

$$A_\mu = -\frac{n}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\,dy = -\frac{3n}{2}\,\frac{c^2\pi^2}{\rho} \qquad (246)$$

καὶ

$$\iint\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy = 0$$

ὁπότε

$$A_\kappa = \frac{N}{2}\iint(\Delta w)^2dxdy = \frac{Nc^2\pi^4}{b^2}\,6\left(\rho+\frac{1}{\rho^3}+\frac{2}{3\rho}\right) \qquad (247)$$

ἐκ δὲ τῆς συνθήκης ὑβώσεως $A_\mu + A_\kappa = 0$ τὴν κρίσιμον θλῖψιν ὑβώσεως

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2} 4 \left(\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{2}{3}\right). \tag{248}$$

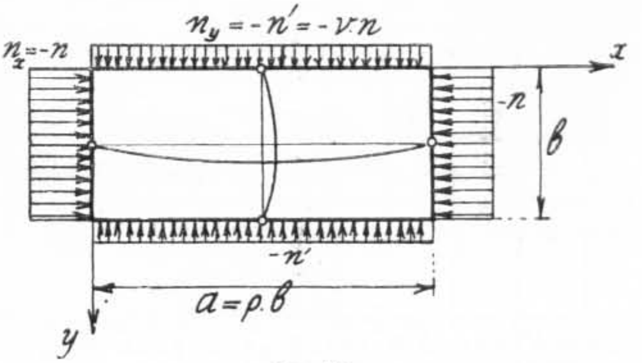
Ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως γράφεται ἑπομένως

$$\sigma_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2 h} 4 \left(\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{2}{3}\right) = \sigma_e \cdot \varphi \tag{249}$$

καθίσταται δ' ἐλαχίστη διὰ τιμὴν ϱ μηδενίζουσαν τὴν $d\varphi/d\varrho$, ἤτοι διὰ $\varrho = 1$. Προκύπτει οὕτω

$$\min\sigma_\kappa = \frac{32}{3}\,\sigma_e \simeq 10{,}67\,\sigma_e. \tag{250}$$

Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος θὰ παρεῖχεν, ὅπως καὶ εἰς ἐξετασθεῖσαν ὑπὸ στοιχεῖον β) περίπτωσιν, τιμὴν $\min\sigma_\kappa$ μικροτέραν τῆς ὑπὸ τῆς ἐξ. (250) διδομένης. Διὰ τοῦτο ἐνδείκνυται νὰ ὑπολογίζωμεν πρακτικῶς μὲ $\min\sigma_\kappa = 10\sigma_e$.



Σχ. 55

στ) Ἡ πλὰξ στηρίζεται ἀρθρωτῶς γύρωθεν καὶ ὑποβάλλεται εἰς θλίψεις $n_x = -n$, $n_y = -n'$ (Σχ. 55). Ἐκκινοῦμεν πάλιν ἐκ τῆς μορφῆς

$$w = c\,\eta\mu \frac{i\pi}{a} x \,.\, \eta\mu \frac{\kappa\pi}{b} y \tag{85}$$

τῆς συναρτήσεως w, ἱκανοποιούσης ὡς εἴδομεν τὰς συνοριακὰς συνθήκας $w=0$, $\Delta w = 0$ ἐφ' ὅλου τοῦ περιγράμματος, εὑρίσκομεν δέ, κατ' ἀναλογίαν πρὸς ἐξ. (220), τὸ ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου

$$A_\mu = -\frac{n}{8} c^2 i^2 \pi^2 \frac{b}{a} - \frac{n'}{8} c^2 \kappa^2 \pi^2 \frac{a}{b}$$

καὶ συμφώνως πρὸς ἐξ. (221) τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως

$$A_\kappa = + \frac{N}{8} c^2 \pi^4 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 ab\,.$$

Ἐὰν θέσωμεν

$$n' = \nu . n \tag{251}$$

ὅπου, ἐκ παραδοχῆς $0 < \nu \leqslant 1$, ἡ συνθήκη ὑβώσεως $A_\mu + A_\kappa = 0$ γράφεται

$$n i^2 \frac{b}{a} + \nu n \kappa^2 \frac{a}{b} = N\pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}\right)^2 ab$$

ἐντεῦθεν δέ, ἐὰν εἰσαγάγωμεν $a/b = \varrho$

$$n_\kappa = \frac{N\pi^2}{b^2} \cdot \frac{(i^2 + \kappa^2\varrho^2)^2}{i^2 + \nu\kappa^2\varrho^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \tag{252}$$

καὶ

$$\sigma_\kappa = \frac{n_\kappa}{h} = \frac{N\pi^2}{b^2 h}\, \varphi = \sigma_e \cdot \varphi \tag{253}$$

ἔνθα

$$\varphi = \frac{(i^2 + \kappa^2\varrho^2)^2}{i^2 + \nu\kappa^2\varrho^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2}. \tag{254}$$

Διὰ $\nu = 1$, ἤτοι σταθερὰν περιμετρικὴν θλῖψιν $n_x = n_y = -n$ γίνεται $\varphi = \frac{i^2}{\varrho^2} + \kappa^2$ καὶ $\min\varphi = \frac{1}{\varrho^2} + 1$, ἄρα

$$\min\sigma_\kappa = \sigma_e \left(\frac{1}{\varrho^2} + 1\right). \tag{255}$$

Ἐὰν ἡ πλὰξ εἶναι λίαν ἐπιμήκης, ἤτοι $a >> b$, γίνεται $\frac{1}{\varrho^2} \simeq 0$ καὶ $\min\sigma_\kappa = \sigma_e$. Ἡ ἐν § 8 εἰσαχθεῖσα καὶ ἔκτοτε ἐπανειλημμένως χρησιμοποιηθεῖσα ἰδεατὴ τάσις σ_e ἀποκτᾷ οὕτω καὶ φυσικὴν ἔννοιαν: παριστᾷ δηλονότι τὴν ἐλαχίστην κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως λίαν ἐπιμήκους πλακός, ἀρθρωτῶς στηριζομένης γύρωθεν, ὑποβαλλομένης εἰς σταθερὰν περιμετρικὴν θλῖψιν $n_x = n_y = -n$.

Δια δοθεῖσαν τιμὴν $\nu \neq 1$ καὶ δὴ $0 < \nu < 1$ καὶ γνωστὸν λόγον $\varrho = a/b$, δέον ν' ἀναζητηθῇ τὸ ἐλάχιστον τοῦ συντελεστοῦ φ, ὅταν i, κ λαμβάνουν τὰς τιμὰς 1,2,3..... Θεωροῦντες τὸν συντελεστὴν φ ὡς συνάρτησιν τῶν i καὶ κ λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξ. (254)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial i} = \frac{2i\,(i^2 + \kappa^2\varrho^2)\,[i^2 + (2\nu - 1)\,\kappa^2\varrho^2]}{\varrho^2 (i^2 + \nu\kappa^2\varrho^2)^2} \tag{256}$$

καὶ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa} = \frac{2\kappa (i^2 + \kappa^2\varrho^2)\,[(2-\nu) i^2 + \nu\kappa^2\varrho^2]}{(i^2 + \nu\kappa^2\varrho^2)^2}. \tag{256'}$$

Αὐξανομένου τοῦ i κατὰ di ἡ συνάρτησις φ μεταβάλλεται κατὰ $d\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial i}\, di$, θὰ εἶναι δὲ συμφώνως πρὸς ἐξ. (256) $d\varphi_i > 0$ πάντοτε, ὅταν $(2\nu - 1) \geqslant 0$ ἢ $\nu \geqslant \frac{1}{2}$. Αὐξανομένου ἐξ ἄλλου τοῦ κ κατὰ dκ ἡ συνάρτησις φ μεταβάλλεται κατὰ $d\varphi_\kappa = \frac{\partial\varphi}{\partial\kappa} d\kappa$, θὰ εἶναι δὲ συμφώνως πρὸς ἐξ. (256') πάντοτε $d\varphi_\kappa > 0$, ὅταν $(2 - \nu) \geqslant 0$ ἢ $\nu \leqslant 2$. Διὰ τὴν περιοχὴν μεταβολῆς $\frac{1}{2} \leqslant \nu \leqslant 2$ αὔξησις τῶν i καὶ κ προκαλεῖ ἄρα πάντοτε αὔξησιν τοῦ φ, ἀντιστρόφως ἐλάττωσις τῶν i καὶ κ ἐλάττωσιν τοῦ φ. Ἐπειδὴ ἐκ παραδοχῆς ἐλήφθη $0 < \nu < 1$ συνθήκη $\nu \leqslant 2$ πληροῦται πάντοτε καὶ ἑπομένως ἐλαττουμένου τοῦ κ θὰ ἐλαττοῦται πάντοτε ὁ συντελεστὴς φ. Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τοῦ minφ δέον ἄρα νὰ τεθῇ $\kappa = 1$, ὁπότε

$$\varphi = \frac{(i^2 + \varrho^2)^2}{i^2 + \nu\varrho^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\left(\frac{i^2}{\varrho^2} + 1\right)^2}{\frac{i^2}{\varrho^2} + \nu}. \tag{257}$$

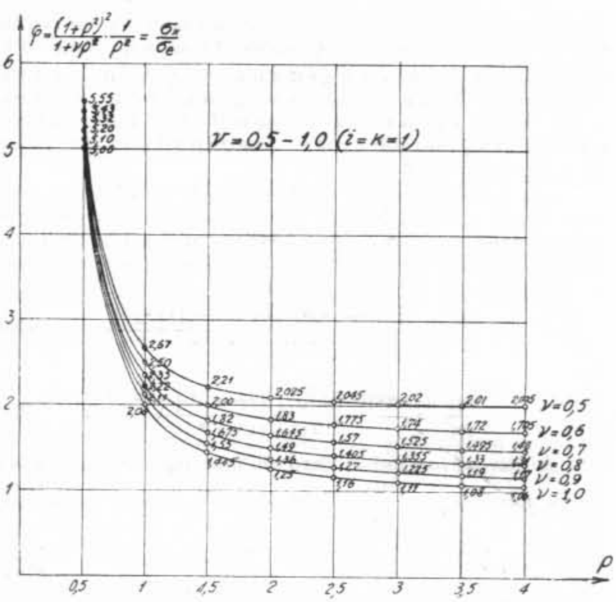
Διὰ γνωστὸν λόγον ν ἡ minφ παράγεται διὰ τιμὴν i/ϱ ἱκανοποιοῦσαν τὴν σχέσιν $\partial\varphi/\partial i = 0$, ἤτοι συμφώνως πρὸς ἐξ. (256) ἐὰν εἰς ταύτην θέσωμεν $\kappa = 1$, διὰ $i/\varrho = \sqrt{1 - 2\nu}$. Αἱ τιμαὶ i/ϱ, δι' ἃς παράγεται minφ εἶναι τότε μόνον πραγματικαί, ὅταν $\nu \leqslant \frac{1}{2}$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς κρισίμου τάσεως ὑβώσεως διὰ δοθέντας λόγους ν καὶ ϱ, ἐργαζόμεθα κατὰ ταῦτα ὡς ἀκολούθως: Διὰ $\nu = 0{,}5$ ἕως 1 ἰσχύει ὡς εἴδομεν $i = 1$, $\kappa = 1$, ἄρα $\varphi = \frac{(1 + \varrho^2)^2}{1 + \nu\varrho^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$ καὶ

$$\sigma_\kappa = \frac{(1 + \varrho^2)^2}{1 + \nu\varrho^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \cdot \sigma_e \tag{258}$$

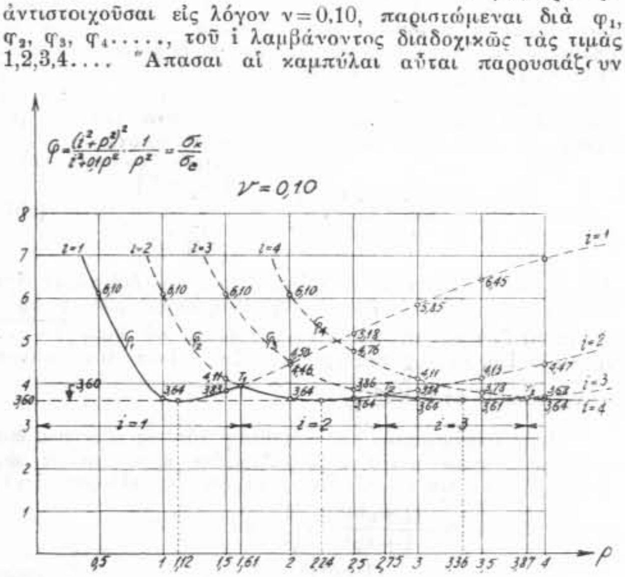
Ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως θὰ σχηματίζῃ ἕνα μόνον ὗβον καθ' ἑκάστην τῶν διευθύνσεων x καὶ y καὶ θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $w = c\,\eta\mu \frac{\pi}{a} x \,.\, \eta\mu \frac{\pi}{b} y$. Εἰς Σχ. 56 ἐχαράχθησαν αἱ καμπύλαι $\frac{(1 + \varrho^2)^2}{1 + \nu\varrho^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$ διὰ τὰς τιμὰς $\nu = 0{,}50$, 0,60, 0,70, 0,80, 0,90, 1, ἐκ τούτων δὲ δυνάμεθα ἀμέσως νὰ λάβωμεν τὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον ϱ ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ φ καὶ ἑπομένως τῆς σ_κ.

Διὰ $\nu = 0$ ἕως 0,5 ἰσχύει $\kappa = 1$, ὁ δὲ συντελεστὴς φ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξ. (257). Δοθέντος τοῦ λόγου ν κατασκευάζομεν εἰς σύστημα συντεταγμένων ρ, φ τὰς καμπύλας $\varphi_{i,\nu}$ διαδοχικῶς διὰ τιμὰς i=1, 2, 3, 4..... καὶ ἐκ τῆς ὁμάδος τῶν καμπυλῶν τούτων ἐκλέγομεν ὡς ἰσχύοντα



Σχ. 56

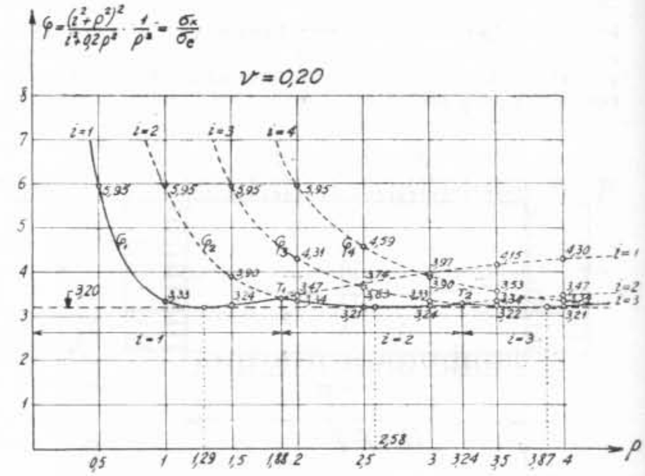
τὰ τμήματα μὲ ἐλαχίστην τεταγμένην. Οὕτω ἐχαράχθησαν εἰς Σχ. 57 αἱ ὁμάδες καμπυλῶν $\varphi=\frac{(i^2+\rho^2)^2}{i^2+0,10\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}$, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς λόγον ν=0,10, παριστώμεναι διὰ φ_1, φ_2, φ_3, φ_4....., τοῦ i λαμβάνοντος διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1,2,3,4.... Ἅπασαι αἱ καμπύλαι αὗται παρουσιάζουν



Σχ. 57

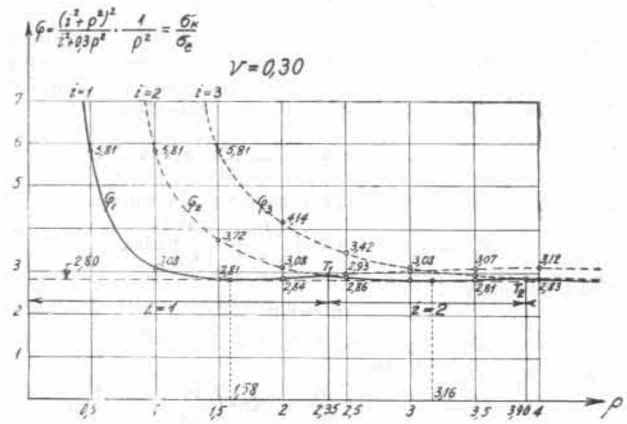
κοινὸν ἐλάχιστον, παραγόμενον κατὰ τὰ ἀνωτέρω διὰ $i/\rho=\sqrt{1-2\times0,10}=\sqrt{0,80}=0,894$, ἴσον πρὸς $\frac{(0,80+1)^2}{0,80+0,10}=$ $=3,60$, μὲ τετμημένας $\rho_1=1:\sqrt{0,80}=1.12$, $\rho_2=2:\sqrt{0,80}=$ $=2,24$, $\rho_3=3:\sqrt{0,80}=3,36$ ...... Ἐκ τῆς ὁμάδος καμπυλῶν $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$..... τὰ τμήματα μὲ ἐλαχίστας τεταγμένας σημειοῦνται εἰς Σχ. 57 διὰ παχείας γραμμῆς καὶ καθορίζονται ὑπὸ τῶν σημείων τομῆς T_1,T_2,T_3..... ὧν αἱ τετμημέναι προσδιωρίσθησαν γραφικῶς ἴσαι πρὸς 1,61, 2,75, 3,87..... Συνάγομεν, ὅτι διὰ ρ=0−1,61 ἰσχύει i=1, διὰ ρ=1,61−2,75 ἰσχύει i=2 (ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως σχηματίζει δύο ὕβους κατὰ τὴν διεύθυνσιν x), διὰ ρ=2,75−3,87 ἰσχύει i=3 (ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως σχηματίζει τρεῖς ὕβους) κ.ο.κ.

