

JOHN T. KATSIKADELIS

**A METHOD OF EVALUATION OF THE PLANE STRESS
COMPONENTS IN THE INTERIOR OF THIN PLATES
FROM GIVEN BOUNDARY STRESSES OBTAINED
EXPERIMENTALLY**

DISSERTATION

**Submitted to the School of Civil Engineering of the
National Technical University**

for the degree of

DOCTOR ENGINEER

ATHENS 1973

ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗ

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΕΩΣ
ΤΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΣΚΩΝ
ΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΜΕΝΗΣ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΗΝ ΕΝΤΑΣΙΝ**

**ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑ ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ
ΑΝΩΤΑΤΗΝ ΣΧΟΛΗΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΥ Ε.Μ.Π.**

ΑΘΗΝΑΙ 1973

ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗ

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΕΩΣ
ΤΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΣΚΩΝ
ΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΜΕΝΗΝ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΗΝ ΕΝΤΑΣΙΝ**

**ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑ ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ
ΑΝΩΤΑΤΗΝ ΣΧΟΛΗΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΥ Ε.Μ.Π.**

Α Θ Η Ν Α Ι 1973

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ:
ΕΥΤΥΧΙΟΣ ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε. Μ. Π.

'Η έγκρισις διδακτορικής διατριβής υπό της Ανω-
τάτης Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Ε. Μ.
Πολυτεχνείου δέν υποδηλοί άποδοχήν τῶν γνω-
μῶν του συγγραφέως (N. 5343/1932 ἀρθρον 202)

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕΒΑΣΤΟΥΣ ΜΟΥ ΓΟΝΕΙΣ

BLANK PAGE

ΠΡΟΔΟΓΟΣ

Η παρούσα έργασία ἐξεπονήθη ἐν τῷ Ἐργαστηρίῳ Στατικῆς καὶ Ἀντισεισμικῶν Ἐρευνῶν τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου κατά τό χρονικόν διάστημα 1971 - 1972 καὶ ὑπεβλήθη, ὡς Διδακτορική Διατριβή, εἰς τὴν Ἀνωτάτην Σχολήν Πολιτικῶν Μηχανικῶν τοῦ Ἰδρύματος τὴν 17ην Ἰανουαρίου 1973.

Καθ' ὅλας τὰς φάσεις τῆς ἐκπονήσεως τῆς παρούσης Διατριβῆς ἔτυχον τῆς ἀνεκτιμήτου συμπαραστάσεως καὶ καθοδηγήσεως τοῦ Σεβαστοῦ μου καθηγητοῦ κ. Εύτυχίου Κοκκινοπούλου, πρός τὸν ὁποῖον ἐκφράζω καὶ ἀπό τῆς θέσεως ταύτης τὰς θερμοτέρας τῶν εὐχαριστιῶν μου.

Διά τούς ὑπολογισμούς τῆς παρούσης Διατριβῆς ἐγένετο εὑρεῖα χρῆσις τῶν ὑπολογιστῶν IBM 1620 τοῦ E.M.P. καὶ CDC 3300 - 1700 τοῦ Κεντρού Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν "Δημόκριτος". Τὸν Ἀντιπρύτανιν καθηγητήν κ. Κ. Θεοφιλόπουλον ὡς καὶ τὴν Διοίκησιν τῆς Ἑλληνικῆς Ἐπιτροπῆς Ατομικῆς Ἀνεργείας θερμῶς εὐχαριστῶ διά τὴν, μέσῳ τοῦ καθηγητοῦ κ. Κοκκινοπούλου, παρασχεθεῖσαν μοι ἄδειαν ἀπεριορίστου χρησιμοποιήσεως τῶν προαναφερθέντων ὑπολογιστικῶν συγκροτημάτων.

Ἐπίσης εὐχαριστῶ θερμῶς τὸν Σεβαστόν μου Κοσμήτορα τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Πολιτικῶν Μηχανικῶν καθηγητήν κ. Εὐάγγελον Παναγιωτουνᾶκον διά τὰς χρησίμους συμβουλάς του ἐπί τοῦ θέματος τῆς Διατριβῆς καὶ διά τὴν ἐν παντὶ συμπαράστασίν του καθ' ὅλην τὴν διαδικασίαν τῆς ἐγκρίσεως ταύτης.

Τέλος, τοὺς τεχνίτας τοῦ Ἐργαστηρίου Στατικῆς καὶ Ἀντισεισμικῶν Ἐρευνῶν τοῦ E.M.P. κ.κ. B. Εὐτ. οσύνην καὶ Λ. Ρόμβον διά τὴν οὖσιαστικήν βοήθειάν των κατά τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πειραμάτων ὡς καὶ τὴν δακτυλογράφον κ. A.κ. Ἀναπλιώτου καὶ τὴν σχεδιάστριαν δ/δα 'Ολ. Ἀσημάκη διά τὴν τελικήν ἐμφάνισιν τῆς Διατριβῆς, εἰλικρινῶς εὐχαριστῶ.

Αθῆναι, Ἰούνιος 1973

I. Θ. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗΣ

BLANK PAGE

Π Ι Ν Α Σ Π ΕΡ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

	Σελίς
Εισαγωγική Περίληψις	I-III
§1.- Παραδοχαί'	1
§2.- 'Εξισώσεις 'Ελαστικότητος	4
§3.- 'Εξισώσεις τῶν τεσσάρων σημείων. 'Αριθμητική δλο- κλήρωσις τῶν ἐξισώσεων Laplace καὶ Poisson	6
§4.- Σύγκλισις τῆς μεθόδου Gauss-Seidel διά τὰς ἐξισώ- σεις Laplace καὶ Poisson	14
§5.- Ταχύτης συγκλίσεως. Μέθοδος τῆς ύπερχαλαρώσεως	16
§6.- Συστηματοποίησις τῆς μεθόδου διά τὴν σύνταξιν προγράμματος 'Ηλεκτρονικοῦ 'Υπολογιστοῦ	18
§7.- Δομή τοῦ προγράμματος 'Ηλεκτρονικοῦ 'Υπολογιστοῦ. Τό πρόγραμμα SOLAPEQ	23
§8.- 'Εφαρμογή τοῦ προγράμματος SOLAPEQ εἰς δύσκον γνωστῆς ἐντάσεως	38
§9.- 'Υπολογισμός τῶν κυρίων τάσεων σ_1 , σ_2 καὶ τῶν γωνιῶν διευθύνσεων $\omega = (\hat{n_1}, x)$. Τό πρόγραμμα PRINCST	64
§10.- 'Εφαρμογή τῆς μεθοδολογίας	70
I. Φωτοελαστικόν πείραμα	70
II. 'Αξιοποίησις τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος....	74