Εἰς Σχ. 58 ἐχαράχθησαν αἱ καμπύλαι $\varphi=\frac{(i^2+\rho^2)^2}{i^2+0,20\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}$ διὰ τὴν περίπτωσιν ν=0,20. Τὸ κοινὸν ἐλάχιστον



Σχ. 58

τῶν καμπυλῶν παράγεται ἐν προκειμένῳ διὰ $i/\rho=\sqrt{0,60}=$ $=0,775$, ἰσοῦται δὲ πρὸς $\frac{(0.60+1)^2}{0,60+0,20}=3,20$ καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τετμημένας $\rho_1=1:\sqrt{0,60}=1,29$, $\rho_2=2:\sqrt{0,60}=2,58$, $\rho_3=3:\sqrt{0,60}=3,87$..... Ἡ γραμμὴ τῶν ἐλαχίστων τεταγμένων καθορίζεται ὑπὸ τῶν σημείων τομῆς T_1, T_2...

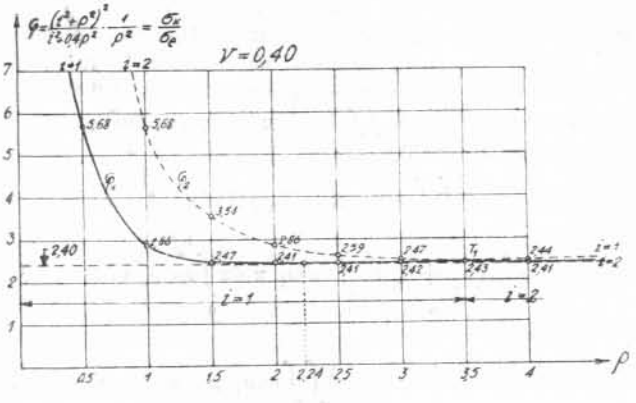


Σχ. 59

μὲ τετμημένας ἴσας πρὸς 1,88 , 3,24..... Διὰ ρ=0−1,88 ἰσχύει ἄρα i=1 , διὰ ρ=1,88−3,24 ἰσχύει i=2 κ.ο.κ.

Τέλος ἐχαράχθησαν εἰς Σχ. 59,60 αἱ καμπύλαι $\varphi=\frac{(i^2+\rho^2)^2}{i^2+0,30\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}$ καὶ $\varphi=\frac{(i^2+\rho^2)^2}{i^2+0,40\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}$, ἀντιστοίχως διὰ ν=0,30 καὶ ν=0,40. Παρατηροῦμεν, ὅτι αὐξανομένου τοῦ ν, αὐξάνει ἐπίσης ἡ περιοχὴ ἰσχύος τῆς περιπτώσεως i=1. Οὕτω διὰ ν=0,30 ἰσχύει i=1 εἰς τὴν περιοχὴν ρ=0—2,35, ἐνῷ διὰ ν=0,40 ἰσχύει i=1 εἰς τὴν περιοχὴν ρ=0—3,50.

Πρακτικῶς, ἐπιτρέπεται διὰ $\rho\geqslant1$ νὰ δεχθῶμεν, ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς ν, i=1. Διαπράττομεν βεβαίως τότε σφάλμα τι ὁσάκις $\nu<1/2$. τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι πολὺ σοβαρόν. Λ. χ. διὰ $\nu=0{,}10$ καὶ $\varrho \geqslant 1$ δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν $\min\varphi=3{,}60$ καὶ $\min\sigma_\kappa=3{,}60\ \sigma_e$, τὸ δὲ μέγιστον διαπραττόμενον σφάλμα θὰ εἶναι $\frac{4{,}0-3{,}60}{3{,}60}\times 100 \cong 11\%$ (πρβλ. Σχ. 57, ἔνθα ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου T_1 εὑρίσκεται ἴση πρὸς 4). Διὰ τιμὰς ν μεγαλειτέρας τὸ σφάλμα εἶναι ἔτι μικρότερον.



Σχ. 60

ζ) Ἡ πλὰξ στηρίζεται διὰ πακτώσεως γύρωθεν καὶ ὑποβάλλεται εἰς θλίψεις $n_x=-n$, $n_y=-n'$ (Σχ. 61): Διὰ πλευρὰς α, b οὐχὶ πολὺ διαφόρους ἀλλήλων, δυνάμεθα κατ' ἀναλογίαν πρὸς ἐξ. (245) τῆς περιπτώσεως ε) νὰ θέσωμεν

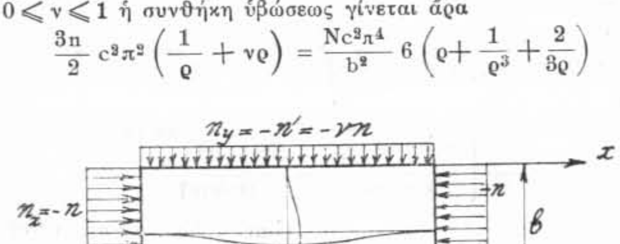
$$w=c\left(1-\text{συν}\,\frac{2\pi}{\alpha}\,x\right)\left(1-\text{συν}\,\frac{2\pi}{b}\,y\right) \tag{245}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν (πρβλ. ἐξ. 246)

$$A_\mu=-\frac{3n}{2}\,\frac{c^2\pi^2}{\varrho}-\frac{3n'}{2}\,c^2\pi^2\varrho$$

ἐνῷ τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως A_κ δίδεται ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐξ. (247), ὡς καὶ εἰς περίπτωσιν ε). Μὲ $n'=\nu.n$, ἔνθα $0\leqslant\nu\leqslant1$ ἡ συνθήκη ὑβώσεως γίνεται ἄρα

$$\frac{3n}{2}\,c^2\pi^2\left(\frac{1}{\varrho}+\nu\varrho\right)=\frac{Nc^2\pi^4}{b^2}\,6\left(\varrho+\frac{1}{\varrho^3}+\frac{2}{3\varrho}\right)$$



Σχ. 61

ἐξ ἧς ὑπολογίζεται ἡ κρίσιμος θλῖψις ὑβώσεως

$$n_\kappa=\frac{N\pi^2}{b^2}\cdot\frac{4(\varrho^2+1/\varrho^2+2/3)}{1+\nu\varrho^2}=\frac{N\pi^2}{b^2}\cdot\varphi \tag{259}$$

καὶ ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως

$$\sigma_\kappa=\frac{n_\kappa}{h}=\sigma_e\cdot\varphi \tag{260}$$

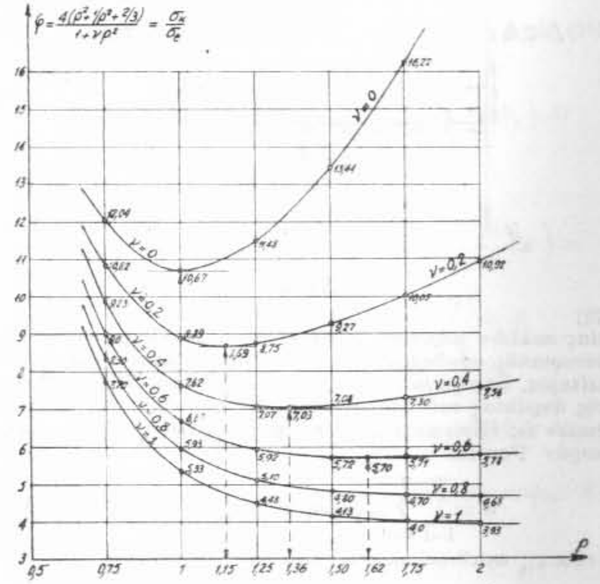
ἔνθα

$$\varphi=\frac{4(\varrho^2+1/\varrho^2+2/3)}{1+\nu\varrho^2}. \tag{261}$$

Ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ φ, ἄρα καὶ τῆς σ_κ, παράγεται διὰ τιμὴν ρ ἐπαληθεύουσαν τὴν σχέσιν $d\varphi/d\varrho=0$, ἤτοι διὰ

$$\varrho=\sqrt{\frac{3\nu+\sqrt{9\nu^2+3(3-2\nu)}}{3-2\nu}}. \tag{262}$$

Τὸ ὑπόρριζον τῆς παραστάσεως ταύτης παραμένει πάντοτε >0, ἀφοῦ ἐκ παροδοχῆς $0\leqslant\nu\leqslant1$. Διὰ $\nu=0$, 0,20, 0,40, 0,60, 0,80, 1 ἡ ἐξ. (262) παρέχει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς $\varrho=1$, 1,15, 1,36, 1,62, 2,16, 2,54, δι' ἃς παράγεται $\min\varphi=10{,}67$, 8,69, 7,03, 5,70, 4,68,



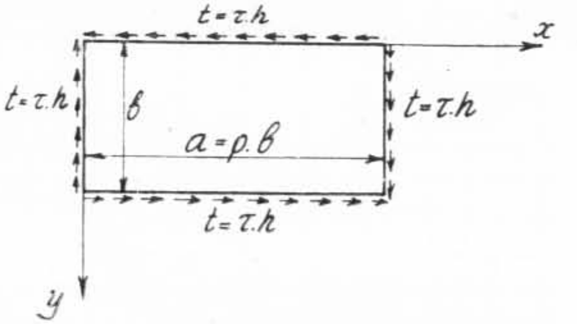
Σχ. 62

3,90. Εἰς Σχ. 62 ἐχαράχθησαν αἱ καμπύλαι $\varphi=\frac{4(\varrho^2+1/\varrho^2+2/3)}{1+\nu\varrho^2}=\sigma_\kappa/\sigma_e$ διὰ τὰς τιμὰς $\nu=0$, 0,20, 0,40, 0,60, 0,80, 1, ἐντὸς τῆς περιοχῆς μεταβολῆς $\varrho=0{,}75-2$. Δέον ν' ἀναμένωμεν, ὅτι αἱ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὑπολογιζόμεναι κρίσιμοι τάσεις ὑβώσεως σ_κ εἶναι κατά τι μεγαλείτεραι τῶν πραγματικῶν, ὅπως καὶ εἰς τὰς ἐξετασθείσας περιπτώσεις β) καὶ ε).

§ 15. *Ὕβωσις ὀρθογωνικῆς πλακὸς ἀρθρωτῶς στηριζομένης γύρωθεν, ὑποβαλλομένης εἰς περιμετρικὴν διάτμησιν.* Ἐξετάσωμεν ἤδη, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου, τὴν περίπτωσιν ὑβώσεως πλακὸς ὀρθογωνικῆς, στηριζομένης ***ἀρθρωτῶς*** γύρωθεν, ὑποβαλλομένης εἰς σταθερὰν διατμητικὴν δύναμιν, ἴσην πρὸς $t=\tau.h$ ἀνὰ μονάδα μήκους τῆς περιμέτρου. Συνεπείᾳ τῆς ἐπιπέδου ταύτης φορτίσεως, ἀποτελούσης, ὡς εἶναι φανερόν, ἰσόρροπον σύστημα, ἡ πλὰξ περιπίπτει εἰς ἐπίπεδον ἐντατικὴν κατάστασιν χαρακτηριζομένην εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς ὑπὸ τῶν παραμέτρων $\sigma_x=\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=\tau$, ἢ $n_x=n_y=0$, $n_{xy}=t$. Ἀναπτύσσονται ἑπομένως εἰς πᾶν σημεῖον τῆς πλακὸς κύριαι τάσεις ἐφελκυσμοῦ καὶ θλίψεως ὑπὸ γωνίαν 45° ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας x, y, ἐκ τούτων δὲ αἱ κύριαι τάσεις θλίψεως εἶναι δυνατόν, ὅταν ὑπερβοῦν ὡρισμένον ὅριον, νὰ προκαλέσουν τὴν ὕβωσιν τῆς πλακός. Τὸ πρόβλημα ἐμελετήθη παρὰ τοῦ Timoshenko εἰς «Eisenbau» 1921, Τεῦχος 5/6, ἀλλ' ἡ ἐκεῖ δοθεῖσα ἀνάπτυξις ὑπῆρξε λίαν σύντομος καὶ πυκνή, διὸ καὶ προετιμήθη ἐνταῦθα ἀναλυτικωτέρα διερεύνησις, παρεκκλίνουσά πως τῆς τοῦ Timoshenko, ἐπιτρέπουσα τὴν εὐχερῆ κατανόησιν καὶ παρακολούθησιν τῆς πορείας τῶν ὑπολογισμῶν [51].

(51) Βλ. ἐπίσης: Hartmann: «Knickung, Kippung, Beulung», 1937.

Εἰς τὰς μέχρι τοῦδε γενομένας ἐφαρμογὰς τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου, ἡ δυνατὴ ἐπιφάνεια ὑβώσεως ἐθεωρήθη εὐλόγως ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ ἁπλοῦς ἡμιτονοειδεῖς ἢ συνημιτονοειδεῖς ὕβους κατ' ἀμφοτέρας τὰς διευθύνσεις x καὶ y. Εἰς τὴν προκειμένην ὅμως περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως ἀναμένεται νὰ εἶναι λίαν ἀκανόνιστος, τοιαύτη παραδοχὴ δὲν εἶναι ἐπιτρεπτή. Πολλῷ μᾶλλον ἐπιβάλλεται νὰ ἐκκινήσωμεν ἐκ τῆς γενικῆς μορφῆς (218) τῆς συναρτήσεως w, ἀποτελουμένης ἐκ τῆς ἐπαλλη-



Σχ. 63

λίας πολλῶν μερικῶν συναρτήσεων ἱκανοποιουσῶν τὰς συνοριακὰς συνθήκας, ὧν ὁ ἀριθμὸς ἔσεται τόσῳ μεγαλείτερος, ὅσῳ μεγαλείτερος εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς ἐπιθυμητῆς ἀκριβείας τοῦ ὑπολογισμοῦ. Εἶναι σκόπιμον νὰ ἐκλέξωμεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς δυνατῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως τὴν σειρὰν Fourier

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{i\kappa} \eta\mu\alpha_i\, x\, \eta\mu\beta_\kappa\, y \tag{263}$$

ἔνθα $c_{i\kappa}$ σταθεροὶ συντελεσταὶ καὶ

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{\alpha}, \quad \beta_\kappa = \frac{\kappa\pi}{b}, \quad i,\kappa = 1,2,3\ldots, \tag{264}$$

παριστῶσαν ἐν συντομίᾳ τὴν ἔκφρασιν

$$\begin{aligned} w = &\left(c_{11}\eta\mu\frac{\pi x}{\alpha} + c_{21}\eta\mu\frac{2\pi x}{\alpha} + c_{31}\eta\mu\frac{3\pi x}{\alpha} + \ldots\right)\eta\mu\frac{\pi y}{b} + \\ &+ \left(c_{12}\eta\mu\frac{\pi x}{\alpha} + c_{22}\eta\mu\frac{2\pi x}{\alpha} + c_{32}\eta\mu\frac{3\pi x}{\alpha} + \ldots\right)\eta\mu\frac{2\pi y}{b} + \\ &+ \left(c_{13}\eta\mu\frac{\pi x}{\alpha} + c_{23}\eta\mu\frac{2\pi x}{\alpha} + c_{33}\eta\mu\frac{3\pi x}{\alpha} + \ldots\right)\eta\mu\frac{3\pi y}{b} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{263'}$$

Ἡ συνάρτησις (263) ἢ ἡ ἀνεπτυγμένη μορφὴ (263') παριστᾷ ἐπαλληλίαν ἀπείρων τὸ πλῆθος ἡμιτονοειδῶν κατ' ἀμφοτέρας τὰς διευθύνσεις ἐπιφανειῶν, διαφόρου εὔρους καὶ μήκους κύματος καὶ δύναται, κατόπιν καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν σταθερῶν $c_{i\kappa}$, νὰ ***προσεγγίσῃ κατὰ βούλησιν πρὸς οἱανδήποτε ἐπιφάνειαν, ἔστω καὶ ἀσυνεχείας*** (ὀξείας ἀκμὰς) ***παρουσιάζουσαν***. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (263) ἱκανοποιεῖ τὰς συνοριακὰς συνθήκας $w=0$, $\Delta w=0$ τῆς ἀρθρωτῆς στηρίξεως. Πράγματι εἶναι διὰ $x=0,\alpha$: $w=0$ καὶ διὰ $y=0,\, b$: $w=0$. Συνάμα εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξ. (263)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum\sum c_{i\kappa}\alpha_i\, \sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x . \eta\mu\beta_\kappa\, y , \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\sum\sum c_{i\kappa}\,\alpha_i^2\, \eta\mu\alpha_i\, x . \eta\mu\beta_\kappa\, y \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sum\sum c_{i\kappa}\,\beta_\kappa\, \eta\mu\alpha_i\, x . \sigma\upsilon\nu\beta_\kappa\, y , \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\sum\sum c_{i\kappa}\,\beta_\kappa^2\, \eta\mu\alpha_i\, x . \eta\mu\beta_\kappa\, y \end{aligned}\right\} \tag{265}$$

καὶ

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum\sum c_{i\kappa}\left(\alpha_i^2 + \beta_\kappa^2\right)\eta\mu\alpha_i\, x . \eta\mu\beta_\kappa\, y \tag{266}$$

ἐντεῦθεν δὲ διαπιστοῦμεν, ὅτι ἐπὶ τῶν συνόρων $x=0,\alpha$ καὶ $y=0,\beta$ γίνεται ὡσαύτως $\Delta w=0$.

Εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ἀντὶ τῶν ἀπείρων μελῶν τῆς συναρτήσεως (263) θὰ ἐκλέξωμεν πεπερασμένον ἀριθμόν, καὶ δὴ τόσον μεγαλείτερον, ὅσον ἀκριβεστέραν προσέγγισιν ἐπιδιώκομεν. Αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μελῶν καὶ ἑπομένως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σταθερῶν $c_{i\kappa}$, περιπλέκεται ὁ ὑπολογισμός. Οὕτω διὰ $i,\kappa=1,2,3$ θὰ ἔχωμεν 9 μέλη καὶ διὰ i καὶ κ τοιαῦτα, ὥστε λ. χ. τὸ ἄθροισμα $i+\kappa$ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν 6 θὰ ἔχωμεν 15 μέλη, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν κάτωθι σειρὰν δεικτῶν

$$i\kappa = 11,12,13,14,15,\ 21,22,23,24,\ 31,32,33,\ 41,42,51. \tag{267}$$

Ὑπολογίσωμεν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (216) τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως A_κ τῆς πλακός. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὅρου $\iint(\Delta w)^2 dx dy$ ἐμφανίζονται, συμφώνως πρὸς ἐξ. (266), μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa}^2\left(\alpha_i^2+\beta_\kappa^2\right)^2\iint \eta\mu^2\alpha_i\, x . \eta\mu^2\beta_\kappa\, y\, dx dy = c_{i\kappa}^2\left(\alpha_i^2+\beta_\kappa^2\right)^2\int_0^\alpha \eta\mu^2\alpha_i\, x . dx\int_0^b \eta\mu^2\beta_\kappa\, y . dy$$

ὡς καὶ μέλη τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} 2c_{i\kappa}c_{mn}&\left(\alpha_i^2+\beta_\kappa^2\right)\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)\iint \eta\mu\alpha_i\, x . \eta\mu\beta_\kappa\, y . \eta\mu\alpha_m\, x . \\ &. \eta\mu\beta_n\, y . dx dy = 2c_{i\kappa}c_{mn}\left(\alpha_i^2+\beta_\kappa^2\right)\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) . \\ &. \int_0^\alpha \eta\mu\alpha_i\, x . \eta\mu\alpha_m x . dx\int_0^b \eta\mu\beta_\kappa\, y . \eta\mu\beta_n\, y . dy . \end{aligned}$$

Ἀλλ' εἶναι συμφώνως πρὸς ἐξ. (219)

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \eta\mu^2\alpha_i\, x\, dx &= \int_0^\alpha \eta\mu^2\frac{i\pi}{\alpha}\, x . dx = \frac{\alpha}{2}, \\ \int_0^b \eta\mu^2\beta_\kappa\, y . dy &= \int_0^b \eta\mu^2\frac{\kappa\pi}{b}\, y . dy = \frac{b}{2} \end{aligned} \tag{268}$$

καὶ διὰ $i \neq m$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \eta\mu\alpha_i\, x . \eta\mu\alpha_m\, x . dx &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\alpha \eta\mu\frac{i\pi}{\alpha}\, x . \eta\mu\frac{m\pi}{\alpha}\, x . d\frac{\pi x}{\alpha} = \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\eta\mu(i-m)\dfrac{\pi x}{\alpha}}{2(i-m)} - \frac{\eta\mu(i+m)\dfrac{\pi x}{\alpha}}{2(i+m)}\right\}_0^\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$(i,m=1,2,3\ldots,\ i\neq m) \tag{269}$$

ἄρα ἐπίσης, διὰ $\kappa \neq n$

$$\int_0^b \eta\mu\beta_\kappa\, y . \eta\mu\beta_n\, y . dy = \frac{b}{\pi}\int_0^b \eta\mu\frac{\kappa\pi}{b}\, y . \eta\mu\frac{n\pi}{b}\, y . d\frac{\pi y}{b} = 0$$

$$(\kappa,n=1,2,3\ldots,\ \kappa\neq n) \tag{269'}$$

Τὰ πρῶτα ὡς ἄνω μέλη τοῦ ὅρου $\iint(\Delta w)^2 dx dy$ λαμβάνουν οὕτω τὴν ἔκφρασιν $\frac{ab}{4}\, c_{i\kappa}^2\left(\alpha_i^2+\beta_\kappa^2\right)^2$, ἐνῷ τὰ δεύτερα μηδενίζονται ὅλα, ἀφοῦ πάντως θὰ εἶναι $i\neq m$ ἢ $\kappa\neq n$. Λαμβάνομεν οὕτω

$$\iint(\Delta w)^2\, dx dy = \frac{ab}{4}\sum_i\sum_\kappa c_{i\kappa}^2\left(\alpha_i^2+\beta_\kappa^2\right)^2 . \tag{270}$$

Ἐξ ἄλλου, κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὅρου $\iint\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\, dx dy$ ἐμφανίζονται, συμφώνως πρὸς ἐξ.

(265), μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \beta_\kappa^2 \int_0^\alpha \eta\mu^2\alpha_i\, x.dx \int_0^b \eta\mu^2\beta_\kappa\, y.dy$$

καὶ

$$c_{i\kappa} c_{mn} \alpha_i^2 \beta_n^2 \int_0^\alpha \eta\mu\alpha_i\, x.\eta\mu\alpha_m x.dx \int_0^b \eta\mu\beta_\kappa\, y.\eta\mu\beta_n\, y.dy$$

ἐξ ὧν τὰ μὲν πρῶτα λόγῳ τῶν ἐξ. (268) γίνονται $\frac{\alpha b}{4} c_{i\kappa}^2 \cdot \alpha_i^2 \cdot \beta_\kappa^2$, ἐνῷ τὰ δεύτερα, συμφώνως πρὸς ἐξ. (269), (269'), μηδενίζονται ὅλα. Ἀπομένει ἄρα

$$\int\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\, dxdy = \frac{\alpha b}{4} \sum_i \sum_\kappa c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \beta_\kappa^2 . \qquad (271)$$

Τέλος λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξ. (263) ἢ (263')

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_i \sum_\kappa c_{i\kappa} \alpha_i \beta_\kappa\, \sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.\sigma\upsilon\nu\beta_\kappa\, y$$

ὁπότε ὁ ὅρος $\int\int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy$ τῆς ἐξ. (216) θὰ περιέχῃ μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \beta_\kappa^2 \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2\alpha_i x.dx \int_0^b \sigma\upsilon\nu^2\beta_\kappa\, y.dy$$

καὶ

$$2c_{i\kappa} c_{mn} \alpha_i \beta_\kappa \alpha_m \beta_n \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha_i x.\sigma\upsilon\nu\alpha_m x.dx \int_0^b \sigma\upsilon\nu\beta_\kappa y.\sigma\upsilon\nu\beta_\kappa y.dy$$

ἐξ ὧν τὰ πρῶτα λόγῳ τῆς ἰσχύος τῶν ἀναλόγων πρὸς (268) σχέσεων

$$\int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2\alpha_i\, x.dx = \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu^2 \frac{i\pi}{\alpha}\, x.dx = \frac{\alpha}{2} ,$$

$$\int_0^b \sigma\upsilon\nu^2\beta_\kappa\, y.dy = \int_0^b \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\kappa\pi}{b}\, y.dy = \frac{b}{2} \qquad (272)$$

μετατρέπονται εἰς $\frac{\alpha b}{4} c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \beta_\kappa^2$, ἐνῷ τὰ δεύτερα, λόγῳ τῆς ἰσχύος τῶν ἀναλόγων πρὸς (269), (269') σχέσεων

$$\int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.\sigma\upsilon\nu\alpha_m x.dx = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\alpha \sigma\upsilon\nu \frac{i\pi}{\alpha}\, x.\sigma\upsilon\nu \frac{m\pi}{\alpha}\, x.d\frac{\pi x}{\alpha} = 0 \quad (i \neq m) \qquad (273)$$

$$\int_0^b \sigma\upsilon\nu\beta_\kappa\, y.\sigma\upsilon\nu\beta_n\, y.dy = \frac{b}{\pi} \int_0^b \sigma\upsilon\nu \frac{\kappa\pi}{b}\, y.\sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{b}\, y.d\frac{\pi y}{b} = 0 \quad (\kappa \neq n) \qquad (273')$$

μηδενίζονται ὅλα, ἀφοῦ θὰ εἶναι πάντως $i \neq m$ ἢ $\kappa \neq n$. Λαμβάνομεν οὕτω

$$\int\int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy = \frac{\alpha b}{4} \sum_i \sum_\kappa c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \beta_\kappa^2 \qquad (274)$$

καὶ ἐντεῦθεν, λόγῳ τῆς ἐξ. (271)

$$\int\int \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dxdy = 0 \qquad (275)$$

ἄρα συμφώνως πρὸς ἐξ. (270)

$$A_\kappa = \frac{N\alpha b}{8} \sum_i \sum_\kappa c_{i\kappa}^2 \left(\alpha_i^2 + \beta_\kappa^2\right)^2 . \qquad (276)$$

Εἰσάγοντες τὸν λόγον $\alpha/b = \varrho$ καὶ τὴν ἰδεατὴν τάσιν $\sigma_e = N\pi^2/b^2h$, ὡσαύτως δὲ $\alpha_i = i\pi/\alpha$, $\beta_\kappa = \kappa\pi/b$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξ. (276)

$$A_\kappa = \sigma_e \cdot \frac{h\pi^2}{8\varrho 3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{i\kappa}^2 \left(i^2 + \varrho^2\kappa^2\right)^2 . \qquad (276')$$

Ἔλθωμεν ἤδη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔργου ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου A_μ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (210). Ἐπειδὴ διὰ τὴν δοθεῖσαν φόρτισιν εἶναι $n_x = n_y = 0$, $n_{xy} = t$, ἀπομένει πρὸς ὑπολογισμὸν ὁ ὅρος $A_\mu = t\int\int \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial w}\, dxdy$. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὅρου τούτου ἐμφανίζονται, συμφώνως πρὸς ἐξ. (265), μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa}^2 \alpha_i \beta_\kappa \int_0^\alpha \eta\mu\alpha_i\, x.\sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.dx \int_0^b \eta\mu\beta_\kappa\, y.\sigma\upsilon\nu\beta_\kappa\, y.dy$$

ἅτινα λόγῳ ἰσχύος τῆς σχέσεως

$$\int_0^\alpha \eta\mu\alpha_i\, x.\sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.dx = \frac{\alpha}{4i\pi} \int_0^\alpha \eta\mu \frac{2i\pi}{\alpha}\, x.d\left(\frac{2i\pi}{\alpha} x\right) = -\frac{\alpha}{4i\pi}\left[\sigma\upsilon\nu \frac{2i\pi}{\alpha} x\right]_0^\alpha = 0 \qquad (277)$$

μηδενίζονται ἅπαντα, ὡς καὶ μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa} c_{mn} \alpha_i \beta_n \int_0^\alpha \eta\mu\alpha_m x.\sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.dx \int_0^b \eta\mu\beta_\kappa\, y.\sigma\upsilon\nu\beta_n\, y.dy$$

ἔνθα $m \neq i$ ἢ $\kappa \neq n$, ἢ καὶ συγχρόνως $m \neq i$, $\kappa \neq n$. Ἀλλ' εἶναι ὡς γνωστὸν διὰ $m \neq i$

$$\int_0^\alpha \eta\mu\alpha_m x.\sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.dx = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\alpha \eta\mu \frac{m\pi}{\alpha}\, x.\sigma\upsilon\nu \frac{i\pi}{\alpha}\, x.d\frac{\pi x}{\alpha} = -\frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\sigma\upsilon\nu(m+i)\frac{\pi x}{\alpha}}{2(m+i)} + \frac{\sigma\upsilon\nu(m-i)\frac{\pi x}{\alpha}}{2(m-i)}\right\}_0^\alpha =$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1}{m+i}\left[\sigma\upsilon\nu(m+i)\pi - 1\right] + \frac{1}{m-i}\left[\sigma\upsilon\nu(m-i)\pi - 1\right]\right\}.$$

Ἐὰν $(m+i) =$ ἄρτιον, ὁπότε καὶ $(m-i) =$ ἄρτιον, γίνεται $\sigma\upsilon\nu(m \pm i)\pi = +1$, ἄρα μηδενίζονται αἱ ἐντὸς ἀγκυλῶν παραστάσεις. Ἐὰν $(m+i) =$ περιττόν, ὁπότε καὶ $(m-i) =$ περιττόν, γίνεται $\sigma\upsilon\nu(m \pm i)\pi = -1$ καὶ τὸ δεξιὸν μέλος τῆς τελευταίας ὡς ἄνω ἰσότητος γράφεται $+\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - i^2}$.

Ἰσχύει ἄρα γενικῶς

$$\int_0^\alpha \eta\mu\alpha_m x.\sigma\upsilon\nu\alpha_i\, x.dx = \left\{\begin{array}{l} 0, \quad \text{ὅταν } (m \pm i) = \text{ἄρτιον} \\ +\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - i^2}, \quad \text{ὅταν } (m \pm i) = \text{περιττόν} \end{array}\right\} \qquad (278)$$

Συμφώνως πρὸς ἐξ. (278), ἥτις περιέχει καὶ τὴν (277), τὰ μέλη τῶν ἀθροισμάτων ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ἔργον A_μ εἴτε μηδενίζονται ὅταν $(m \pm i)$ ἢ $(\kappa \pm n) =$ ἄρτιον, εἴτε ἰσοῦνται πρὸς

$$c_{i\kappa} c_{mn} \alpha_i \beta_n \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - i^2} \cdot \frac{2b}{\pi} \frac{\kappa}{\kappa^2 - n^2} = 4\, c_{i\kappa} c_{mn} \frac{i\kappa m n}{(m^2 - i^2)(\kappa^2 - n^2)}$$

ὁσάκις $(m \pm i)$ ***καὶ συνάμα*** $(\kappa \pm n) =$ περιττόν.

(Συνεχίζεται)

ΥΒΩΣΙΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΥ, Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου καὶ τέλος)

Τὸ ἔργον A_μ γράφεται ἄρα

$$A_\mu = 4t \sum_{i,\kappa,m,n=1}^{\infty}\sum^{\infty}\sum^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa}\, c_{mn} \frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)} \tag{279}$$

ὅπου, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δέον νὰ εἰσαχθοῦν μόνον ἐκεῖναι αἱ τιμαὶ i, κ, m, n δι' ἃς $(m \pm i)$ καὶ συνάμα $(\kappa \pm n)$ = περιττὸς ἀριθμός, ἡ δὲ συνθήκη ὑβώσεως (204) ἢ (217) λαμβάνει οὕτω τὴν μορφὴν

$$A_\mu + A_\kappa = 4t \sum_{i,\kappa,m,n=1}^{\infty}\sum^{\infty}\sum^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa}\, c_{mn} \frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)} +$$

$$+ \sigma_e \cdot \frac{h\pi^2}{8\varrho^3} \sum_{i,\kappa=1}^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa}^2 \left(i^2+\varrho^2\kappa^2\right)^2 = \begin{cases} \min \\ 0. \end{cases} \tag{280}$$

Αἱ σταθεραὶ $c_{i\kappa}$ ὑπολογίζονται κατ' ἀρχήν, συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ τέλος τῆς § 13, ἐκ τῶν συνθηκῶν ἐλαχίστου τῆς παραστάσεως $A_\mu + A_\kappa$, ἤτοι τῶν $\frac{\partial}{\partial c_{i\kappa}}(A_\mu + A_\kappa) = 0$, ἐνῷ τὸ κρίσιμον φορτίον ὑβώσεως t_κ θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συνθήκης μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων $\frac{\partial}{\partial c_{i\kappa}}(A_\mu + A_\kappa) = 0$.

Δεχθῶμεν ἤδη, ὡς ***πρώτην προσέγγισιν***, i, κ = 1, 2, ἤτοι τὴν ἀκόλουθον σειρὰν δεικτῶν

iκ = 11, 12, 21, 22.

Τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως (276′) γίνεται τότε

$$A_\kappa = \sigma_e \cdot \frac{h\pi^2}{8\varrho^3}\Big[c_{11}^2\left(1+\varrho^2\right)^2 + c_{12}^2\left(1+4\varrho^2\right)^2 +$$

$$+ c_{21}^2\left(4+\varrho^2\right)^2 + c_{22}^2\left(4+4\varrho^2\right)^2 \Big] \tag{281}$$

τὸ δὲ ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου (279), ἐπειδὴ ἡ μόνη περίπτωσις καθ' ἣν $(m+i)$ καὶ συγχρόνως $(\kappa+n)$ = περιττὸν εἶναι ἐκείνη, ὅπου $(m+i) = 1+2 = 2+1$ καὶ $(\kappa+n) = 1+2 = 2+1$, θ' ἀποτελῆται ἐκ τεσσάρων ὅρων ἀντιστοιχούντων εἰς τέσσαρας ὁμάδας τιμῶν m, i, κ, n τοῦ κάτωθι πίνακος

	m	i	κ	n
α)	1	2	1	2
β)	1	2	2	1
γ)	2	1	1	2
δ)	2	1	2	1

Οὕτω εἰς τὴν ὁμάδα τιμῶν α) ἤτοι m=1, i=2, κ=1, n=2 ἀντιστοιχεῖ ὁ ὑπὸ τὰ σύμβολα $\sum$ ὅρος $c_{21}.c_{12}.2.1.1.2/(1-4)(1-4) = +c_{21}.c_{12}.4/9$, εἰς τὴν β) ὁμάδα ἀντιστοιχεῖ ὁ ὅρος $c_{22}.c_{11}.4/(1-4)(4-1) = -c_{22}.c_{11}4/9$, εἰς τὴν γ) ὁμάδα ὁ ὅρος $-c_{11}c_{22}4/9$, τέλος εἰς τὴν δ) ὁμάδα ὁ ὅρος $+c_{12}.c_{21}.4/9$. τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ὅρων τούτων γίνεται ἴσον πρὸς $\frac{8}{9}(c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22})$ καὶ τὸ ἔργον A_μ

$$A_\mu = \frac{32t}{9}(c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}) \,. \tag{282}$$

Ἡ συνθήκη ὑβώσεως (288) λαμβάνει οὕτω, ***κατὰ πρώτην προσέγγισιν***, τὴν διατύπωσιν

$$\frac{32t}{9}\left(c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}\right) + \sigma_e \frac{h\pi^2}{8\varrho^3}\Big[c_{11}^2\left(1+\varrho^2\right)^2 + c_{12}^2\left(1+4\varrho^2\right)^2$$

$$+ c_{21}^2\left(4+\varrho^2\right)^2 + c_{22}^2\left(4+4\varrho^2\right)^2 \Big] = \min$$

ἢ ἂν θέσωμεν χάριν συντομίας

$$\lambda = \frac{32}{9} \cdot \frac{t}{h} \cdot \frac{8\varrho^3}{\sigma_e \pi^2} = \frac{32}{9}\tau \cdot \frac{8\varrho^3}{\sigma_e \pi^2} \tag{283}$$

καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς ἄνω συνθήκης ἐπὶ $\frac{1}{h}\cdot\frac{8\varrho^3}{\sigma_e \pi^2}$, πρᾶγμα ποὺ δὲν ἐπηρεάζει τὴν συνθήκην ἐλαχίστου

$$\lambda c_{12}c_{21} - \lambda c_{11}c_{22} + c_{11}^2\left(1+\varrho^2\right)^2 + c_{12}^2\left(1+4\varrho^2\right)^2 +$$

$$+ c_{21}^2\left(4+\varrho^2\right)^2 + c_{22}^2\left(4+4\varrho^2\right)^2 = \min. \tag{284}$$

Ἐὰν τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς ἐξ. (284) παραστήσωμεν διὰ f(c), αἱ συνθῆκαι ἐλαχίστου τοῦ ἔργου $A_\mu + A_\kappa$ ἀνάγονται εἰς τὰς τέσσαρας συνθήκας $\frac{\partial f(c)}{\partial c_{i\kappa}} = 0$, ταύτας δὲ ἀναγράφομεν κατωτέρω ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ πίνακος (285), (285′).

Προκύπτουν τὰ δύο συστήματα ὁμογενῶν ἐξισώσεων (285) καὶ (285′), ἐντελῶς ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, ἀφοῦ τὸ πρῶτον περιέχει μόνον τὰς σταθερὰς c_{11}, c_{22}, ἐνῷ τὸ δεύτερον μόνον τὰς σταθερὰς c_{12}, c_{21}. Ἵνα ταῦτα παρέχουν λύσεις $c_{i\kappa} \neq 0$ (ἄρα καὶ βέλη ὑβώσεως $w \neq 0$), δέον δι' ἑκάστον τῶν συστημάτων τούτων ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν $c_{i\kappa}$ νὰ μηδενίζεται. Ἐκ τοῦ συστήματος (285) προκύπτει οὕτω

$$4(1+\varrho^2)^2\,(4+4\varrho^2)^2 - \lambda^2 = 0$$

ἢ

$$\lambda = \lambda_1 = 8\left(1+\varrho^2\right)^2 \tag{286}$$

ἐκ δὲ τοῦ συστήματος (285′)

$$4(1+4\varrho^2)^2 \cdot (4+\varrho^2)^2 - \lambda^2 = 0$$

Διαφόρισις πρός	C_{11}	C_{22}	C_{12}	C_{21}		
C_{11}	$2(1+\rho^2)^2$	$-\lambda$	—	—	$= 0$	(285)
C_{22}	$-\lambda$	$2(4+4\rho^2)^2$	—	—	$= 0$	
C_{12}	—	—	$2(1+4\rho^2)^2$	λ	$= 0$	(285′)
C_{21}	—	—	λ	$2(4+\rho^2)^2$	$= 0$	

ὅθεν

$$\lambda \equiv \lambda_2 = 2\,(1+4\varrho^2)\,(4+\varrho^2). \qquad (286')$$

Ἐκ τῶν τιμῶν λ_1 καὶ λ_2 τῶν ἐξ. (286), (286′) δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (283) δύο τιμαὶ τῆς κρισίμου τάσεως ὑβώσεως τ_κ, ἐξ ὧν ὡς ἰσχύουσα δέον εὐλόγως νὰ ληφθῇ ἡ μικροτέρα, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν μικροτέραν τῶν δύο τιμῶν λ_1 καὶ λ_2. Ἀλλ' εἶναι $\lambda_1 = 8+16\varrho^2+8\varrho^4$ καὶ $\lambda_2 = 8+34\varrho^2+8\varrho^4$, ἄρα $\lambda_1 < \lambda_2$. Ἰσχύει δηλαδὴ

$$\lambda \equiv \lambda_1 = \frac{32}{9}\,\tau_\kappa \cdot \frac{8\varrho^3}{\sigma_e\,\pi^2} = 8(1+\varrho^2)^2$$

καὶ ἐντεῦθεν

$$\tau_\kappa = \sigma_e \cdot \frac{9\pi^2}{32} \cdot \frac{(1+\varrho^2)^2}{\varrho^3} = \sigma_e \cdot \varphi \qquad (287)$$

ἔνθα

$$\varphi = \frac{9\pi^2}{32} \cdot \frac{(1+\varrho^2)^2}{\varrho^3} = 2{,}775 \,.\, \frac{(1+\varrho^2)^2}{\varrho^3}. \qquad (288)$$

Διὰ $\varrho = 1, 1.5, 2, 3, 4 \ldots \infty$ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξ. (288) ἀντιστοίχως $\varphi = 11{,}10,\ 8{,}70,\ 8{,}67,\ 10{,}28,\ 12{,}53 \ldots \infty$, μὲ ἐλάχιστον παραγόμενον διὰ $\frac{d\varphi}{d\varrho} = 0$, ἤτοι $\varrho = \sqrt{3} = 1{,}732$, ἴσον πρὸς $2{,}775\,\frac{16}{3\sqrt{3}} = 8{,}55$. Θὰ εἶναι οὕτω

$$\min \tau_\kappa = 8{,}55\;\sigma_e\,. \qquad (289)$$

Ἡ κατὰ ***πρώτην προσέγγισιν*** ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως προκύπτει ἐκ τῆς ἐξ. (263), μὲ $i, \kappa = 1, 2$

$$w = c_{11}\,\eta\mu\alpha_1 x . \eta\mu\beta_1 y + c_{12}\,\eta\mu\alpha_1 x . \eta\mu\beta_2 y + c_{21}\,\eta\mu\alpha_2 x . \eta\mu\beta_1 y + {} + c_{22}\,\eta\mu\alpha_2 x . \eta\mu\beta_2 y$$

ὅπου $\alpha_1 = \frac{1\pi}{a}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{a}$, $\beta_1 = \frac{1\pi}{b}$, $\beta_2 = \frac{2\pi}{b}$ (βλ. ἐξ. 264). Οἱ συντελεσταὶ c δέον νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ τῶν ἐξ. (285), (285′) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς (286), (286′). Ἀλλὰ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐνάρξεως τῆς ὑβώσεως εἶναι $\lambda \equiv \lambda_1$, μηδενίζεται δηλαδὴ ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος (285), ἐνῷ ἡ τοῦ συστήματος (285′) παραμένει $\neq 0$, ἀφοῦ $\lambda_2 > \lambda_1$. Δέον ἄρα νὰ θέσωμεν $c_{12} = c_{21} = 0$, ἐνῷ ἐκ τοῦ συστήματος (285) ὁμοῦ μετὰ τῆς ἐξ. (286) λαμβάνομεν $c_{11} = 4c_{22} = c$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως γίνεται

$$w = c\,\eta\mu\,\frac{\pi x}{a} . \eta\mu\,\frac{\pi y}{b} + \frac{c}{4}\,\eta\mu\,\frac{2\pi x}{a} . \eta\mu\,\frac{2\pi y}{b}. \qquad (290)$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως (290), παρουσιάζουσα ὁμοιομορφίαν κατὰ τὰς διευθύνσεις x καὶ y, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελῇ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν, εἰμὴ μόνον ὁσάκις ὁ λόγος $\varrho = a/b$ δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς μονάδος. Πράγματι, εἰς τετραγωνικὰς ἢ σχεδὸν τετραγωνικὰς πλάκας ἀναμένομεν εὐλόγως νὰ ὑβωθῇ ἡ πλὰξ καθ' ὅμοιον τρόπον κατ' ἀμφοτέρας τὰς διευθύνσεις, ἐνῷ διὰ λόγον ϱ αἰσθητῶς διάφορον τῆς μονάδος, αἰσθητῶς θὰ διαφέρῃ ἡ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως κατὰ τὴν ἐπιμήκη διεύθυνσιν ἀπὸ ἐκείνην τῆς βραχείας διευθύνσεως. Συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλη ἡ κατὰ πρώτην προσέγγισιν γενομένη ἔρευνα, ἑπομένως καὶ ἡ ἐξ. (287) ἡ παρέχουσα τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως, θὰ ἰσχύῃ μὲ σχετικῶς ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν ***μόνον διὰ πλάκας μὲ*** $\varrho \cong 1$, ἐνῷ διὰ $\varrho >> 1$ καὶ μάλιστα $\varrho = \infty$ οὐδαμῶς ἀνεκτὴν ἀκρίβειαν παρέχει. Τὸ πρόβλημα ὑβώσεως πλακὸς ἀπείρου μήκους ($\varrho = \infty$), στηριζομένης γύρωθεν δι' ἀρθρώσεως ἢ πακτώσεως, ὑποβαλλομένης εἰς ὁμοιόμορφον περιμετρικὴν διάτμησιν ὡς εἰς Σχ. 63, ἐμελετήθη κατ' αὐστηρὰν μέθοδον, ἀνάλογον πρὸς τὴν ἐκτεθεῖσαν εἰς τὸ Α' μέρος, ὑπὸ τῶν Southwell καὶ Skan, εἶτα δὲ ὑπὸ τοῦ Seydel [52]. Ἐκ τῆς μελέτης ταύτης προέκυψε, διὰ ἀρθρωτὴν στήριξιν, ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώ-

Σχ. 64

σεως $\tau_\kappa = 5{,}35 \,.\, \sigma_e$, ἐνῷ ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως, εἰκονιζομένη εἰς Σχ. 64 διὰ χωροσταθμικῶν καμπυλῶν, ἀποτελεῖται, κατὰ τὴν ἐπιμήκη διεύθυνσιν, ἀπὸ ἀπείρους ὕβους, μήκους 1,25. b ἕκαστον.

Ἐν ἀντιπαραβολῇ μὲ ἐξ. (287) παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κατὰ πρώτην προσέγγισιν ἐφαρμοσθεῖσα ἐνεργειακὴ μέθοδος ἀστοχεῖ καθ' ὁλοκληρίαν ὁσάκις $\varrho >> 1$, καθ' ὅσον διὰ $\varrho = \infty$ προκύπτει ἐπίσης $\tau_\kappa = \infty$.

Πρὸς ἐπίτευξιν μείζονος ἀκριβείας, δέον εἰς τὰς ἐξ. (263) ἢ (263′) τοῦ βέλους ὑβώσεως νὰ ληφθῇ εὐρύτερος συνδυασμὸς τιμῶν i καὶ κ. Δεχθῶμεν οὕτω i καὶ κ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $i + \kappa \leqslant 6$, ἤτοι τὸν συνδυασμὸν δεικτῶν (267). Τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως A_κ, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ $\frac{1}{h} \cdot \frac{8\varrho^3}{\sigma_e\,\pi^2}$, λαμβάνει τότε, συμφώνως πρὸς ἐξ. (276′), τὴν διατύπωσιν

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \cdot \frac{8\varrho^3}{\sigma_e\,\pi^2}\,A_\kappa = \sum_i \sum_\kappa c_{i\kappa}^2 (i^2+\varrho^2\kappa^2)^2 = & \\
= c_{11}^2(1+\varrho^2)^2 + c_{12}^2(1+4\varrho^2)^2 + c_{13}^2(1+9\varrho^2)^2 + c_{14}^2(1+16\varrho^2)^2 + c_{15}^2(1+25\varrho^2)^2 + & \\
+ c_{21}^2(4+\varrho^2)^2 + c_{22}^2(4+4\varrho^2)^2 + c_{23}^2(4+9\varrho^2)^2 + c_{24}^2(4+16\varrho^2)^2 + & \qquad (291) \\
+ c_{31}^2(9+\varrho^2)^2 + c_{32}^2(9+4\varrho^2)^2 + c_{33}^2(9+9\varrho^2)^2 + & \\
+ c_{41}^2+(16+\varrho^2)^2 + c_{42}^2\,(16+4\varrho^2)^2 + & \\
+ c_{51}^2(25+\varrho^2)^2 \,. &
\end{aligned}$$

ἐνῷ οἱ ὑπὸ τὰ σύμβολα $\sum$ ὅροι $c_{i\kappa}\,c_{mn}\,\frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)}$ τῆς ἐκφράσεως (279) τοῦ ἔργου A_μ, τότε μόνον εἶναι $\neq 0$, ὅταν $(m+i)$ καὶ συγχρόνως $(\kappa+n)$ = περιττόν. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀριθμῶν $\frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)} = \gamma$ γίνεται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα VI. Εἰς τὴν 1ην στήλην τοῦ πίνακος ἀναγράφονται οἱ ἀριθμοὶ iκ, εἰς δὲ τὴν 2αν οἱ εἰς ἕκαστον iκ ἀντιστοιχοῦντες συνδυασμοὶ mn, οἱ πληροῦντες τὴν συνθήκην $(m+i)$ καὶ $(\kappa+n)$ = περιττόν. Δι' ἀμοιβαίας ἐναλλαγῆς τῶν iκ καὶ mn οἱ ἀριθμοὶ γ παραμένουν ἀμετάβλητοι, ἐπειδὴ $\frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)} = \frac{mni\kappa}{(i^2-m^2)(n^2-\kappa^2)}$.

(52) R. V. Southwell a. S. W. Skan: «On the stability under shearing forces of a flat elastic strip». Proceedings of the Royal Society, London, Σειρὰ A, Τόμος 105, σελ. 585, 1924.

Ἐπίσης Seydel: Ingenieur—Archiv 1933 (Ἐπεξεργασία τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀνωτέρω δημοσιεύσεως).

Τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἄνω μελετῶν παραλείπομεν ἐνταῦθα, περιοριζόμενοι εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν τελικῶν μόνον ἀποτελεσμάτων αὐτῶν.

ΠΙΝΑΞ VI. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ γ

iκ	mn						$\gamma = \frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)}$					
11	22	24	42				$-\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{45}$	$-\frac{8}{45}$			
12	21	23	41				$+\frac{4}{9}$	$-\frac{12}{15}$	$+\frac{8}{45}$			
13	22	24	42				$+\frac{12}{15}$	$-\frac{24}{21}$	$+\frac{24}{75}$			
14	21	23	41				$+\frac{8}{45}$	$+\frac{24}{21}$	$+\frac{16}{225}$			
15	22	24	42				$+\frac{20}{63}$	$+\frac{40}{27}$	$+\frac{40}{315}$			
21	12(*)	14(*)	32				$+\frac{4}{9}$(*)	$+\frac{8}{45}$(*)	$-\frac{12}{15}$			
22	11(*)	13(*)	15(*)	31	33	51	$-\frac{4}{9}$(*)	$+\frac{12}{15}$(*)	$+\frac{20}{63}$(*)	$+\frac{12}{15}$	$-\frac{36}{25}$	$+\frac{20}{63}$
23	12(*)	14(*)	32				$-\frac{12}{15}$(*)	$+\frac{24}{21}$(*)	$+\frac{36}{25}$			
24	11(*)	13(*)	15(*)	31	33	51	$-\frac{8}{45}$(*)	$-\frac{24}{21}$(*)	$+\frac{40}{27}$(*)	$+\frac{24}{75}$	$+\frac{72}{35}$	$+\frac{40}{315}$
31	22(*)	24(*)	42				$+\frac{12}{15}$(*)	$+\frac{24}{75}$(*)	$-\frac{24}{21}$			
32	21(*)	23(*)	41				$-\frac{12}{15}$(*)	$+\frac{36}{25}$(*)	$+\frac{24}{21}$			
33	22(*)	24(*)	42				$-\frac{36}{25}$	$+\frac{72}{35}$(*)	$+\frac{72}{35}$			
41	12(*)	14(*)	32(*)				$+\frac{8}{45}$(*)	$+\frac{16}{225}$(*)	$+\frac{24}{21}$(*)			
42	11(*)	13(*)	15(*)	31(*)	33(*)	51	$-\frac{8}{45}$(*)	$+\frac{24}{75}$(*)	$+\frac{40}{315}$(*)	$-\frac{24}{21}$(*)	$+\frac{72}{35}$(*)	$+\frac{40}{27}$
51	22(*)	24(*)	42(*)				$+\frac{20}{63}$(*)	$+\frac{40}{315}$(*)	$+\frac{40}{27}$(*)			

Οὕτω λ.χ. διὰ ικ=12 καὶ mn=21 ὁ ἀριθμὸς γ=+4/9 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν γ διὰ ικ=21 καὶ mn=12, διὰ ικ=13 καὶ mn=22 ὁ ἀριθμὸς γ=+12/15 ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν γ διὰ ικ=22 καὶ mn=13, κ.ο.κ. Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν γ ἀπαντᾶται ἄρα δὶς τοὐλάχιστον εἰς τὸν πίνακα, σημειοῦνται δὲ δι' ἀστερίσκων οἱ νέοι ἀριθμοὶ οἱ προκύπτοντες δι' ἀμοιβαίας ἐναλλαγῆς τῶν ικ καὶ mn, ἤτοι οἱ ἡμίσεις τῶν 54 ἀριθμῶν γ τοῦ πίνακος.