	Σελίς
III. 'Υπολογισμός τῶν τάσεων εἰς τό σύνορον	83
IV. 'Εφαρμογή τοῦ προγράμματος SOLAPEQ	85
V. Μελέτη τῶν ἀποτελεσμάτων	114
VII. 'Υπολογισμός τῶν κυρίων τάσεων σ_1 , σ_2 καὶ τῆς γωνίας $\omega = (\pi_1, \hat{x})$. Κατασκευή τοῦ δι- κτύου κυρίων τάσεων	124
 Βιβλιογραφία	142
 Παράρτημα	145
§π1.- Πρόβλημα Dirichlet. Μέθοδοι όλοκληρώσεως τῆς ἐξι- σώσεως Laplace.	145
§π2.- 'Εφαρμογή τῆς ἐξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων. 'Η μέθοδος Gauss - Seidel διά τὴν ἐπέλυσιν τοῦ συστήματος.	146
§π3.- Μετασχηματισμός τῶν ἐξισώσεων ἐπιπέδου ἐλαστι- κότητος.	151
 Περίληψις εἰς τὴν 'Αγγλικήν	153

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

‘Η ἐφαρμογή τῶν δίσκων ὡς φερόντων στοιχείων εἰς τάς κατασκευάς τοῦ συγχρόνου μηχανικοῦ γίνεται διαρκῶς εύρυτέρα. Τοῦτο ὁφεῖλεται κυρίως εἰς τὴν δυνατότητα προσδιορισμοῦ τῆς ἐντάσεως τῶν δι’ ἀναπτύξεως προσεγγιστικῶν ύπολογιστικῶν μεθόδων βασιζομένων εἰς τὴν χρῆσιν μεγάλων καὶ ταχέων ἡλεκτρονικῶν ύπολογιστῶν. Αἱ προσεγγιστικαὶ αὗται μέθοδοι δίδουν κατά κανόνα ἴκανοποιητικά ἀποτελέσματα. Πλὴν ὅμως ὑπάρχουν περιπτώσεις, κατά τάς ὁποίας αἱ μέθοδοι αὗται καθίστανται ἀπρόσφοροι, εἴτε διότι δέν παρουσιάζουν καθολικότητα (π.χ. ἡ μέθοδος διά σειρῶν Fourier), εἴτε διότι εἶναι δύσχρηστοι (π.χ. μέθοδος πεπερασμένων διαφορῶν διά περίπτωσιν δίσκου μὲ πολύπλοκον σύνορον).’ Ενεκ τούτου πολλάκις γίνεται προσφυγή εἰς πειραματικήν μέθοδον προσδιορισμοῦ τῆς ἐντάσεως τῶν δίσκων.

Μία πρόσφορος πειραματική μέθοδος προσδιορισμοῦ τῆς ἐντάσεως τῶν δίσκων εἶναι ἡ φωτοελαστική. ‘Η μέθοδος αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νά προσδιορίσωμεν ταχέως τὴν ἔντασιν εἰς τὸ σύνορον ἐνός ἐπιπέδως ἐντεινομένου δίσκου δι’ ἐκτελέσεως ἐνός φωτοελαστικοῦ πειράματος. ’Η πλήρης ὅμως ἀποτίμησις τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ ἐσωτερικόν τοῦ δίσκου δι’ ἀξιοποιήσεως τῶν δεδομένων τοῦ πλήρους φωτοελαστικοῦ πειράματος (δικτυον ἰσοχρώμων καὶ ἰσοκλινῶν) ἀποτελεῖ ἐργασίαν λίγαν κοπιώδη διά τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν γνωστῶν μεθόδων ἀποτιμήσεως τῆς ἐντάσεως, ὡς εἶναι ἡ διά μετρήσεων ἐπί τῶν τροχιῶν τῶν κυρίων τάσεων μέθοδος Filion καὶ ἡ μέθοδος τῶν διατιμητικῶν διαφορῶν τοῦ Föppl. Τά δέ οὕτω λαμβανόμενα ἀποτελέσματα εἶναι ἀμφιβόλου πιστότητος.

‘Αντιθέτως ἡ πλήρης ἀποτίμησις τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ ἐσωτερικόν τοῦ δίσκου θά ἐγένετο εύχερῶς, ἐάν ἐπετυγχάνετο αὕτη μόνον ἐκ τῆς συνοριακῆς ἐντάσεως τοῦ δίσκου, καθ’ ὅσον εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθοῦν πειραματικῶς αἱ συνιστώσαι τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ σύνορον κατά τρόπουν ἀπλοῦν καὶ ταχύν π.χ. δι’ ἐκτελέσεως ἐνός μόνου φωτοελαστικοῦ πειράματος καὶ λήφεως τοῦ δικτύου τῶν ἰσοχρώμων ἐπί μιᾶς φωτογραφίας. Πρός αὐτήν τὴν κατεύθυνσιν ἐστράφησαν αἱ προσπάθειαι τοῦ γράφοντος, τό δέ ἀποτέλεσμα τεύτων ύπηρε καρποφόρον. Τῷ ὅντι ἐπετεύχθη λόγοις τοῦ προβλήματος τῆς ἀποτιμήσεως τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ ἐσωτερικόν ἐπιπέδως ἐντεινομένου δίσκου μόνον ἐκ τῆς συνοριακῆς ἐντάσεως δι’ ἐφαρμογῆς τῆς

ἐν τῇ παρούσῃ ἔργασίᾳ ἀναπτυσσομένης μεθοδολογίας.

Τό πρῶτον βῆμα πρὸς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐγένετο, μέ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐπιπέδου· ἐλαστικότητος (§2) εἰς ίσοδύναμον σύστημα. τεσσάρων μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων β' τάξεως ἐλλειπτικοῦ τύπου, ἐκάστη τῶν ὅποιων περιέχει μίαν μόνον ἄγνωστον συνάρτησιν. Ἐπειδὴ δέ εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθούν πειραματικῶς εἰς τό σύνορον τοῦ δίσκου αἱ συνιστώσαι τῆς ἐντάσεως, τό πρόβλημα μετετοπίσθη εἰς τὴν ἐπίλυσιν τεσσάρων προβλημάτων συνοριακῶν τιμῶν, ἡ λύσις τῶν ὅποιων δίδει τάς συνιστώσας τῆς ἐντάσεως εἰς τό ἑσωτερικόν τοῦ ἐπιπέδου δίσκου.