Ἕκαστος τῶν ὅρων $c_{i\kappa}\, c_{mn} \frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)}$ τῆς ἐξ. (279) ἀπαντᾶται, κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀθροισμάτων, ὡσαύτως δίς, τὴν μίαν φορὰν διὰ τὰς τιμὰς ικ, mn καὶ γ τοῦ πίνακος (ἄνευ ἀστερίσκων), τὴν δευτέραν διὰ τιμὰς ικ, mn(*) καὶ γ(*) μετ' ἀστερίσκου, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ἐναλλαγὴν τῶν ικ καὶ mn. Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μόνον τὰς ἄνευ ἀστερίσκου τιμὰς τοῦ ἄνω πίνακος καὶ νὰ διπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ὅρων. Τὸ ἔργον A_μ πολλαπλασιασμένον ἐπὶ $\frac{1}{h}\cdot\frac{8\varrho^3}{\sigma_e \pi^2}$ (ὅπως καὶ τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως), γίνεται οὕτω

$$\frac{1}{h}\cdot\frac{8\varrho^3}{\sigma_e \pi^2}\cdot 4t \sum_{i}\sum_{\kappa}\sum_{m}\sum_{n} c_{i\kappa}\, c_{mn} \frac{i\kappa mn}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)} = 32\tau \frac{\varrho^3}{\sigma_e \pi^2} \sum_{i}\sum_{\kappa}\sum_{m n} \cdots\cdots$$

ἢ ἂν εἰσαγάγωμεν κατ' ἀναλογίαν πρὸς ἐξ. (283)

$$\lambda = 64\tau \frac{\varrho^3}{\sigma_e \pi^2} \qquad (292)$$

καὶ σχηματίσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῶν ἀθροισμάτων τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, ἀφοῦ προηγουμένως ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ἐπιδεκτικοὺς ἁπλοποιήσεως ἀριθμούς:

$$\frac{1}{h}\cdot\frac{8\varrho^3}{\sigma_e\,\pi^2}\,A_\mu=\lambda\Big\{c_{11}\Big(-\frac{4}{9}c_{22}-\frac{8}{45}c_{24}-\frac{8}{45}c_{42}\Big)+c_{12}\Big(\frac{4}{9}c_{21}-\frac{4}{5}c_{23}+\frac{8}{45}c_{41}\Big)+c_{13}\Big(\frac{4}{5}c_{22}-\frac{8}{7}c_{24}+\frac{8}{25}c_{42}\Big)+c_{14}\Big(\frac{8}{45}c_{21}+\frac{8}{7}c_{23}+\frac{16}{225}c_{41}\Big)+c_{15}\Big(\frac{20}{63}c_{22}+\frac{40}{27}c_{24}+\frac{8}{63}c_{42}\Big)+c_{21}\Big(-\frac{4}{5}c_{32}\Big)+c_{22}\Big(\frac{4}{5}c_{31}-\frac{36}{25}c_{33}+\frac{20}{63}c_{51}\Big)+c_{23}\Big(\frac{36}{25}c_{32}\Big)+c_{24}\Big(\frac{8}{25}c_{31}+\frac{72}{35}c_{33}+\frac{8}{63}c_{51}\Big)+c_{31}\Big(-\frac{8}{7}c_{42}\Big)+c_{32}\Big(\frac{8}{7}c_{41}\Big)+c_{33}\Big(\frac{72}{35}c_{42}\Big)+c_{42}\Big(\frac{40}{27}c_{51}\Big)\Big\}. \tag{293}$$

Ἡ συνθήκη ἐλαχίστου τοῦ ἀθροίσματος $A_\mu + A_\kappa$ ἀνάγεται εἰς τὴν συνθήκην ἐλαχίστου τοῦ ἀθροίσματος τῶν δεξιῶν μελῶν τῶν ἐξ. (291) καὶ (293). Αἱ μερικαὶ παράγωγοι τοῦ ἀθροίσματος τούτου ὡς πρὸς $c_{i\kappa}$, τιθέμεναι ἴσαι πρὸς μηδέν, παρέχουν σύστημα 15 ὁμογενῶν ἐξισώσεων, ἃς ἀναγράφομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ πίνακος VII.

Ἵνα αἱ ἐξισώσεις αὗται ἔχουν λύσιν διάφορον τῆς $c_{i\kappa}=0$, ὁπότε καὶ μόνον παράγονται βέλη ὑβώσεως $w\neq 0$, δέον ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν $c_{i\kappa}$ νὰ μηδενίζεται. Τὴν σύνθεσιν τῆς ὁριζούσης ταύτης παρέχει ὁ κατωτέρω πίναξ VII. Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν μετάβασιν ἐν γένει ἀπὸ μιᾶς στήλης ἢ γραμμῆς τῆς ὁριζούσης εἰς τὴν ἀμέσως ἑπομένην ἢ προηγουμένην της, ὁ χαρακτηρίζων τὴν στήλην ἢ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς iκ μεταβάλλεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἐὰν $(i+\kappa)=$ ἄρτιον, εἰς τὰς ἀμέσως γειτονικὰς στήλας ἢ γραμμὰς νὰ γίνεται $(i+\kappa)=$ περιττὸν καὶ τἀνάπαλιν. Ἐξαίρεσιν ἀποτελοῦν αἱ γειτονικαὶ στῆλαι καὶ γραμμαὶ μὲ δείκτας 24 καὶ 31 ὡς καὶ 42 καὶ 51, ὅπου κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τῆς μιᾶς στήλης ἢ γραμμῆς εἰς τὴν ἄλλην παραμένει $(i+\kappa)=$ ἄρτιον. Πρὸς ἄρσιν τῆς ἀνομοιομορφίας ταύτης ἀρκεῖ νὰ φαντασθῶμεν μεταξὺ τῶν στηλῶν καὶ γραμμῶν 24,31 παρεμβαλλομένην τὴν 25 μὲ μηδενικοὺς ὅρους, ἐπίσης μεταξὺ τῶν στηλῶν καὶ γραμμῶν 42 καὶ 51 παρεμβαλλομένην νοερῶς τὴν 43 μὲ ἐπίσης μηδενικοὺς ὅλους τοὺς ὅρους αὐτῆς.

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 & \delta_{13} & 0 & \delta_{15} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \delta_{22} & 0 & \delta_{24} & 0 & \delta_{26} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{31} & 0 & \delta_{33} & 0 & \delta_{35} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \delta_{42} & 0 & \delta_{44} & 0 & \delta_{46} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{51} & 0 & \delta_{53} & 0 & \delta_{55} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \delta_{62} & 0 & \delta_{64} & 0 & \delta_{66} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{294}$$

Μὲ τὴν προσθήκην ταύτην ἡ ὁρίζουσα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπαγομένη εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν (294), ὅπου ἕκαστον 2ον στοιχεῖον ἑκάστης στήλης καὶ ἑκάστης γραμμῆς εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁριζουσῶν γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ἡ ὁρίζουσα τῆς μορφῆς (294) δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ὁριζουσῶν (294′), ἡ ὁρίζουσα ἄρα τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων $\frac{\partial}{\partial c_{i\kappa}}(A_\mu + A_\kappa) = 0$ ἀναλύεται καὶ αὕτη εἰς γινόμενον δύο ὁριζουσῶν, ἐξ ὧν ἡ μία πε-

VII

ΠΙΝΑΞ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ $\frac{\partial}{\partial c_{i\kappa}}(A_\mu+A_\kappa)=0$

Διαφόρισις πρός	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{41}	c_{42}	c_{51}	
c_{11}	$2(1+\rho^2)^2$	·	·	·	·	·	$-\frac{4\lambda}{9}$	·	$-\frac{8\lambda}{45}$	·	·	·	·	$-\frac{8\lambda}{45}$	·	$=0$
c_{12}	·	$2(1+4\rho^2)^2$	·	·	·	$+\frac{4\lambda}{9}$	·	$-\frac{4\lambda}{5}$	·	·	·	·	$+\frac{8\lambda}{45}$	·	·	$=0$
c_{13}	·	·	$2(1+9\rho^2)^2$	·	·	·	$+\frac{4\lambda}{5}$	·	$-\frac{8\lambda}{7}$	·	·	·	·	$+\frac{8\lambda}{25}$	·	$=0$
c_{14}	·	·	·	$2(1+16\rho^2)^2$	·	$+\frac{8\lambda}{45}$	·	$+\frac{8\lambda}{7}$	·	·	·	·	$+\frac{16\lambda}{225}$	·	·	$=0$
c_{15}	·	·	·	·	$2(1+25\rho^2)^2$	·	$+\frac{20\lambda}{63}$	·	$+\frac{40\lambda}{27}$	·	·	·	·	$+\frac{8\lambda}{63}$	·	$=0$
c_{21}	·	$+\frac{4\lambda}{9}$	·	$+\frac{8\lambda}{45}$	·	$2(4+\rho^2)^2$	·	·	·	·	$-\frac{4\lambda}{5}$	·	·	·	·	$=0$
c_{22}	$-\frac{4\lambda}{9}$	·	$+\frac{4\lambda}{5}$	·	$+\frac{20\lambda}{63}$	·	$2(4+4\rho^2)^2$	·	·	$+\frac{4\lambda}{5}$	·	$-\frac{36\lambda}{25}$	·	·	$+\frac{20\lambda}{63}$	$=0$
c_{23}	·	$-\frac{4\lambda}{5}$	·	$+\frac{8\lambda}{7}$	·	·	·	$2(4+9\rho^2)^2$	·	·	$+\frac{36\lambda}{25}$	·	·	·	·	$=0$
c_{24}	$-\frac{8\lambda}{45}$	·	$-\frac{8\lambda}{7}$	·	$+\frac{40\lambda}{27}$	·	·	·	$2(4+16\rho^2)^2$	$+\frac{8\lambda}{25}$	·	$+\frac{72\lambda}{35}$	·	·	$+\frac{8\lambda}{63}$	$=0$
c_{31}	·	·	·	·	·	·	$+\frac{4\lambda}{5}$	·	$+\frac{8\lambda}{25}$	$2(9+\rho^2)^2$	·	·	·	$-\frac{8\lambda}{7}$	·	$=0$
c_{32}	·	·	·	·	·	$-\frac{4\lambda}{5}$	·	$+\frac{36\lambda}{25}$	·	·	$2(9+4\rho^2)^2$	·	$+\frac{8\lambda}{7}$	·	·	$=0$
c_{33}	·	·	·	·	·	·	$-\frac{36\lambda}{25}$	·	$+\frac{72\lambda}{35}$	·	·	$2(9+9\rho^2)^2$	·	$+\frac{72\lambda}{35}$	·	$=0$
c_{41}	·	$+\frac{8\lambda}{45}$	·	$+\frac{16\lambda}{225}$	·	·	·	·	·	·	$+\frac{8\lambda}{7}$	·	$2(16+\rho^2)^2$	·	·	$=0$
c_{42}	$-\frac{8\lambda}{45}$	·	$+\frac{8\lambda}{25}$	·	$+\frac{8\lambda}{63}$	·	·	·	·	$-\frac{8\lambda}{7}$	·	$+\frac{72\lambda}{35}$	·	$2(16+4\rho^2)^2$	$+\frac{40\lambda}{27}$	$=0$
c_{51}	·	·	·	·	·	·	$+\frac{20\lambda}{63}$	·	$+\frac{8\lambda}{63}$	·	·	·	·	$+\frac{40\lambda}{27}$	$2(25+\rho^2)^2$	$=0$

ριέχει στοιχεῖα μὲ δείκτας $(i+\kappa) =$ ἄρτιον, ἡ δευτέρα στοιχεῖα μὲ $(i+\kappa)$=περιττόν. Ἑκάστη τῶν μερικῶν τούτων ὁριζουσῶν δύναται νὰ μηδενίζεται κεχωρισμένως, προκύπτουν δ' ἐντεῦθεν δύο ἐξισώσεις πρὸς ὑπολογισμὸν

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} & \delta_{15} & \cdot & \cdot \\ \delta_{31} & \delta_{33} & \delta_{35} & \cdot & \cdot \\ \delta_{51} & \delta_{53} & \delta_{55} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{24} & \delta_{26} & \cdot & \cdot \\ \delta_{42} & \delta_{44} & \delta_{46} & \cdot & \cdot \\ \delta_{62} & \delta_{64} & \delta_{66} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (294')$$

τοῦ λ καὶ ἑπομένως τῆς κρισίμου τάσεως ὑβώσεως τ_κ (πρβλ. ἐξ. 292), ἐξ ὧν ὡς ἰσχύουσα δέον νὰ ληφθῇ ἐκείνη ἥτις παρέχει μικροτέραν τιμὴν λ, ἄρα καὶ μικροτέραν τιμὴν τῆς κρισίμου τάσεως τ_κ. Ὁ Timoshenko εὗρεν, ὅτι ἰσχύει ἡ ὁρίζουσα μὲ δείκτας $(i+\kappa)$=ἄρτιον, ὁ δὲ Seydel, εἰς τὴν ἐν ὑποσημειώσει (52) μνημονευομένην ἐργασίαν του, ἐξηκρίβωσεν ὅτι, αὐξανομένου τοῦ λόγου $\varrho = a/b$ ἀπὸ τῆς τιμῆς 1 καὶ ἄνω, αἱ δύο ὁρίζουσαι παρέχουν ἐκ περιτροπῆς τὴν μικροτέραν τιμὴν τ_κ. Πάντως διὰ $\varrho = 1$ ἕως 2,5 ἰσχύει ἡ ὁρίζουσα μὲ $(i+\kappa)$=ἄρτιον, διὰ μεγαλειτέρας δὲ τιμὰς τοῦ λόγου ρ αἱ ἐκ τῶν δύο ὁριζουσῶν προκύπτουσαι διαφοραὶ τῶν τάσεων τ καθίστανται ἀνεπαίσθητοι.

Κατὰ ταῦτα διατυποῦμεν τὴν συνθήκην ὑβώσεως μηδενίζοντες τὴν μερικὴν ὁρίζουσαν μὲ $(i+\kappa)$=ἄρτιον περιέχουσαν 9 στήλας καὶ γραμμάς, ὑπὸ τὴν μορφὴν (295),

$$\begin{array}{c|ccccccccc|l} & 11 & 13 & 15 & 22 & 24 & 31 & 33 & 42 & 51 & \\ 11 & 2(1+\rho^2)^2 & \cdot & \cdot & -4\lambda/9 & -8\lambda/45 & \cdot & \cdot & -8\lambda/45 & \cdot & \\ 13 & \cdot & 2(1+9\rho^2)^2 & \cdot & +4\lambda/5 & -8\lambda/7 & \cdot & \cdot & +8\lambda/25 & \cdot & \\ 15 & \cdot & \cdot & 2(1+25\rho^2)^2 & +20\lambda/63 & +40\lambda/27 & \cdot & \cdot & +8\lambda/63 & \cdot & \\ 22 & -4\lambda/9 & +4\lambda/5 & +20\lambda/63 & 2(4+4\rho^2)^2 & \cdot & +4\lambda/5 & -36\lambda/25 & \cdot & +20\lambda/63 & \\ 24 & -8\lambda/45 & -8\lambda/7 & +40\lambda/27 & \cdot & 2(4+16\rho^2)^2 & +8\lambda/25 & +72\lambda/35 & \cdot & +8\lambda/63 & = 0 \quad (295) \\ 31 & \cdot & \cdot & \cdot & +4\lambda/5 & +8\lambda/25 & 2(9+\rho^2)^2 & \cdot & -8\lambda/7 & \cdot & \\ 33 & \cdot & \cdot & \cdot & -36\lambda/25 & +72\lambda/35 & \cdot & 2(9+9\rho^2)^2 & +72\lambda/35 & \cdot & \\ 42 & -8\lambda/45 & +8\lambda/25 & +8\lambda/63 & \cdot & \cdot & -8\lambda/7 & +72\lambda/35 & 2(16+4\rho^2)^2 & +\frac{40\lambda}{27} & \\ 51 & \cdot & \cdot & \cdot & +20\lambda/63 & +8\lambda/63 & \cdot & \cdot & +40\lambda/27 & 2(25+\rho^2)^2 & \end{array}$$

Τῆς ὁριζούσης ταύτης ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι λίαν ἐπίπονος. Ἁπλοποιεῖται ὅμως σημαντικῶς χάρις εἰς τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις, χωρὶς ἡ αὐστηρότης τῆς λύσεως νὰ ἐπηρεασθῇ σοβαρῶς.

Οἱ δεῖκται i, κ ἐν τῷ ὅρῳ $c_{i\kappa}$ ημα$_i$ x.ημβ$_\kappa$ y τῆς ἐξ. (263) τοῦ βέλους ὑβώσεως παριστοῦν, ὡς γνωστόν, τὸ πλῆθος τῶν ἡμιτονοειδῶν ὕβων κατὰ τὰς διευθύνσεις x καὶ y, ἐνῷ $c_{i\kappa}$ εἶναι τὸ εὖρος τῶν ὕβων. Ἐὰν $a = b$, ἤτοι ἡ πλὰξ εἶναι τετράγωνος, ἡ ὕβωσις δέον, λόγῳ τῆς συμμετρίας, νὰ διήκῃ συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραγώνου, τὸν τόνον δὲ τῆς συμμετρίας παρέχουν κατὰ κύριον λόγον οἱ προσθετέοι μὲ δείκτας ii, κατὰ ἥσσονα δὲ λόγον τὰ ζεύγη τῶν προσθετέων μὲ δείκτας iκ=κi. Αὐξανομένου τοῦ a ἐν σχέσει πρὸς b, δηλαδὴ ἀπομακρυνομένης τῆς πλακὸς ἀπὸ τοῦ τετραγώνου σχήματος, ἀπομακρύνεται καὶ ἡ ἐπιφάνεια ὑβώσεως ἀπὸ τῆς συμμετρίας, αὐξάνει ἡ βαρύτης τοῦ τυχόντος προσθετέου μὲ ἀνομοίους δείκτας.

Ἐξ ἄλλου μεγάλαι τιμαὶ τῶν δεικτῶν i, κ σημαίνουν ηὐξημένον πλῆθος ὕβων, ***ἠλαττωμένον ὅμως εὖρος*** αὐτῶν, καθ' ὅσον δι' αὔξησιν τῶν i, κ αὐξάνει ταχέως ὁ εἰς τὴν ἐξ. (276') τοῦ ἔργου ἐκ κάμψεως A_κ εἰσερχόμενος ἀριθμὸς $(i^2+\kappa^2\varrho^2)^2$, αὐξάνει δ' ἐπίσης—ἐφ' ὅσον $i > m$ καὶ $\kappa > n$—ὁ ἀριθμὸς $\gamma = \dfrac{i\kappa m n}{(m^2-i^2)(\kappa^2-n^2)}$ [53], ὃν ἀπαντῶμεν ὑπὸ τὰ σύμβολα $\sum$ τῆς ἐξ. (279) τοῦ ἔργου A_μ. Διὰ νὰ συμβιβάζωνται ὅμως αἱ τοιαῦται αὐξήσεις μὲ τὴν συνθήκην ἐλαχίστου τοῦ ἔργου $A_\mu + A_\kappa$, δέον δι' ηὐξημένα i, κ τὸ εὖρος ὑβώσεως $c_{i\kappa}$ νὰ ἐλαττοῦται ἔτι ταχύτερον, ἢ ὅσον αὐξάνουν οἱ ἀριθμοὶ $(i^2+\kappa^2\varrho^2)^2$ καὶ γ.