Ἡ δυσκολία τοῦ προσδιορισμοῦ, ὑπὸ ἀναλυτικήν μορφήν, τῆς λύσεως τῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (Laplace καὶ Poisson) ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῇ χρήσει φηφιακοῦ ἡλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ. Διὲ ἔφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς ὑπερχαλαρώσεως ἐπιτυγχάνεται ταχύτατος προσδιορισμός μεγάλου πλήθους τιμῶν τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ἀντιστοιχουσῶν εἰς τάς κορυφάς πυκνοτάτου τετραγωνικοῦ καννάβου καλύπτοντος τὴν ἐπίπεδον περιοχήν, ἐπὶ τῆς ὅποιας ἔφαρμόζεται ἡ ἐξισώσις. Ἡ ἀκρίβεια τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως χάρις καὶ εἰς τὸν χρησιμοποιούμενον τετραγωνικόν κάνναβον, εἶναι λίγαν ἴκανοποιητική εἰς τοιοῦτον μάλιστα βαθμόν, ὃστε, ὡς τοῦτο τεκμαίρεται καὶ ἐκ τοῦ παραδείγματος τῆς § 8, ἡ λαμβανομένη λύσις νά θεωρῆται καθ' ἡμᾶς ἀκριβής διὰ τάς περιπτώσεις τῶν ἔφαρμογῶν.

Μετά τὴν ἐξασφάλισιν τῆς συγχλίσεως τῆς μεθόδου τῆς ὑπερχαλαρώσεως διὰ τάς ἐξισώσεις Laplace καὶ Poisson (§4) καὶ τὴν ὑπερηγκησιν δυσκολιῶν τινῶν ἐμφανιζομένων κατά τὴν μόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων πεπερασμένων διαφορῶν διὰ τά καμπύλα τμήματα τοῦ συνόρου, συστηματοποιεῖται ἡ μέθοδος τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως πρὸς σύνταξιν πργράμματος ἡλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ εἰς γλῶσσαν FORTRAN.

Τό πρόγραμμα, εἰς τό δόποιον δίδεται τό δύνομα SOLAPEQ (§ 7), δέχεται ὡς δεδομένα τάς συνοριακάς τιμάς τῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως καὶ μετά τὴν ἕκτελεσιν τῶν ὑπολογισμῶν δίδει ὡς ἀποτελέσματα τάς τιμάς τῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως εἰς τό ἑσωτερικόν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου καὶ ἐπὶ τῶν κορυφῶν τετραγωνικοῦ καννάβου ἐπιθυμητῆς πυκνότητος σημείων, ἐξαρτωμένης μόνον ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ ὑπολογιστοῦ. Διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ὁρθότητος τῶν ἀποτελεσμάτων, δύσκις ἡ συνοριακή ἔντασις προσδιορίζεται φωτοελαστικῶς, τό πρόγραμμα ἀναπαράγει

καί ἔκτυπώνει τό δίκτυον τῶν ἵσοχρώμων, ἦτοι τάς ἵσοσταθμικάς καμπύλας $|\sigma_1 - \sigma_2|/S = v$ ($v = 1, 2, \dots$). Ἐτερον πρόγραμμα ύπό τό ὅνομα PRINCST ύπολογίζει, ἐκ τῶν ύπό τοῦ SOLAPEQ προσδιοριζομένων σ_x , σ_y καί τ_{xy} , τάς κυρίας τάσεις σ_1 καί σ_2 ὡς καί τήν γωνίαν διευθύνσεως $w = (n_1, x)$, τήν δόποιαν σχηματίζει ἢ διεύθυνσις τῆς κυρίας τάσεως σ_1 μέ τόν ἄξονα x , ἐπιτρεπομένης οὕτω καί τῆς χαράξεως τῶν τροχιῶν τῶν κυρίων τάσεων.

Εἰς τήν §10 γίνεται ἐφαρμογή τῆς μεθοδολογίας διά τόν προσδιορισμόν τῆς ἐντάσεως ἐντός κόμβου ἐπιπέδου πλαισίου ύποβαλλομένου εἰς δεδομένην φόρτισιν. Ὁ προσδιορισμός τῆς συνοριακῆς ἐντάσεως γίνεται διά τῆς φωτοελαστικῆς μεθόδου. Τά λαμβανόμενα ἀποτελέσματα ἐπιτρέπουν τήν πλήρη μελέτη τῆς διαίτης τῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως ἐντός τοῦ κόμβου, δόποιος, ὡς γνωστόν, ἀποτελεῖ ἐντεινομένην περιοχήν ἐλάχιστα διηρευνημένην.

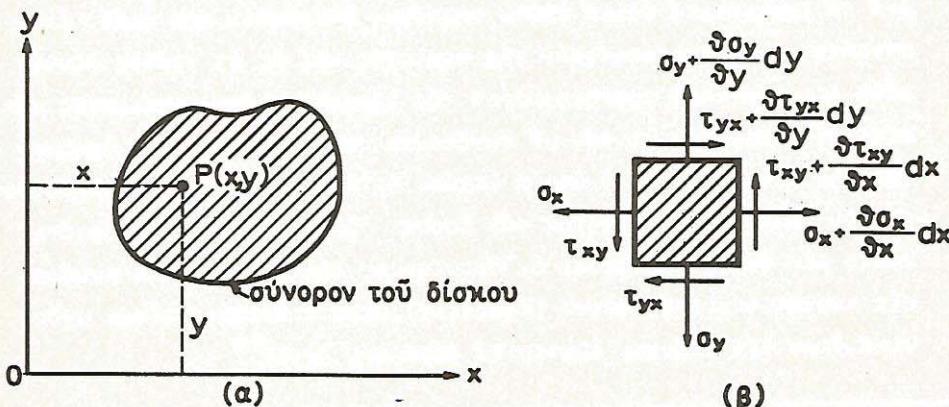
Ἡ ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ ἀναπτυσσομένη μεθοδολογία δέν συναρτᾶται ἀποκλειστικῶς πρὸς τήν φωτοελαστικότητα. Δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ἀνευ οὐασδήποτε τροποποιήσεως διά τήν ἀποτίμησιν τῆς ἐντάσεως εἰς τό ἑσωτερικόν ἐπιπέδως ἐντεινομένου δίσκου ἀπλῆς ἢ πολλαπλῆς συνοχῆς εἰς πᾶσαν περίπτωσιν γνωστῆς συνοριακῆς ἐντάσεως πειραματικῶς ἢ ἄλλως πως λαμβανομένης.

BLANK PAGE

§1.- Παραδοχαί

- Τούλικόν του δίσκου λαμβάνεται όμοιογενές λεστροπόν και έλαστικόν ἀκολουθούν τόν νόμον του Hooke.
- Ή επί τού συνόρου του δίσκου ἔφαρμοζομένη ἔξωτερη φόρτισις ἐπενεργεῖ παραλλήλως πρός τό επίπεδον καὶ του δίσκου καὶ εἶναι κατανεμημένη όμοιομόρφως ἐπί του πάχους του. Το σταθερόν πάχος του δίσκου εἶναι πολύ μικρόν ἐν συγκρίσει πρός τάς ἔτερας δύο διαστάσεις αὐτοῦ, ὥστε αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐντάσεως $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ νά ἔχουν μηδενικήν τιμήν καθ' ὅλον τό πάχος του. (*Επίπεδος "Εντασις).
- Το πάχος του δίσκου λαμβάνεται ἵσον πρός τήν μονάδα. Κατά τήν ἀντιμετώπισιν συνεπῶς οἰασδήποτε περιπτώσεως, δέον δπως, ἡ θεωρουμένη όμοιομόρφως ἐπί του πάχους του δίσκου κατανεμημένη φόρτισις, διαιρεθῇ κατ' ἀρχάς διά τού διδομένου πάχους αὐτοῦ καὶ ἀναχθῇ οὕτως ἀπό δύναμιν ἀνά μονάδα μήκους εἰς δύναμιν ἀνά μονάδα ἐπιφανείας (τάσις).
- Αἱ εἰς τόν ύπολογισμόν εἰσαγόμεναι παράμετροι τῆς ἐντάσεως προσημαίνονται βάσει τῆς κλασσικῆς σημάνσεως τῆς θεωρίας τῆς ἔλαστικότητος ήτοι:

Μία παράμετρος ἐντάσεως εἰς τι σημεῖον $P(x,y)$ του δίσκου



Σχ.1

* [7] §7, σελίς 11 καὶ §84, σελίς 241.

είναι θετική, έδν, έφαρμοζομένη ἐπὶ τὸνος ἔδρας τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου μὲν πλευρᾶς dx , δύ τοῦ περιέχοντος τὸ P , ἔχη ἄνυσμα ὁμόφορον μέν πρός τοὺς θετικοὺς ἡμιάξονας δι' ἔδραν μέν αὐξομένας συντεταγμένας, ἀντίφορον δέ πρός αὐτούς δι' ἔδραν μέν φθινομένας συντεταγμένας. Εἰς τὸ Σχ.1β δεικνύεται ἡ θετική φορά τῶν παραμέτρων τῆς ἐντάσεως.

5.- Αἱ μαζικαί δυνάμεις ἐπὶ τοῦ δίσκου παραλεῖπονται ἐφ' ὅσον δέν εἶναι σταθεραί καὶ συνεπῶς ἡ ἐντασις προκύπτει ἀνεξάρτητος τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν τοῦ ὑλικοῦ. Εἰς δίσκους πολλαπλῆς συνοχῆς, πλὴν τῆς περιπτώσεως, καθ' ἥν ἡ φόρτισις εἰς ἐν ἐκαστον τῶν ἐσωτερικῶν συνόρων είναι ἴσορροπος ἢ ἀνάγεται εἰς ζεῦγος, ἡ ἐντασις γενικῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν τοῦ ὑλικοῦ. Ἡ ἐπιρροή αὕτη τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν ἐπὶ τῆς κατανομῆς τῶν τάσεων είναι μικρά καὶ δύνανται νέα παραμεληθῆ δι' ὅλους τοὺς πρακτικούς σκοπούς. Συνεπείᾳ τούτου πειραματικά ἀποτελέσματα λαμβανόμενα ἐπὶ δοκιμής δύνανται νά δάναχθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐκ διαφορετικοῦ ὑλικοῦ προτύπου (κατασκευῆς)*.

6.- Τὸ σύνορον τοῦ δίσκου δέν παρουσιάζει εἰσεχομένας γωνίας, ἦτοι σημεῖα ἀσυνεχεῖας τῆς κλίσεως του εἰς θέσεις, δόπου τὸ σύνορον είναι κοῖλον Σχ.2α. Ἡ παραδοχή αὕτη γίνεται διὰ νά ἀποφευχθῆ ἡ ἐμφάνισις πολὺ μεγάλων τάσεων εἰς τὴν περιοχήν τῶν σημείων τούτων. Διὰ τὰ πραγματικά ὑλικά τοῦτο σημαίνει ύπερβασιν τοῦ ὅρίου ἐλαστικότητος, πλαστικοποίησιν τῆς περιοχῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀδυνατίων πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἴδεατῆς πλέον σύνοριακῆς τάσεως δι' ἐλαστικόν ὑλικόν μέ συνέπειαν τὴν μή δυνατότητα ἐφαρμογῆς τῆς μεθοδολογίας, ἡ διόπινα ἴσχυει δι' ἐλαστικά ὑλικά ἀκολουθοῦντα τόν νόμον ἐλαστικότητος τοῦ Hooke. Ἀς σημειώθη ἐνταῦθα, δότε τοῦτο δέν ἀντιμετωπίζεται δι' ἀσυνέχειαν τῆς κλίσεως τοῦ συνόρου εἰς κυρτάς περιοχάς αὐτοῦ (ἐξάρσεις), δόπου ἡ ἐντασις είναι μηδενική, δόταν δέν ύπάρχει ἐξωτερική φόρτισις Σχ.2β**.

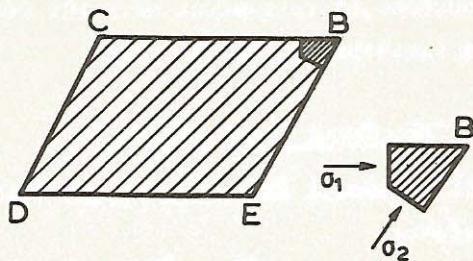
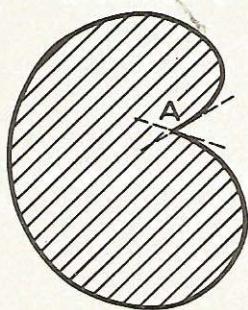
* [8] σελίς 142

[3] Vol.II, §1.11, σελ.20⁴ καὶ §6.1, §6.2, σελ.174

[7] §39, σελ.120

[4] §3, σελ.92

** [7] §16, σελ.20



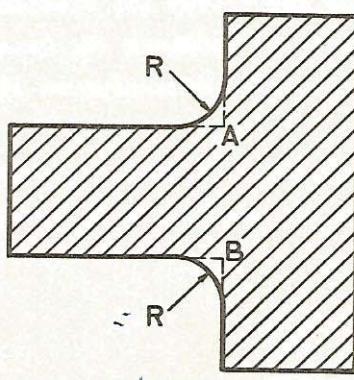
α. Δίσκος μέση συνέχειαν τῆς κλίσεως τοῦ συνόρου εἰς τὴν περιοχήν, ἔνθα τοῦτο εἶναι κοῖλον.