Ἐὰν a παριστᾷ πάντοτε τὴν *ἐπιμηκεστέραν* τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθογωνικῆς πλακός, αὔξησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὕβων κατὰ τὴν ἐπιμήκη διάστασιν a ἔχει σοβαρωτέραν ἐπιρροὴν ἐπὶ τῆς μορφῆς τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως, ἢ αὔξησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὕβων κατὰ τὴν μικροτέραν διάστασιν b. Ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους ***ἐπιτρέπεται, εἰς τὴν ὁρίζουσαν (295), νὰ διαγράψωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς ὑπὸ δείκτας*** iκ=15 ***στήλης καὶ γραμμῆς***, ἐπειδὴ οἱ δεῖκται οὗτοι ἀναφέρονται εἰς σχηματισμὸν

---

(53) Εὐκόλως προκύπτει διὰ $\kappa > n$ καὶ $i > m$, ἐπίσης $\dfrac{\partial\gamma}{\partial i} > 0$ καὶ $\dfrac{\partial\gamma}{\partial\kappa} > 0$, ἄρα $d\gamma = \dfrac{\partial\gamma}{\partial i}\,di + \dfrac{\partial\gamma}{\partial\kappa}\,d\kappa > 0$.

ἑνὸς ὕβου κατὰ τὴν ἐπιμήκη διεύθυνσιν α καὶ 5 ὕβων κατὰ τὴν βραχεῖαν διεύθυνσιν b. Θὰ εἶναι δὲ τὸ εὖρος τῶν 5 ὕβων τῆς διευθύνσεως b πολὺ μικρὸν (συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω), πολὺ μικρὸν ἄρα καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ εὖρος τοῦ μοναδικοῦ ὕβου τῆς διευθύνσεως α. Προχωροῦντες ἓν περαιτέρω βῆμα *δυνάμεθα κατ' ἐπέκτασιν νὰ παραλείψωμεν καὶ τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης* ικ=24. Τέλος εἶναι ἀνεκτόν, ἐφ' ὅσον ἡ πλὰξ δὲν εἶναι ἰδιαιτέρως ἐπιμήκης, *νὰ διαγράψωμεν ἐν τῇ ὁριζούσῃ (295) τὴν στήλην καὶ γραμμὴν* ικ=51, ἐπειδὴ εἰς τὰς συνήθεις περιπτώσεις τῆς πράξεως, ὅπου $\varrho=1$ ἕως 2 περίπου, ὁ σχηματισμὸς 5 ὕβων κατὰ τὴν ἐπιμήκη διεύθυνσιν α συνεπάγεται καὶ πάλιν ἀσήμαντον εὖρος τῶν ὕβων, ἐλάχιστα ἐπηρεαζομένης ὡς ἐκ τούτου τῆς μορφῆς τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως.

Διαγραφομένων οὕτω ἐν τῇ ὁριζούσῃ (295) τῶν στηλῶν καὶ γραμμῶν 15, 24, 51 ἀπομένει ὁρίζουσα μὲ 6 στήλας καὶ γραμμάς. Παραλειπομένης δὲ ἀκόμη καὶ τῆς στήλης καὶ τῆς γραμμῆς 42—ὡς εἶναι ἐπιτρεπτὸν ὁσάκις $\varrho \simeq 1$ —ἡ συνθήκη (295) ἁπλοποιεῖται εἰς τὴν (295').

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 11 & 13 & 22 & 31 & 33 \\
\hline
11 & 2(1+\rho^2)^2 & \cdot & -\frac{4\lambda}{9} & \cdot & \cdot \\
13 & \cdot & 2(1+9\rho^2)^2 & +\frac{4\lambda}{5} & & \cdot \\
22 & -\frac{4\lambda}{9} & +\frac{4\lambda}{5} & 2(4+4\rho^2)^2 & +\frac{4\lambda}{5} & -\frac{36\lambda}{25} \\
31 & \cdot & \cdot & +\frac{4\lambda}{5} & 2(9+\rho^2)^2 & \cdot \\
33 & \cdot & \cdot & -\frac{36\lambda}{25} & \cdot & 2(9+9\rho^2)^2
\end{array} = 0. \quad (295')$$

Ἀναπτύσσοντες τὴν ὁρίζουσαν τοῦ ἀριστεροῦ μέλους λαμβάνομεν κατόπιν ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ

$$4(1+\varrho^2)^2=\lambda^2\left\{\frac{1}{25(9+\varrho^2)^2}+\frac{1}{625(1+\varrho^2)^2}+\frac{1}{25(1+9\varrho^2)^2}+\frac{1}{81(1+\varrho^2)^2}\right\}$$

ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $81(1+\varrho^2)^2$

$$18(1+\varrho^2)^2=\lambda\sqrt{1+\frac{81}{625}+\frac{81}{25}\cdot\frac{(1+\varrho^2)^2}{(9+\varrho^2)^2}+\frac{81}{25}\cdot\frac{(1+\varrho^2)^2}{(1+9\varrho^2)^2}} \quad (296)$$

ἐντεῦθεν δὲ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξ. (292) τὴν κρίσιμον τάσιν ὑβώσεως

$$\tau_\kappa=\sigma_e\cdot\frac{9\pi^2}{32}\cdot\frac{(1+\varrho^2)^2}{\varrho^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}}=\sigma_e\cdot\varphi \quad (297)$$

ἔνθα

$$\varphi=\frac{9\pi^2}{32}\cdot\frac{(1+\varrho^2)^2}{\varrho^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}}=2{,}775\cdot\frac{(1+\varrho^2)^2}{\varrho^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}} \quad (298)$$

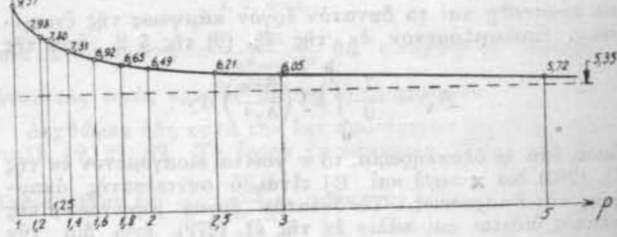
Συγκρίνοντες μὲ τὰς ἐξ. (288) τῆς πρώτης προσεγγίσεως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀκριβεστέρα τιμὴ τῆς κρισίμου τάσεως τ_κ προκύπτει ἐκ τῆς τιμῆς τ_κ τῆς πρώτης προσεγγίσεως διὰ πολλαπλασιασμοῦ ταύτης ἐπὶ $\frac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}}$.

Διὰ $\varrho=1$, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8, 2,3 .... ∞ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξ. (298) $\varphi=9{,}46$, 8,10, 7,40, 7,01, 6,82, 6,75, 7,00. . . . . . . ∞ καὶ ἐντεῦθεν τιμὰς τ_κ οὐσιωδῶς μικροτέρας τῶν τῆς πρώτης προσεγγίσεως (πρβλ. σελ. 154). Μόνον διὰ $\varrho=1$ ἡ διαφορὰ εἶναι σχετικῶς μικρά, ἴση πρὸς 17 % περίπου. Διὰ τιμὰς $\varrho>2$ ἡ ἐξ. (298) παρέχει καὶ πάλιν λίαν ἀνακριβεῖς τιμὰς φ καὶ τ_κ, μάλιστα δὲ διὰ $\varrho=\infty$, ὁπότε κατὰ τὴν αὐστηρὰν λύσιν τῶν Southwell—Skan εἶναι $\tau_\kappa=5{,}35\sigma_e$, ἐνῷ ἐκ τῆς ἐξ. (298) προκύπτει $\tau_\kappa=\infty$. Ὀφείλεται τοῦτο εἰς τὰς γενομένας ἁπλοποιήσεις τῆς ὁριζούσης (295) καὶ ἐν γένει εἰς τὸν περιορισμὸν τῶν δεικτῶν i, κ εἰς χαμηλὰ ὅρια, πρᾶγμα μὴ ἐπιτρεπτὸν ὅταν ϱ γίνεται πολὺ μεγαλείτερον τῆς μονάδος.

Διὰ τετράγωνον πλάκα ($\varrho=1$) ὁ Seydel εὗρε μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν $\varphi=9{,}37$. Ἐξ ἄλλου ὁ Timoshenko, χρησιμοποιήσας τὴν ἑξάστηλον ὁρίζουσαν, (ἤτοι τὴν 295 μὲ διαγεγραμμένας τὰς στήλας καὶ γραμμὰς 15, 24, 51), ὑπελόγισε διὰ $\varrho=2$ καὶ $\varrho=3$ ἀντιστοίχως $\varphi=6{,}59$ καὶ 6,15. Τέλος ὁ Hartmann, χρησιμοποιήσας αὐτουσίαν τὴν ἐννεάστηλον ὁρίζουσαν (295), εὗρε διὰ $\varrho=3$: $\varphi=6{,}05$. Ὑπὸ τοῦ τελευταίου τούτου ἐδόθη ἐπίσης, ἐν τῷ ἐν ὑποσημειώσει (51) ἀναφερομένῳ συγγράμματι, ἡ τελικὴ μορφὴ τῆς καμπύλης φ, ἐκπεφρασμένης συναρτήσει τοῦ λόγου ϱ, ἣν ἀναπαριστῶμεν εἰς Σχ. 65. Ἡ καμπύλη αὕτη δέον νὰ θεωρηθῇ ἀρκούντως ἀκριβής, παρέχει δὲ τὴν τελικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως ὀρθογωνικῆς πλακός, ἀρθρωτῶς στηριζομένης, ὑποβαλλομένης εἰς περιμετρικὴν διάτμησιν.

Αἱ ἐξ. (297), (298) καὶ τὸ διάγραμμα τοῦ Σχ. 65 δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἐπίσης ὁσάκις $\varrho=\alpha/b<1$. Οὕτω λ. χ. διὰ $\alpha/b=0{,}5$, θὰ εἶναι $\tau_\kappa=6{,}49\,\sigma'_e$, ἔνθα

$\sigma'_e=N\pi^2/\alpha^2h=\sigma_e\,\frac{1}{\varrho^2}=4\sigma_e$. Εὑρίσκομεν οὕτω $\tau_\kappa=$ $=25{,}96\,\sigma_e$.

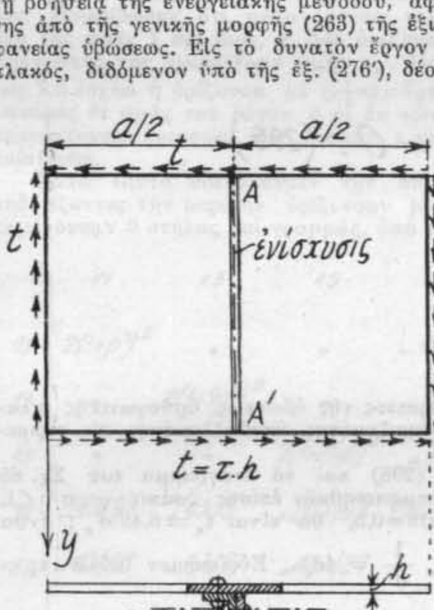


Σχ. 65

Ἐὰν εἰς τὴν πλάκα ἀπείρου μήκους τοῦ Σχ. 64 τοποθετηθοῦν ἄκαμπτοι ἐνισχύσεις ἀνὰ ἀποστάσεις 1,25.b, ἴσας πρὸς τὸ μῆκος τῶν ὕβων, ἡ πλὰξ χωρίζεται εἰς ἄθροισμα πολλῶν πλακῶν πεπερασμένου μήκους, μὲ λόγον πλευρῶν $\varrho=1{,}25$. Ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ Σχ. 65 εὑρίσκομεν διὰ $\varrho=1{,}25$ τὸ ἀντίστοιχον $\varphi=7{,}80$ καὶ ἐπομένως $\tau_\kappa=7{,}80\,\sigma_e$, ἐνῷ διὰ τὴν πλάκα ἀπείρου μήκους εἶναι $\tau_\kappa=5{,}35\,\sigma_e$. Ὁ κίνδυνος ὑβώσεως, παρ' ὅλην τὴν πυκνὴν διάταξιν ἐνισχύσεων, ἐλαττοῦται ἄρα μόνον κατὰ

46 %. Ἀποτελεσματικωτέρα εἶναι ἡ διάταξις τῶν ἐνισχύσεων ἀνὰ ἀποστάσεις b, ὁπότε $\varrho=1$ καὶ $\tau_\kappa=9{,}37\sigma_e$, ἔτι δὲ μᾶλλον ἀποτελεσματικὴ ἡ μείωσις τῆς ἀποστάσεως τῶν ἐνισχύσεων εἰς b/2, ὅτε $\varrho=0{,}5$ καὶ $\tau_\kappa=25{,}96.\sigma_e$, πενταπλασιαζομένης σχεδὸν τότε τῆς ἔναντι ὑβώσεως ἀσφαλείας. Οὐχ ἧττον ἡ τόσον πυκνὴ διάταξις ἐνισχύσεων εἶναι κατ' ἀρχὴν ἀντιοικονομική, τόσῳ μᾶλλον, ὅσῳ αἱ ἐνισχύσεις δέον νὰ ὦσι τελείως ἄκαμπτοι, ἀποκλειομένης τυχὸν ἐκφυγῆς των κατὰ τὴν ὕβωσιν τῆς πλακός.

Ὁσάκις ἡ ἀκαμψία τῶν ἐνισχύσεων δὲν εἶναι ἀπολύτως ἐξησφαλισμένη, εἶναι ἐνδεχόμενον, κατὰ τὴν προσέγγισιν πρὸς τὴν κρίσιμον τιμὴν τ_κ ἢ τὴν ὑπέρβασιν αὐτῆς, νὰ ἐπέλθῃ ὕβωσις τῆς πλακός, παρασυρομένης εἰς λυγισμὸν καὶ τῆς ἐνισχύσεως. Οὕτω λ. χ. διὰ πλάκα ὀρθογωνικὴν $\alpha \times b$, ἔνθα $\alpha \geqslant b$, ἐφωδιασμένην μὲ ἐνίσχυσιν διήκουσαν παραλλήλως πρὸς τὰς πλευρὰς b εἰς τὸ μέσον τῆς πλακὸς (Σχ. 66), τίθεται τὸ πρόβλημα ὑπολογισμοῦ τῆς ἀπαιτουμένης ῥοπῆς ἀδρανείας $J_{\alpha\pi}$ τῆς ἐνισχύσεως, ὅταν ἡ διατμητικὴ δύναμις t φθάνῃ τὴν κρίσιμον τιμὴν t_κ. Ἡ στήριξις τῆς πλακὸς λογίζεται ἀρθρωτὴ κατὰ τὴν περίμετρον $x=0$, α καὶ $y=0$, b. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐμελετήθη ὑπὸ τοῦ Timoshenko («Eisenbau» 1921) τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐνεργειακῆς μεθόδου, ἀφετηρίας γενομένης ἀπὸ τῆς γενικῆς μορφῆς (263) τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας ὑβώσεως. Εἰς τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως τῆς πλακός, διδόμενον ὑπὸ τῆς ἐξ. (276'), δέον ἐν προκειμένῳ



Σχ. 66

νὰ προστεθῇ καὶ τὸ δυνατὸν ἔργον κάμψεως τῆς ἐνισχύσεως, ὑπολογιζόμενον ἐκ τῆς ἐξ. (9) τῆς § 2, ἤτοι τῆς

$$A_\kappa = \frac{1}{2}\int_0^b EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dy$$

ὅπου, ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα, τὸ w νοεῖται εἰσαγόμενον ἐκ τῆς ἐξ. (263) διὰ $x=a/2$ καὶ EJ εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀκαμψίας τῆς ἐνισχύσεως. Τὸ δυνατὸν ἔργον μηκύνσεως τῆς πλακὸς δίδεται καὶ πάλιν ἐκ τῆς ἐξ. (279), ἐνῷ διὰ τὴν ἐνίσχυσιν εἶναι $A_\mu=0$, ἀφοῦ δὲν ἐνεργεῖ κατὰ τὸν ἄξονα τῆς ἐνισχύσεως θλίβουσα δύναμις. Κατὰ τὰ λοιπὰ ὁ ὑπολογισμὸς ἀκολουθεῖ τὴν αὐτὴν πορείαν ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μὴ ἐνισχυμένης πλακός. Λαμβάνοντες χάριν ἱκανοποιητικωτέρας προσεγγίσεως $i,\kappa=1,2,3$, ἤτοι

$i\kappa=11$, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

καὶ θέτοντες τελικῶς $t=t_\kappa=\sigma_e.\varphi.h$, ὡς ὑπελογίσθη αὕτη διὰ τὴν μὴ ἐνισχυμένην πλάκα, εὑρίσκομεν κατὰ Timoshenko

$$(EJ)_{\alpha\pi} = \gamma\ \alpha\ N \qquad (299)$$

ἔνθα γ ἀριθμός, ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ λόγου $\varrho=a/b$. Διὰ $\varrho=1$, 1,28, 1,5, 2, ὁπότε οἱ συντελεσταὶ φ δύνανται νὰ ληφθοῦν ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ Σχ. 65, ὁ Timoshenko δίδει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς $\gamma=15$, 6,3, 2,9, 0,83. Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας J τῆς ἐνισχύσεως, ἐνδείκνυται νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ ὡρισμένον συνεργαζόμενον πλάτος τῆς πλακός, ὡς καὶ τὰ γωνιακὰ συνδέσεως τῆς ἐνισχύσεως ἐπὶ τῆς πλακὸς (πρβλ. Σχ. 66). Ἐπανερχόμενοι εἰς ἐξ. (297) παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἰσχύει τότε μόνον, ὅταν τ_κ παραμένῃ μικρότερον τοῦ ὁρίου ῥοῆς τ_s εἰς διάτμησιν, ἤτοι ἐφ' ὅσον παραμένομεν ***ἐντὸς τῆς ἐλαστικῆς περιοχῆς***. Διὰ χάλυβα St. 37 εἶναι $\tau_s=1385$ kg/cm² [54] καὶ συμφώνως πρὸς ἐξ. (91) $\sigma_e=1898\left(\frac{h}{b}\right)^2$ (t/cm²), ὁπότε ἐκ τῆς ἐξ. (297) εὑρίσκομεν

$$1898\left(\frac{h}{b}\right)^2\varphi \leqslant 1{,}385$$

ἢ

$$\frac{b}{h} \geqslant 37\sqrt{\varphi}. \qquad (300)$$

Διὰ $\varrho=1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ Σχ. 65, $\sqrt{\varphi}=3{,}06$, 2,55, 2,46,...2.315 καὶ ἐπομένως ὡς ἰσχύουσαν τὴν ἐλαστικὴν περιοχήν, ὅταν $b/h \geqslant 113$, 95, 91.....86.

Δυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα, ὡς εἰς τὴν § 8, νὰ θεωρήσωμεν ὑποκατάστατον ῥάβδον χαλυβδίνην, μὲ κίνδυνον λυγισμοῦ ἴσον πρὸς τὸν κίνδυνον ὑβώσεως τῆς πλακός. Ἐὰν λ παριστᾷ τὴν λυγηρότητα τῆς ὑποκαταστάτου ῥάβδου [55], οἱ κίνδυνοι λυγισμοῦ καὶ ὑβώσεως θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς ἐξ. (95) καὶ (297), ἴσοι ὅταν

$$1898\left(\frac{h}{b}\right)^2\varphi = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot\frac{1{,}385}{2{,}073}$$

ἐντεῦθεν δὲ ὑπολογίζομεν τὴν λυγηρότητα τῆς ὑποκαταστάτου ῥάβδου

$$\lambda = \frac{2{,}70}{\sqrt{\varphi}}\cdot\frac{b}{h}. \qquad (301)$$

Κατὰ ταῦτα, ὁ ὑπολογισμὸς ἔναντι ὑβώσεως τοῦ χαλυβδίνου ἐλάσματος ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἔναντι λυγισμοῦ χαλυβδίνης ῥάβδου μὲ λυγηρότητα $\lambda=\frac{2{,}70}{\sqrt{\varphi}}\cdot\frac{b}{h}$. Διὰ $\lambda \geqslant 100$ θὰ εἶναι ἐπίσης

$$\frac{b}{h} \geqslant \frac{100}{2{,}70}\sqrt{\varphi} = 37\sqrt{\varphi},$$

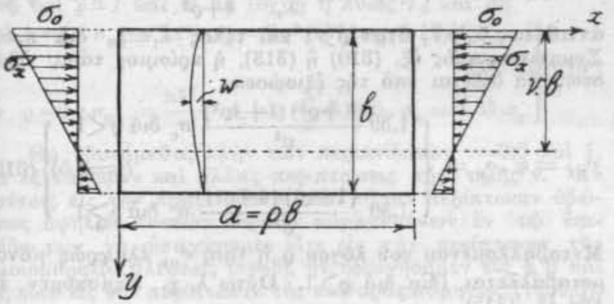
θὰ ἰσχύῃ ἄρα ἡ ἐλαστικὴ περιοχὴ καὶ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν αὐτούσιοι οἱ τύποι καὶ πίνακες ὑπολογισμοῦ εἰς λυγισμὸν τῶν χαλυβδίνων ῥάβδων. Κατ' ἐπέκτασιν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ὑποκατάστατος ῥάβδος μὲ $\lambda=\frac{2{,}70}{\sqrt{\varphi}}\cdot\frac{b}{h}$ καὶ ὁσάκις $\lambda < 100$ ἢ $\frac{b}{h} < 37\sqrt{\varphi}$, ἤτοι ὅταν εὑρισκώμεθα εἰς τὴν πλαστικὴν περιοχήν, ὁπότε θὰ ἀνατρέξωμεν καὶ πάλιν εἰς τοὺς γνωστοὺς πίνακας ὑπολογισμοῦ εἰς λυγισμὸν ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ. Δέον ὅμως νὰ τονισθῇ, ὅτι ἡ ἐπέκτασις αὕτη τυγχάνει αὐθαίρετος, χρήζουσα πειραματικοῦ ἢ θεωρητικοῦ ἐλέγχου ἀναγομένου εἰς τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος τῆς ὑβώσεως ἐν τῇ πλαστικῇ περιοχῇ.

§ 16. Ὕβωσις ὀρθογωνικῆς πλακὸς ὑποβαλλομένης εἰς ὀρθὰς καμπτικὰς τάσεις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς. Ἐξετάσωμεν, ὡς τελευταίαν περίπτωσιν ἐφαρμογῆς τῆς

(54) Συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν ἐπιπονήσεως τῶν Huber—von Mises—Hencky (ὑπόθεσις περὶ τοῦ ἔργου ἰσοόγκου μεταβολῆς μορφῆς), ἥτις καλλίτερον πάσης ἄλλης ἁρμόζει διὰ μεταλλικὰ ὑλικά, τὸ ὅριον διαρροῆς εἰς διάτμησιν τ_s δίδεται συναρτήσει τοῦ ὁρίου διαρροῆς εἰς ἀξονικὴν ἐπιπόνησιν σ_s, ὑπὸ τῆς σχέσεως: $\tau_s=0{,}577\,\sigma_s$ καὶ διὰ $\sigma_s=2400$ kg/cm², $\tau_s=1385$ kg/cm². Βλ. σχετικῶς Ν. Κιτσίκη, Στατικὴ Ι, 1938, § 93, τύπος 232, σελ. 234.

(55) Ἡ λυγηρότης λ δὲν πρέπει νὰ συγχέεται ἐνταῦθα μὲ τὸν ἀριθμὸν λ τῆς ἐξ. (292).

ἐνεργειακῆς μεθόδου, τὸ πρόβλημα τῆς ὑβώσεως ὀρθογωνικῆς πλακὸς $a \times b$, ὑποβαλλομένης εἰς ὀρθὰς τάσεις κάμψεως σ_x, ἐνεργούσας ἐν τῷ μέσῳ ἐπιπέδῳ τῆς πλακὸς (Σχ. 67). Ἡ κατανομὴ τῶν ὀρθῶν καμπτικῶν τάσεων εἶναι γραμμική, ἡ δὲ τιμὴ αὐτῶν, ἀνεξάρτητος τῆς τετμη-



Σχ. 67

μένης x, σταθερὰ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους α τῆς πλακός. Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς πλακὸς θὰ εἶναι ἄρα $n_y = n_{xy} = 0$ καὶ

$$n_x = -\sigma_x h = -\sigma_0 h\left(1-\frac{y}{\nu b}\right) \qquad (302)$$

ἔνθα σ_0 ἡ μεγίστη τάσις θλίψεως, παραγομένη κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς $y=0$, καὶ νb ἡ ἀπόστασις τῆς οὐδετέρας γραμμῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος x.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἕδρασις τῆς πλακὸς εἶναι καθ' ὅλην τὴν περίμετρον *ἀρθρωτή* [56]. Τὸ πρόβλημα ἀπαντᾶται πολὺ συχνὰ εἰς τὴν πρᾶξιν (γεφυροποιΐαν) κατὰ τὴν διερεύνησιν τῆς εὐσταθείας τοῦ μεταξὺ δύο ἐνισχύσεων τμήματος ὑψηλῶν καὶ λεπτῶν κορμῶν χαλυβδίνων ἰδίᾳ δοκῶν, ὑποβαλλομένων εἰς κάμψιν καὶ σύγχρονον ἀξονικὴν ἐπιπόνησιν. Λόγῳ τῆς σχετικῶς πυκνῆς διατάξεως τῶν ἐνισχύσεων, ἡ μεταβολὴ τῶν ὀρθῶν καμπτικῶν τάσεων κατὰ τὴν διεύθυνσιν x δύναται τότε εὐλόγως νὰ παραμεληθῇ.

Ἐκκινοῦμεν καὶ πάλιν ἐκ τῆς γενικῆς μορφῆς (263) τῆς ἐπιφανείας κάμψεως, ἱκανοποιούσης, ὡς εἴδομεν, τὰς συνοριακὰς συνθήκας τῆς ἀρθρωτῆς στηρίξεως. Τὸ δυνατὸν ἔργον ἐκ κάμψεως θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐξ. (276) ἢ (276′), ὡς καὶ εἰς § 15, ἐνῷ τὸ ἔργον ἐκ παραμορφώσεως τοῦ μέσου ἐπιπέδου θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἐξ. (210), μὲ $n_y = n_{xy} = 0$ καὶ $n_x = -\sigma_0 h\,(1-y/\nu b)$, ἴσον πρὸς

$$A_\mu = -\frac{1}{2}\sigma_0 h \iint\left(1-\frac{y}{\nu b}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_0 h\left\{\frac{1}{\nu b}\iint y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy - \iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy\right\}.$$

Συμφώνως πρὸς ἐξ. (265) ἡ παράστασις

$\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$ θὰ περιέχῃ μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \iint \sigma\upsilon\nu^2\alpha_i x \cdot \eta\mu^2\beta_\kappa y \cdot dx\,dy = c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \frac{ab}{4} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\varrho} c_{i\kappa}^2\, i^2 \ [57]$$

ὡς καὶ μέλη τῆς μορφῆς

$$2 c_{i\kappa} c_{mn} \alpha_i \alpha_m \iint \sigma\upsilon\nu\alpha_i x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha_m x \cdot \eta\mu\beta_\kappa y \cdot \eta\mu\beta_n y \cdot dx\,dy$$

ἅτινα λόγῳ ἰσχύος τῶν σχέσεων (269′) καὶ (273) μηδενίζονται ὅλα, ἀφοῦ πάντως θὰ εἶναι $i \neq m$ ἢ $\kappa \neq n$. Γίνεται οὕτω

$$\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = \frac{\pi^2}{4\varrho}\sum_{i}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{i\kappa}^2 \cdot i^2. \qquad (303)$$

(56) Timoshenko: «Der Eisenbau», 1921.
(57) Βλ. ἐξ. (264), (268) καὶ (272).

Ἐξ ἄλλου ἡ παράστασις $\iint y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$ θὰ περιέχῃ μέλη τῆς μορφῆς

$$c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \iint y \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha_i x \cdot \eta\mu^2\beta_\kappa y \cdot dx\,dy = c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2 \frac{a}{2}\int_0^b y\,\eta\mu^2\beta_\kappa y \cdot dy$$

ἅτινα λόγῳ ἰσχύος τῆς νέας σχέσεως

$$\int_0^b y\,\eta\mu^2\beta_\kappa y \cdot dy = \int_0^b y \cdot \eta\mu^2\frac{\kappa\pi}{b} y \cdot dy = \frac{b^2}{4} \qquad (304)$$

γίνονται ἴσα πρὸς $c_{i\kappa}^2 \alpha_i^2\, ab^2/8 = \frac{\pi^2 b}{8\varrho} c_{i\kappa}^2 \cdot i^2$, ἐπίσης δὲ θὰ περιέχῃ μέλη τῆς μορφῆς

$$2 c_{i\kappa} c_{mn} \alpha_i \alpha_m \iint y\,\sigma\upsilon\nu\alpha_i x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha_m x \cdot \eta\mu\beta_\kappa y \cdot \eta\mu\beta_n y \cdot dx\,dy$$

ἅτινα λόγῳ τῶν σχέσεων (272), (273), ἤτοι τῶν

$$\int_0^a \sigma\upsilon\nu\alpha_i x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha_m x \cdot dx = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \delta\iota\grave{\alpha} \quad i \neq m \\ \frac{a}{2} & \delta\iota\grave{\alpha} \quad i = m \end{array}\right\}$$

καὶ τῆς νέας ἐξισώσεως

$$\int_0^b y\,\eta\mu\beta_\kappa y \cdot \eta\mu\beta_n y \cdot dy = \left\{\begin{array}{l} 0 \quad \delta\iota\grave{\alpha}\ (\kappa+n) = \check{\alpha}\rho\tau\iota o\nu \\ -\frac{4b^2}{\pi^2}\cdot\frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2}\ \delta\iota\grave{\alpha}\ (\kappa+n) = \\ \qquad = \pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\nu \end{array}\right\} \qquad (305)$$

ἰσχυούσης μόνον ὅταν $\kappa \neq n$, μετατρέπωνται εἰς

$$-2 c_{i\kappa} c_{in} \alpha_i^2 \frac{a}{2} \cdot \frac{4b^2}{\pi^2}\frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2} = -\frac{4b}{\varrho} c_{i\kappa} c_{in}\, i^2 \frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2}\ [58].$$

Ἡ παράστασις $\frac{1}{\nu b}\iint y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$ λαμβάνει οὕτω τὴν διατύπωσιν

$$\frac{1}{\nu b}\iint y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = \frac{\pi^2}{8\varrho\nu}\sum_{i,\kappa=1}^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa}^2\, i^2 -$$

$$-\frac{4}{\varrho\nu}\sum_{i,\kappa,n=1}^{\infty}\sum^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa} c_{in}\, i^2 \frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2} \qquad (306)$$

τὸ δὲ ἔργον A_μ γίνεται, συμφώνως πρὸς ἐξ. (303) καὶ (306),

$$A_\mu = \frac{\sigma_0 h}{16\varrho\nu}\left\{\pi^2(1-2\nu)\sum_{i,\kappa=1}^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa}^2\, i^2 - 32\sum_{i,\kappa,n=1}^{\infty}\sum^{\infty}\sum^{\infty} c_{i\kappa} c_{in}\, i^2 \frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2}\right\} \qquad (307)$$

ὅπου ὁ ἀριθμὸς $\gamma = \frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2}$ θὰ εἰσαχθῇ δι' ἐκείνας μόνον τὰς τιμὰς κ, n δι' ἃς $(\kappa \pm n) = \pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\nu$.

Δεχθῶμεν ἤδη κατὰ τὴν 1ην προσέγγισιν $i,\kappa = 1,2$, ἤτοι $i\kappa = 11, 12, 21, 22$. Τὸ ἔργον ἐκ κάμψεως (276′) πολλαπλασιασμένον ἐπὶ $\frac{1}{h}\cdot\frac{8\varrho^3}{\sigma_e\,\pi^2}$ γράφεται τότε

$$\frac{1}{h}\,\frac{8\varrho^3}{\sigma_e\,\pi^2}\,A_\kappa = c_{11}^2(1+\varrho^2)^2 + c_{12}^2(1+4\varrho^2)^2 + $$

$$+ c_{21}^2(4+\varrho^2)^2 + c_{22}^2(4+4\varrho^2)^2 \qquad (308)$$

ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ γ, οἱ ἀπαντώμενοι εἰς ἐξ. (307) τοῦ ἔργου A_μ, θὰ εἶναι

$$\delta\iota\grave{\alpha} \quad \kappa n = 12,\ 21 \ : \ \gamma = +\,2/9$$

(58) Παραλείπεται ἡ ἁπλῆ ἀπόδειξις τῶν ἐξ. (304) καὶ (305).

καὶ

$$\sum_{i,\kappa,n=1}^{2}\sum^{2}\sum^{2} c_{i\kappa}\, c_{in}\, i^2 \frac{\kappa n}{(\kappa^2-n^2)^2} = \frac{4}{9}(c_{11}c_{12}+4c_{21}c_{22})$$

συγχρόνως δὲ

$$\sum_{i,\kappa=1}^{2}\sum^{2} c_{i\kappa}^2\, i^2 = c_{11}^2 + c_{12}^2 + 4(c_{21}^2 + c_{22}^2).$$

Τὸ ἔργον A_μ πολλαπλασιασμένον καὶ τοῦτο ἐπὶ $\frac{1}{h}\frac{8\varrho^3}{\sigma_e \pi^2}$ προκύπτει οὕτω

$$\frac{1}{h}\frac{8\varrho^3}{\sigma_e\pi^2}A\mu = \frac{\lambda}{\nu}\left\{\pi^2(1-2\nu)\left[c_{11}^2+c_{12}^2+4(c_{21}^2+c_{22}^2)\right] - \frac{128}{9}(c_{11}c_{12}+4c_{21}c_{22})\right\} \quad (309)$$

ἔνθα, κατ' ἀναλογίαν πρὸς ἐξ. (292), εἰσήχθη

$$\lambda = \frac{\sigma_0\varrho^2}{2\sigma_e\pi^2} \quad (310)$$

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρὸς $c_{i\kappa}$ τοῦ ἀθροίσματος $A_\mu + A_\kappa$ ἢ τῶν δεξιῶν μελῶν τῶν ἐξ. (309) καὶ (310), τιθέμεναι ἴσαι πρὸς μηδέν, παρέχουν σύστημα 4 ὁμογενῶν ἐξισώσεων, ἃς ἀναγράφομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν (311).