β. Δίσκος μέση κυρτόν σύνορον καὶ συνέχειαν τῆς κλίσεως τούτου εἰς τὰ σημεῖα B, C, D, E. Ἡ λόρροπία τοῦ στοιχείου B ἀποκοπτομένου ὑπὸ καθέτων πρὸς τὸ σύνορον τομῶν ἀποτελεῖ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Σχ.2

Ἐάν δημιουργίστανται εἰσέχουσαι γωνίαι εἰς τὸ σύνορον, τότε ή ἀνωτέρω ἐμφανιζομένη δυσκολία ἀντιμετωπίζεται ὡς ἀκολούθως:

Τό σύνορον ἀντικαθίσταται εἰς τὴν περιοχήν αὐτήν ὑπὸ τόξου καμπύλης, κατά προτίμησιν κυκλικοῦ (Σχ.3), καταλλήλου ἀκτῖνος καμπυλότητος, ὅπτε νῷ ἀποκαθίσταται η συνέχεια καὶ αἱ παραγόμεναι τάσεις νῷ εἶναι ἐντὸς τῆς ἐλαστικῆς περιοχῆς τοῦ ὄλικον.



Σχ.3 Δίσκος, τοῦ ὁποίου αἱ εἰσέχουσαι γωνίαι εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τόξων κύκλου ἀκτῖνος R.

Ἡ παραδοχὴ αὐτῆς ὡς καὶ πειραματικῶς ἡλέγχθη, ἐπιφέρει ἀλλοῖωσιν τῆς ἐντάσεως εἰς μικράν μόνον περιοχήν πέριξ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου τοῦ συνόρου, ἐπιτρεπομένης οὕτω τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ ἐκτιθεμένης. μεθοδολογίας.

§2.- Ἐξισώσεις ἐλαστικότητος.

Αἱ ἐξισώσεις ἐλαστικότητος, αἱ δοκίαι διέπουν τὴν ἐπίπεδον ἐντασίν εἶναι:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad 1(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \text{ τελεστής Laplace})$$

Ἐνθα σ_x καὶ σ_y αἱ ὁρισαὶ τάσεις κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων x καὶ y ἀντιστοίχως καὶ τ_{xy} ἡ διατμητική τάσις δρᾶσα ἐπὶ ἔδρας τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα x καὶ ἔχουσα διεύθυνσιν τὴν τοῦ ἄξονος y . Ἡ ἑτέρα διατμητική τάσις εἶναι $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ (Σχ. 1β). Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις ἐκφράζουν τὴν ἴσορροπίαν τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου εἴς τι σημεῖον (x, y) τοῦ δίσκου, ἢ δέ τρίτη, γνωστή ὡς ἐξισώσις συμβιβαστοῦ, ἐξασφαλίζει τὴν συνέχειαν τοῦ ἐπιπέδου ἐλαστικοῦ μέσου.

Αἱ τρεῖς αὗται ἐξισώσεις δύοις μετά τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν, προκυπτουσῶν ἐκ τῆς ἴσορροπίας ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ δίσκου, θέτουν τό πρόβλημα τῆς ἐπιπέδου ἐλαστικότητος, ἢ ἐπίλυσις τοῦ δύοίου ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος.

'Ἐν τοῖς ἐπομένοις αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις χρησιμοποιοῦνται ὑπό τὴν κατωτέρω μετεσχηματισμένην μορφήν των (βλέπε § π3)

$$\Delta s = 0$$

$$\Delta \sigma_x = - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

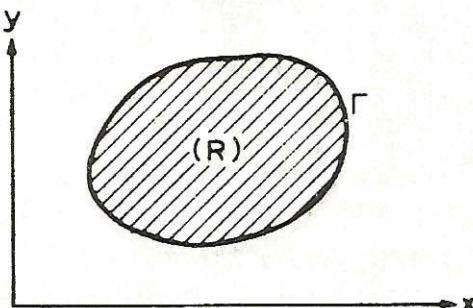
$$\Delta \sigma_y = - \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

$$\Delta \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}$$

ενθα $S = \sigma_x + \sigma_y$, ώστε νά δοθῇ λύσις του προβλήματος εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ παραμετροὶ τῆς ἐντάσεως σ_x , σ_y καὶ τ_{xy} εἶναι γνωσταὶ εἰς τό σύνορον του δέσκου ἐκ πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ τούτων (π.χ. φωτοελαστικῶς).

Ἡ ἀπόδειξις του μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων ἐπιπέδου ἐλαστικότητος ἐκ τῆς μορφῆς 1 (α, β, γ) εἰς τήν μορφήν 2($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) δύδεται εἰς τήν §π3 του παραρτήματος.

Κατόπιν τουτου τό πρόβλημα μετατρέπεται εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν συναρτήσεων $S(x, y)$, $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ καὶ $\tau_{xy}(x, y)$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἐλλειπτικοῦ τύπου, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων $S(\Gamma)$, $\sigma_x(\Gamma)$, $\sigma_y(\Gamma)$ καὶ $\tau_{xy}(\Gamma)$ ἐπί του συνόρου Γ τῆς περιοχῆς R (Σχ. 4), ἐπί τῆς ὁποίας ἐφαρμόζονται αἱ ἐξισώσεις (2). Οὕτως ἡ ἐπίλυσις του συστήματος (1) ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν του συστήματος (2), ἐκάστη ἐξισώσις του ὁποίου περιλαμβάνει μίαν μόνον ἀγνωστὸν συνάρτησιν.



Σχ. 4

Διεύδολοκληρώσεως τῆς έξισώσεως (2α) προσδιορίζεται κατ' αρχάς ἡ συνάρτησις S δίδουσα τό αέθροισμα $\sigma_x + \sigma_y$, τό όποιον εἶναι σταθερόν διεύδολον εκαστον σημείου του δίσκου, ἀνεξάρτητον του προσανατολισμού τῶν ἀξόνων ἀναφορᾶς x, y καὶ ίσους τούς πρός τό αέθροισμα τῶν κυρίων τάσεων $\sigma_1 + \sigma_2$ εἰς τό θεωρούμενον σημεῖον (πρώτη ἀναλλοίωτος τῶν τάσεων). Έν συνεχείᾳ ύπολογίζονται αἱ συναρτήσεις:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$$

καὶ κατόπιν διεύδολοκληρώσεως τῶν ἔξισώσεων 2(β, γ, δ) προσδιορίζονται αἱ σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} . Ή μέθοδος διεύδολοκληρώσεως τῶν ἔξισώσεων του συστήματος (2) ἀναπτύσσεται εἰς ἐπομένας παραγράφους τῆς παρούσης ἔργας.

§3.- Εξισώσις τῶν τεσσάρων σημείων. Αριθμητική διεύδοληρώσις τῶν ἔξισώσεων Laplace καὶ Poisson.*

Η αριθμητική διεύδοληρώσις συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τῶν μερικῶν διαφορικῶν ἔξισώσεων:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (\alpha)$$

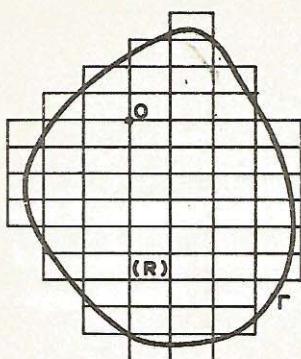
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (\beta)$$

ὑπότιμης ἔξισώσεων πεπερασμένων διαφορῶν διεύδολα τὰ σημεῖα O ἐνός ὁρθογωνίου καννάβου ἐφαρμοζομένου ἐπί τῆς περιοχῆς R (Σχ. 5). Αἱ μορφούμεναι ἔξισώσεις εἶναι ίσαριθμοι πρός τό πλήθος τῶν σημείων του καννάβου ἐσωτερικῶς του συνόρου Γ , εἰς τὰ όποια ζητεῖται ὁ προσδιορισμός τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως U . Οὕτω προκύπτει ἐν συστήμα γραμμικῶν ἀλγεβρικῶν ἔξισώσεων, ἡ ἐπίλυσις του όποιου δίδει τὰς τιμάς τῆς συναρτήσεως.

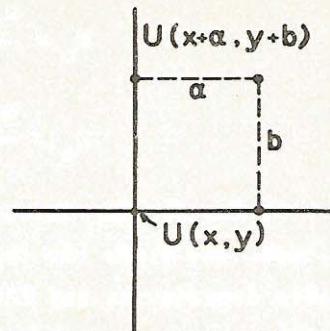
Η ἀντικατάστασις τῶν ἔξισώσεων (α) καὶ (β) ύποτιμης ἔξισώσεων διαφορῶν ἐπιτυγχάνεται διεύδοληρώσεως τῆς συναρτήσεως εἰς σειράν Taylor.

Η τιμὴ τῆς συναρτήσεως $U(x+a, y+b)$ (Σχ. 6) εἶναι δυνατόν να προσεγγι-

* Βλέπε §5π1 καὶ π2 τοῦ παραρτήματος.



Σχ.5



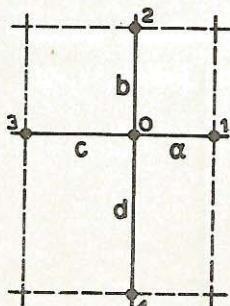
Σχ.6

ση η άν λαβωμεν τους πρώτους όρους της σειρᾶς Taylor, δτε, μέ παράλειψιν τῶν όρων τάξεως μεγαλυτέρας της τρίτης, έχομεν:

$$U(x+a, y+b) = U(x, y) + aU_x + bU_y + \frac{1}{2} [a^2 U_{xx} + 2abU_{xy} + b^2 U_{yy}] + \\ \frac{1}{6} [a^3 U_{xxx} + 3a^2 b U_{xxy} + 3ab^2 U_{xyy} + b^3 U_{yyy}] \quad (4)$$

Οι δεκται x, y εἰς τὴν συνάρτησιν U δηλοῦν παραγώγισιν π.χ.

$$U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$



Σχ.7

Διεφαρμογῆς τῆς σχέσεως (4) διά τὰ σημεῖα 1, 2, 3 καὶ 4 τοῦ Σχ.7 λαμβάνομεν:

$$U_1 = U_o + aU_x + \frac{a^2}{2} U_{xx} + \frac{a^3}{6} U_{xxx}$$

$$U_2 = U_o + bU_y + \frac{b^2}{2} U_{yy} + \frac{b^3}{6} U_{yyy}$$

$$U_3 = U_o - cU_x + \frac{c^2}{2} U_{xx} - \frac{c^3}{6} U_{xxx}$$

(γ)

$$U_4 = U_o - dU_y + \frac{d^2}{2} U_{yy} - \frac{d^3}{6} U_{yyy}$$

Εάν $a=b=c=d=h$, τότε αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀθροιζόμεναι κατά μέλη δύονται:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 4U_o + h^2 (U_{xx} + U_{yy})$$

καί δυνάμει τῶν ἐξισώσεων (α) καὶ (β) λαμβάνομεν ἀντιστούχως:

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{4} \quad (5)$$

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - h^2 g(x,y)}{4} \quad (6)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἔκφράζουν τὴν τιμήν τῆς συναρτήσεως U συναρτήσει τῶν τιμῶν τῶν τεσσάρων ἵσαπεχόντων γειτονικῶν σημείων. Διά τοῦτο δύνομαζονται καὶ ἐξισώσεις τῶν τεσσάρων σημείων. Εἰδικώτερον ἡ (5) καλεῖται καὶ ἐξισώσις Liebmam.

Διά τὴν ἐξαγωγὴν τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) ὑπετέθη ὅτι τὰ σημεῖα 1,2,3 καὶ 4 ἴσαπέχουν τοῦ 0, ἐάν δημιουργεῖται διαφορετικὸν τρόπον ἐργασίας. Πρός τοῦτο παραλείπονται εἰς τὰς σχέσεις (γ) καὶ οἱ ὅροι τάξεως μεγαλυτέρας τῆς δευτέρας ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + aU_x + \frac{a^2}{2} U_{xx} \\ U_2 &= U_0 + bU_y + \frac{b^2}{2} U_{yy} \\ U_3 &= U_0 - cU_x + \frac{c^2}{2} U_{xx} \\ U_4 &= U_0 - dU_y + \frac{d^2}{2} U_{yy} \end{aligned} \quad (6)$$

Μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἀπαλεῖφομεν τὴν U_x καὶ μεταξὺ δευτέρας καὶ τετάρτης τὴν U_y , διότε λαμβάνομεν:

$$cU_1 + aU_3 = (a+c)U_0 + \frac{ac(a+c)}{2} U_{xx}$$

$$dU_2 + bU_4 = (b+d)U_0 + \frac{bd(b+d)}{2} U_{yy}$$

η

$$\frac{1}{a(a+c)} U_1 + \frac{1}{c(a+c)} U_3 = \frac{1}{ac} U_0 + \frac{1}{2} U_{xx} \quad (ε)$$

$$\frac{1}{b(b+d)} U_2 + \frac{1}{d(b+d)} U_4 = \frac{1}{bd} U_0 + \frac{1}{2} U_{yy} \quad (ζ)$$

αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀθροιζόμεναι κατὰ μέλη δίδουν:

$$\frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} = \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \right) U_0 + \frac{1}{2} (U_{xx} + U_{yy})$$

και' δυνάμει τῶν (α) και' (β) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 = \frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 = \frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} - \frac{1}{2} g(x,y) \quad (8)$$

Αἱ σχέσεις (7) και' (8) ἐκφράζουν τὰς ἔξισώσεις τῶν τεσσάρων σημείων διὰ τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὰ γειτονικά σημεῖα 1,2,3 και' 4 ἀπέχουν ἀνίσους ἀποστάσεις ἐκ τοῦ 0.