Διαφόρισις πρός	C_{11}	C_{12}	C_{21}	C_{22}	
C_{11}	$2(1+\rho^2)^2+\frac{2\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)$	$-\frac{128}{9}\,\frac{\lambda}{\nu}$	•	•	$=0$
C_{12}	$-\frac{128}{9}\cdot\frac{\lambda}{\nu}$	$2(1+4\rho^2)^2+\frac{2\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)$	•	•	$=0$
C_{21}	•	•	$2(4+\rho^2)^2+\frac{8\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)$	$-\frac{512}{9}\cdot\frac{\lambda}{\nu}$	$=0$
C_{22}	•	•	$-\frac{512}{9}\cdot\frac{\lambda}{\nu}$	$2(4+4\rho^2)^2+\frac{8\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)$	$=0$

(311)

Ἐπειδὴ αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (211) περιέχουν μόνον τὰς 2 ἀγνώστους σταθερὰς c_{11}, c_{12} αἱ δὲ λοιπαὶ ἐξισώσεις τὰς ὑπολοίπους 2 σταθερὰς c_{21}, c_{22}, ὁ μηδενισμὸς τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν $c_{i\kappa}$ ἀναλύεται εἰς τὸν μηδενισμὸν δύο ὁριζουσῶν Δ_1, Δ_2. Δι' ἀναπτύξεως τῆς ὁριζούσης Δ_1 λαμβάνομεν τὴν συνθήκην :

$$\Delta_1 = \frac{1}{\nu^2}\left[\pi^4(1-2\nu)^2 - \frac{64^2}{9^2}\right]\lambda_1^2 + \frac{\pi^2(1-2\nu)}{\nu}\left[(1+\varrho^2)^2 + (1+4\varrho^2)^2\right]\lambda_1 + (1+\varrho^2)^2(1+4\varrho^2)^2 = 0. \quad (312)$$

καὶ ἀντιστοίχως ἐκ τῆς ὁριζούσης Δ_2

$$\Delta_2 = \frac{4}{\nu^2}\left[\pi^4(1-2\nu)^2 - \frac{64^2}{9^2}\right]\lambda_2^2 + \frac{\pi^2(1-2\nu)}{\nu}\left[(4+\varrho^2)^2 + (4+4\varrho^2)^2\right]\lambda_2 + 4(1+\varrho^2)^2(4+\varrho^2)^2 = 0. \quad (312')$$

Διὰ δοθείσας τιμὰς ϱ καὶ ν προσδιορίζομεν ἐκ τῶν ἐξ. (312), (312′) τὰς λύσεις λ_1, λ_2, ἐξ ὧν ὡς ἰσχύουσα θὰ ληφθῇ ἡ ***μικροτέρα***, παρέχουσα συμφώνως πρὸς ἐξ. (310) τὴν μικροτέραν κρίσιμον τάσιν

$$\sigma_{o\kappa} = \frac{2\pi^2\lambda}{\varrho^2}\sigma_e = \varphi\cdot\sigma_e. \quad (313)$$

Ἐξετάσωμεν ἤδη δύο ὁριακὰς περιπτώσεις κατανομῆς τῶν τάσεων σ_x, ἤτοι τὰς $\nu=0{,}5$ καὶ $\nu=1$.

α) ***Περίπτωσις ν=0,5 (καθαρὰ κάμψις)*** : Θέτοντες εἰς ἐξ. (312), (312′) $(1-2\nu)=0$ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις

$$\lambda_1 = \frac{9}{128}(1+\varrho^2)(1+4\varrho^2) \;;\; \lambda_2 = \frac{9}{128}(1+\varrho^2)(4+\varrho^2). \quad (314)$$

Θὰ εἶναι $\lambda_1<\lambda_2$ ἤτοι $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1+4\varrho^2}{4+\varrho^2} < 1$, ὅταν $\varrho<1$, ἀντιθέτως $\lambda_1>\lambda_2$ ὅταν $\varrho>1$ καὶ τέλος $\lambda_1=\lambda_2$ διὰ $\varrho=1$. Συμφώνως πρὸς ἐξ. (310) ἢ (313), ἡ κρίσιμος τάσις ὑβώσεως θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\sigma_{o\kappa} = \varphi\cdot\sigma_e = \left\{\begin{array}{l} 1{,}39\,\dfrac{(1+\varrho^2)(1+4\varrho^2)}{\varrho^2}\,\sigma_e \text{ διὰ } \varrho<1 \\ \qquad\qquad\qquad (\nu=0{,}5) \\ 1{,}39\,\dfrac{(1+\varrho^2)(4+\varrho^2)}{\varrho^2}\,\sigma_e \text{ διὰ } \varrho>1 \end{array}\right\} \quad (315)$$

Μεταβαλλομένου τοῦ λόγου ϱ ἡ τιμὴ $\sigma_{o\kappa}$ ἐλαφρῶς μόνον μεταβάλλεται, ἰδίᾳ διὰ $\varrho>1$. Οὕτω λ. χ. εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξ. (315)

διὰ ϱ = 0,5 0,75 1 1,5 2 ....
φ = 13,90 12,53 13,90 12,53 13,90 ....

τῆς $\min\sigma_{o\kappa}$ παραγομένης διὰ τιμὴν ϱ κειμένην μεταξὺ 1 καὶ 1,5 μηδενίζουσαν τὴν $d\varphi/d\varrho$, ἤτοι διὰ $\varrho=\sqrt{2}$. Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν

$$\min\sigma_{o\kappa} = \sigma_{o\kappa(\varrho=\sqrt{2})} = 12{,}50\,\sigma_e \;(\nu=0{,}5). \quad (316)$$

β) ***Περίπτωσις ν=1 (διάγραμμα κατανομῆς τριγωνικόν, μὲ τεταγμένην μηδενιζομένην εἰς y=b)*** : Αἱ ἐξ. (312), (312′) γίνονται τότε

$$\Delta_1 = 46{,}84\lambda_1^2 - \pi^2\left[(1+\varrho^2)^2 + (1+4\varrho^2)^2\right]\lambda_1 + (1+\varrho^2)^2(1+4\varrho^2)^2 = 0 \quad (317)$$

$$\Delta_2 = 187{,}36\lambda_2^2 - \pi^2\left[(4+\varrho^2)^2 + (4+4\varrho^2)^2\right]\lambda_2 + 4(1+\varrho^2)^2(4+\varrho^2)^2 = 0 \quad (317')$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς λύσεις

$$\lambda_1 = \frac{1}{93{,}68}\left\{\pi^2[\ldots\ldots] - \sqrt{\pi^4[\ldots\ldots]^2 - 187{,}36(1+\varrho^2)^2(1+4\varrho^2)^2}\right\} \quad (318)$$

καὶ

$$\lambda_2 = \frac{1}{374{,}72}\left\{\pi^2[\ldots\ldots] - \sqrt{\pi^4[\ldots\ldots]^2 - 2997{,}76(1+\varrho^2)^2(4+\varrho^2)^2}\right\}. \quad (318')$$

Ἐκ τῶν σημείων $\pm$ τῆς ῥίζης τοῦ δεξιοῦ μέλους τῶν (318), (318′) ἐτέθη μόνον τὸ σημεῖον (—), παρέχον τὰς μικροτέρας τιμὰς λ_1, λ_2.

Διὰ $\varrho=0,5$ εὑρίσκομεν $\lambda_1=0{,}127$ καὶ $\lambda_2=0{,}306$, ἄρα ἰσχύει τότε ἡ λύσις λ_1 καὶ θὰ εἶναι

$$\sigma_{o\kappa}=8\pi^2\lambda_1\cdot\sigma_e=10\sigma_e\ (\nu=1\ ,\ \varrho=0{,}5) \tag{319}$$

ἐνῷ διὰ $\varrho=1$ *καὶ* 2 θὰ ἰσχύῃ ἡ λύσις λ_2 καὶ δὴ

$$\left.\begin{aligned}&\text{διὰ } \varrho=1:\sigma_{o\kappa}=2\pi^2\lambda_2\sigma_e=2\pi^2.0{,}511.\sigma_e=10{,}10\,\sigma_e\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu=1)\\ &\text{»}\ \ \varrho=2:\sigma_{o\kappa}=\frac{\pi^2\lambda_2}{2}\sigma_e=\frac{\pi^2}{2}1{,}495\,.\,\sigma_e=7{,}37\,\sigma_e\end{aligned}\right\}(319')$$

Θὰ ἠδυνάμεθα, πλὴν τῶν περιπτώσεων $\nu=0{,}5$ καὶ 1, νὰ ἐξετάσωμεν καὶ ἄλλας περιπτώσεις τῆς τιμῆς ν. Ἐν τούτοις εἰς τὴν πρᾶξιν δυνάμεθα πᾶσαν περίπτωσιν ὑβώσεως ὑψηλῶν λεπτῶν κορμῶν καμπτομένων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ των νὰ ὑπαγάγωμεν εἴτε εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμοιομόρφου θλίψεως ($\nu=8$), ἣν ἠρευνήσαμεν εἰς § 8 καὶ 14, εἴτε εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς καθαρᾶς κάμψεως ($\nu=0{,}5$), εἴτε τέλος εἰς τὴν τῆς τριγωνικῆς κατανομῆς τῶν καμπτικῶν τάσεων ($\nu=1$).

Τοῦτο δὲ τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ ὁ ἀνωτέρω γενόμενος ὑπολογισμὸς μὲ $i,\kappa=1,2$ ἀποτελεῖ προσέγγισιν.

Πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἀνωτέρω ἐξαχθέντων συμπερασμάτων καὶ πρὸς ἀπόκτησιν τύπων ἱκανοποιητικωτέρας προσεγγίσεως, ὁ ὑπολογισμὸς ἐπανελήφθη διὰ $i,\kappa=1,2,3$, ἤτοι διὰ τὴν ἀκολουθίαν δεικτῶν

$$i\kappa=11,\ 12,\ 13,\ 21,\ 22,\ 23,\ 31,\ 32,\ 33.$$

Τὸ ἔργον κάμψεως (276′) θὰ δίδεται τότε ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h}\frac{8\varrho^3}{\sigma_e\pi^2}A_\kappa=\ &c_{11}^2\left(1+\varrho^2\right)^2+c_{12}^2\left(1+4\varrho^2\right)^2+\\ &+c_{13}^2\left(1+9\varrho^2\right)^2+c_{21}^2\left(4+\varrho^2\right)^2+c_{22}^2\left(4+4\varrho^2\right)^2+\\ &+c_{23}^2\left(4+9\varrho^2\right)^2+c_{31}^2\left(9+\varrho^2\right)^2+c_{32}^2\left(9+4\varrho^2\right)^2+\\ &\qquad\qquad+c_{33}^2\left(9+9\varrho^2\right)^2\end{aligned}\right\}(320)$$

τὸ δὲ ἔργον A_μ τῆς ἐξ. (307), τῇ βοηθείᾳ τοῦ πληρεστέρου πίνακος ἀριθμῶν γ, ἤτοι τοῦ

$$\gamma=+\,2/9\quad \text{διὰ}\quad \kappa\eta=12,\ 21$$
$$\gamma=+\,6/25\quad \text{»}\quad \kappa\eta=23,\ 32$$

μετασχηματίζεται εἰς

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\cdot\frac{8\varrho^3}{\sigma_e\pi^2}A\mu=\frac{\lambda}{\nu}\Big\{&\pi^2\left(1-2\nu\right)\Big[\left(c_{11}^2+c_{12}^2+c_{13}^2\right)+\\ &+4\left(c_{21}^2+c_{22}^2+c_{23}^2\right)+9\left(c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2\right)\Big]-\\ &-\frac{128}{9}\Big[c_{11}c_{12}+4c_{21}c_{22}+9c_{31}c_{32}\Big]-\\ &-\frac{384}{25}\Big[c_{12}c_{13}+4c_{22}c_{23}+9c_{32}c_{33}\Big]\Big\}\end{aligned}\tag{321}$$

ἔνθα λ δίδεται καὶ πάλιν ὑπὸ τῆς ἐξ. (310).

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι τοῦ ἀθροίσματος τῶν δεξιῶν μελῶν τῶν ἐξ. (320), (321) ὡς πρὸς $c_{i\kappa}$ παρέχουν τὸ κάτωθι σύστημα 9 ὁμογενῶν ἐξισώσεων, αἵτινες ἀνὰ τρεῖς λαμβανόμεναι περιέχουν μόνον 3 ἀγνώστους ἑκάστη

$$\left.\begin{aligned}&\left[2\left(1+\varrho^2\right)^2+\frac{2\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{11}-\frac{128}{9}\frac{\lambda}{\nu}c_{12}\ldots=0\\ &-\frac{128}{9}\frac{\lambda}{\nu}c_{11}+\left[2\left(1+4\varrho^2\right)^2+\frac{2\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{12}-\\ &\qquad\qquad-\frac{384}{25}\frac{\lambda}{\nu}c_{13}\ldots\ldots\ldots\ldots=0\\ &-\frac{384}{25}\frac{\lambda}{\nu}c_{12}+\left[2\left(1+9\varrho^2\right)^2+\frac{2\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{13}\ldots=0\end{aligned}\right\}(322)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[2\left(4+\varrho^2\right)^2+\frac{8\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{21}-\frac{512}{9}\frac{\lambda}{\nu}c_{22}\ldots\ldots=0\\ &-\frac{512}{9}\frac{\lambda}{\nu}c_{21}+\left[2\left(4+4\varrho^2\right)^2\frac{8\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{22}-\\ &\qquad\qquad-\frac{1536}{25}\frac{\lambda}{\nu}c_{23}\ldots\ldots\ldots\ldots=0\\ &-\frac{1536}{25}\frac{\lambda}{\nu}c_{22}+\left[2\left(4+9\varrho^2\right)^2+\frac{8\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{23}\ldots=0\end{aligned}\right\}(322')$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[2\left(9+\varrho^2\right)^2+\frac{18\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{31}-128\frac{\lambda}{\nu}c_{32}\ldots=0\\ &-128\frac{\lambda}{\nu}c_{31}+\left[2\left(9+4\varrho^2\right)^2+\frac{18\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{32}-\\ &\qquad\qquad-\frac{3456}{25}\frac{\lambda}{\nu}c_{33}=0\\ &-\frac{3456}{25}\frac{\lambda}{\nu}c_{32}+\left[2\left(9+9\varrho^2\right)^2+\frac{18\lambda}{\nu}\pi^2(1-2\nu)\right]c_{33}=0\end{aligned}\right\}(322'').$$

Ἑκάστη τῶν ὁριζουσῶν $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ τῶν συστημάτων (322), (322′), (322″) τιθεμένη ἴση πρὸς μηδὲν παρέχει τὰς ῥίζας λ_1, λ_2, λ_3, ἐξ ὧν ὡς ἰσχύουσα δέον νὰ ληφθῇ ἡ ἐκ τούτων μικροτέρα. Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς *καθαρᾶς κάμψεως* ($\nu=0{,}5$) τὰ ἀνωτέρω συστήματα καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσαι ὁρίζουσαι Δ_1, Δ_2, Δ_3 ἁπλοποιοῦνται σημαντικῶς. Αἱ συνθῆκαι $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$ γράφονται τότε

$$\Delta_1=\left(1+\varrho^2\right)^2\left\{\left(1+4\varrho^2\right)^2\left(1+9\varrho^2\right)^2-\left(\frac{384}{25}\right)^2\lambda_1^2\right\}-$$
$$-\left(\frac{128}{9}\right)^2\lambda_1^2\left(1+9\varrho^2\right)^2=0 \tag{323}$$

$$\Delta_2=\left(4+\varrho^2\right)^2\left\{\left(4+4\varrho^2\right)^2\left(4+9\varrho^2\right)^2-\left(\frac{1536}{25}\right)^2\lambda_2^2\right\}-$$
$$-\left(\frac{512}{9}\right)^2\lambda_2^2\left(4+9\varrho^2\right)^2=0 \tag{323'}$$

$$\Delta_3=\left(9+\varrho^2\right)^2\left\{\left(9+4\varrho^2\right)^2\left(9+9\varrho^2\right)^2-\left(\frac{3456}{25}\right)^2\lambda_3^2\right\}-$$
$$-128^2\lambda_3^2\left(9+9\varrho^2\right)^2=0 \tag{323''}$$

ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις λ_1, λ_2, λ_3, ἤτοι

$$\lambda_1\sqrt{\left[\frac{128}{9}\cdot\frac{(1+9\varrho^2)}{(1+\varrho^2)}\right]^2+\left(\frac{384}{25}\right)^2}=(1+4\varrho^2)(1+9\varrho^2) \tag{324}$$

$$\lambda_2\sqrt{\left[\frac{512}{9}\cdot\frac{(4+9\varrho^2)}{(4+\varrho^2)}\right]^2+\left(\frac{1536}{25}\right)^2}=(4+4\varrho^2)(4+9\varrho^2) \tag{324'}$$

$$\lambda_3\sqrt{\left[128\,.\,\frac{(9+9\varrho^2)}{(9+\varrho^2)}\right]^2+\left(\frac{3456}{25}\right)^2}=(9+4\varrho^2)(9+9\varrho^2). \tag{324''}$$

Διὰ $\varrho=1$, εὑρίσκομεν $\lambda_1=0{,}687$, $\lambda_2=0{,}650$, $\lambda_3=0{,}872$, ἰσχύει ἄρα ἡ λύσις $\lambda_2=0{,}650$ καὶ ἑπομένως

$$\sigma_{o\kappa}=2\pi^2\lambda_2\,.\,\sigma_e=12{,}82\,\sigma_e\,. \tag{325}$$

Συγκρίνοντες μὲ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς πρώτης προσεγγίσεως, ἤτοι τὴν $13{,}90\sigma_e$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ δὲν εἶναι μεγάλη, ἴση περίπου πρὸς 8 %. Δυνάμεθα ἄρα γενικεύοντες τὸ συμπέρασμα τοῦτο, τὸ προκῦψαν διὰ τὴν περίπτωσιν $\varrho=1$, $\nu=0{,}5$, *νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς εὑρεθείσας διὰ πᾶν ν καὶ ϱ τιμὰς τῆς πρώτης προσεγγίσεως, πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐπὶ τὸν λόγον 12,82/13,90 = 0,92.* Τὸ ἀποτέλεσμα δὲν θὰ εἶναι ἀπολύτως ἀκριβές, θὰ προσεγγίζῃ ὅμως εἰς τὴν πραγματικότητα μὲ ἀκρίβειαν, ἣν δὲν ἠλέγξαμεν, δυνάμεθα ὅμως νὰ προδικάσωμεν ἐπαρκῆ.