Κατὰ τὴν μόρφωσιν τῶν ἔξισώσεων (7) και' (8) ἐγένετο παράλειψις δρων τῆς σειρᾶς Taylor τάξεως μεγαλυτέρας τῆς δευτέρας, ἐνῷ διὰ τὰς (5) και' (6) ἐγένετο παράλειψις δρων τάξεως μεγαλυτέρας τῆς τρίτης. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σφάλμα εἰς τὰς ἔξισώσεις (5) και' (6) εἶναι ἀνάλογον τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ βήματος τοῦ καννάβου, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἔξισώσεις (7) και' (8), ὅπου τὸ σφάλμα εἶναι ἀνάλογον τῆς τρίτης δυνάμεως αὐτοῦ. Αἱ ἔξισώσεις, ἄρα, (5) και' (6) παρέχουν μεγαλυτέραν ἀκριβειαν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς U , ἀπό τὰς ἔξισώσεις (7) και' (8). Ἐκ τούτου ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ τετραγωνικός κάνναβος εἶναι ὁ πλέον ἐνδεδειγμένος διὰ τὴν λῆψιν ἀκριβεστέρων ἀποτελεσμάτων. Αἱ ἔξισώσεις (7) και' (8) θὰ ἐφαρμόζωνται μόνον διὰ τὰ σημεῖα πλησίον τοῦ συνόρου, ὅπου αἱ ἀποστάσεις τῶν γειτονικῶν σημείων δέν δύνανται γενικῶς να εἶναι ἕστι.

Αἱ ἔξισώσεις (7) και' (8) μετασχηματίζονται περαιτέρω, ἵνα λάβουν μορφὴν προσφορωτέραν διὰ τὴν χρησιμοποίησέν των κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ προγράμματος ἡλεκτρονικοῦ υπολογιστοῦ.

Θέτομεν:

$$a = s_1 h$$

$$b = s_2 h$$

$$c = s_3 h$$

$$d = s_4 h$$

(η)

Ενθα h εἶναι μῆκος ἐκφράζον τὸ σταθερὸν βῆμα τοῦ τετραγωνικοῦ καννάβου και' $0 < s_1, s_2, s_3, s_4 \leq 1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (7) και' (8) λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right) U_o = \frac{U_1}{s_1(s_1+s_3)} + \frac{U_2}{s_2(s_2+s_4)} + \frac{U_3}{s_3(s_1+s_3)} + \frac{U_4}{s_4(s_2+s_4)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right) U_o &= \frac{U_1}{s_1(s_1+s_3)} + \frac{U_2}{s_2(s_2+s_4)} + \frac{U_3}{s_3(s_1+s_3)} + \frac{U_4}{s_4(s_2+s_4)} - \\ &\quad - \frac{h^2}{2} g(x,y) \quad (10) \end{aligned}$$

Αι έξισώσεις (9) και (10) δυνανται νά συγχωνευθοῦν είς μέαν έξισωσιν τήν (10) ἐκ τῆς ὅποιας ή (9) θά προκύπτει διά $g(x,y) = 0$.

Τήν έξισωσιν (10) μετασχηματίζομεν περιτέρω είς τήν:

$$U_o = c_1 U_1 + c_2 U_2 + c_3 U_3 + c_4 U_4 + c_5 g(x,y) \quad (11)$$

Ξνδα ἐτέθη:

$$c_1 = \frac{1}{s_1(s_1+s_3)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{s_2(s_2+s_4)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right)$$

$$c_3 = \frac{1}{s_3(s_1+s_3)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right) \quad (12)$$

$$c_4 = \frac{1}{s_4(s_2+s_4)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right)$$

$$c_5 = -\frac{h^2}{2} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4} \right)$$

Εύκολως διαπιστοῦμεν ότι διά $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ προκύπτουν ἐκ τῆς (11) διά $g(x,y) = 0$ ή (5) και' $g(x,y) \neq 0$ ή (6).

Ἐναπομένει πλέον νά προσδιορισθοῦν και' αί τιμαί τῶν συναρτήσεων $g(x,y)$ είς τάς έξισώσεις $2(\beta, \gamma, \delta)$ σελ. 4 δηλαδή αί τιμαί τῶν παραγώγων $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$ μέ άντερετον πρόσημον, είς δλους τούς κόμβους τοῦ κανυάβου έσωτερικῶς τοῦ σύνδρου Γ , ἐκ τῆς γνωστῆς ἀρμονικῆς συναρτήσεως S τήν ὅποιαν χάριν ὁμοιομορφίας τῶν ἐκφράσεων παριστῶμεν διά τοῦ U .

Θά διακρίνωμεν, ώς και' διά τήν έξισωσιν τῶν τεσσάρων σημείων, δύο περιπτώσεις:

I.- $a = b = c = d = h$.

Δι' αδροίσεως της πρώτης και της τρίτης τῶν ἐξισώσεων (γ) σελ. 7 λαμβάνομεν:

$$U_1 + U_3 = 2U_o + h^2 U_{xx}$$

έκ της δύοις προκύπτει:

$$U_{xx} = \frac{U_1 - 2U_o + U_3}{h^2} \quad (13)$$

καθ' Όμοιον τρόπον δι' αδροίσεως της δευτέρας και τετάρτης τῶν ἐξισώσεων (γ) λαμβάνομεν:

$$U_2 + U_4 = 2U_o + h^2 U_{yy}$$

ή

$$U_{yy} = \frac{U_2 - 2U_o + U_4}{h^2} \quad (14)$$

II.- $a \neq b \neq c \neq d$.

Έκ της σχέσεως (ε) λαμβάνομεν:

$$U_{xx} = 2 \frac{cU_1 - (a+c)U_o + aU_3}{ac(a+c)} \quad (θ)$$

και' έκ της σχέσεως (ζ):

$$U_{yy} = 2 \frac{dU_2 - (b+d)U_o + bU_4}{bd(b+d)} \quad (ι)$$

Αι (θ) και (ι) δυνάμει τῶν σχέσεων (η) δέδουν:

$$U_{xx} = 2 \frac{s_3 U_1 - (s_1 + s_3)U_o + s_1 U_3}{s_1 s_3 (s_1 + s_3) h^2} \quad (15)$$

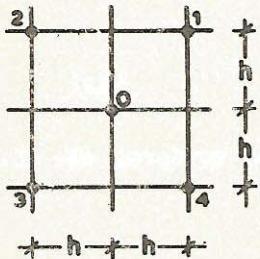
$$U_{yy} = 2 \frac{s_4 U_2 - (s_2 + s_4)U_o + s_2 U_4}{s_2 s_4 (s_2 + s_4) h^2} \quad (16)$$

Προφανῶς αἱ σχέσεις (15) και (16) διὰ $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ δέδουν τὰς σχέσεις (13) και (14).

Καὶ διὰ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἴσχει ἡ παρατήρησις, δτε αἱ σχέσεις (13) και (14) δέδουν τὰς μερικὰς παραγώγους μὲν μεγαλυτέραν ἀ-

πρέβειαν άπό τάς (15) και (16).

'Ο ύπολογισμός της μικτής παραγώγου U_{xy} , δύναται, ώς θά ίδωμεν, να γίνη πάντοτε διά την περιπτώσιν, διότου $a=b=c=d=h$ και έργαζόμεθα ώς κατωτέρω.



'Εφαρμόζοντες την σχέσιν (4) σελ. 7 διαδοχικῶς διά τάς κορυφές 1,2,3 και 4 τούς περὶ τό ο τετραγώνου, βλ. Σχ. 8, λαμβάνομεν:

Σχ.8

$$U_1 = U_o + hU_x + hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(U_{xxx} + 3U_{xxy} + 3U_{xyy} + U_{yyy})$$

$$U_2 = U_o - hU_x + hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(-U_{xxx} + 3U_{xxy} - 3U_{xyy} + U_{yyy})$$

$$U_3 = U_o - hU_x - hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(-U_{xxx} - 3U_{xxy} - 3U_{xyy} - U_{yyy})$$

$$U_4 = U_o + hU_x - hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(U_{xxx} - 3U_{xxy} + 3U_{xyy} - U_{yyy})$$

'Αθροίζοντες τάς άνωτέρω σχέσεις κατά μέλη, άφού προηγουμένως πολλαπλασιάσωμεν άμφοτερα τάς μέλη της δευτέρας και της τετάρτης έξ αυτῶν έπι -1, λαμβάνομεν:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = 4h^2 U_{xy}$$

και έπομένως:

$$U_{xy} = \frac{U_1 - U_2 + U_3 - U_4}{4h^2} \quad (17)$$

'Εκ τού τρόπου έξαγγής της σχέσεως (17) συμπεραίνομεν, διτι τό σφάλμα ύπολογισμού της μικτής παραγώγου είναι άναλογον της τετάρτης δυνάμεως τού βήματος h τού καννάβου.

'Ακολούθως θά δειχθῇ, πῶς ή σχέσις (17) έφαρμόζεται δι'δλα τά σημεῖα τού καννάβου, άσχέτως έάν ταῦτα εύρισκονται μακράν τού συνόρου ή πλησίον αύτού. Πρός τόν σκοπόν τούτον διακρίνομεν τάς τρεῖς κατωτέρω περιπτώσεις:

I.- Τό σημεῖον Ο εύρισκεται μακράν τοῦ συνόρου (Σχ.9α). 'Επειδή τό σημεῖον Ο ίσαπέχη τῶν τεσσάρων γειτονικῶν του, ἐφαρμόζεται ἀπ' εύθειας ἡ σχέσις (17).

II.-Τό σημεῖον Ο εύρισκεται πλησίον τοῦ συνόρου, δέοντος δέ γειτονικά σημεῖα διατεταγμένα κατά διαγώνιον εύρισκονται ἐσωτεροικῶς τοῦ συνόρου (Σχ.9β καὶ Σχ.9γ).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν χρησιμοποιούμεν γνωστήν ἴδιότητα τῶν ἀρμονικῶν συναρτήσεων $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$, ὅπότε διά Σχ.9β, μὲν $a = (\hat{x}, \hat{n}) = \pi/4$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ καὶ βάσει τῆς (13) γραφούμενης διά τὴν διεύθυνσιν n καὶ μὲν $h\sqrt{2}$ ἀντί h ἔχομεν:

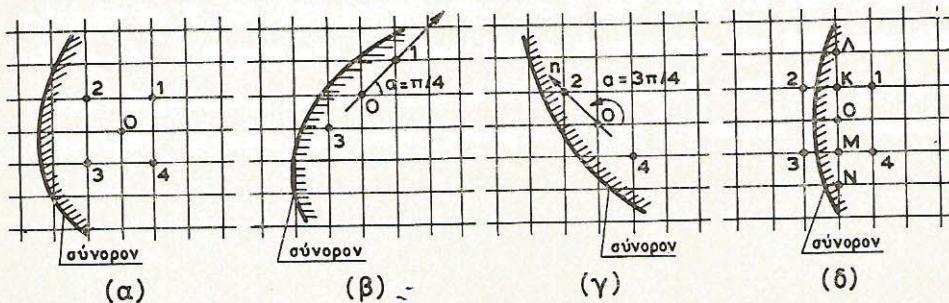
$$U_{xy} = \frac{U_1 - 2U_o + U_3}{2h^2} \quad (18\alpha)$$

καὶ διά Σχ.9γ, μὲν $a = (\hat{x}, \hat{n}) = 3\pi/4$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$:

$$U_{xy} = - \frac{U_2 - 2U_o + U_4}{2h^2} \quad (18\beta)$$

III.- Εἶναι ἡ περίπτωσις, ὅπου πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν διπλούς διατάξεις τοῦ συνόρου.

Π.χ. αἱ τιμαὶ U_2, U_3 (Σχ.9δ) εἶναι ἄγνωστοι. 'Επομένως πρέπει νά υπολογίσωμεν μέσαν ἐκ τῶν τιμῶν U_2, U_3 καὶ νά ἐφαρμόσωμεν κατά περίπτωσιν μέσαν ἐκ τῶν σχέσεων (18) ἢ νά υπολογίσωμεν ἀμφοτέρας τὰς U_2 καὶ U_3 καὶ νά ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν (17).



Σχ.9

* Διά κάθε ἀρμονικήν συνάρτησιν $U(x, y)$ ίσχύει: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ διά $(\hat{x}, \hat{n}) = \pi/4$ ἢ $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ διά $(\hat{x}, \hat{n}) = 3\pi/4$.

'Ο ύπολογισμός, όμως τιμής τῆς U ἐκτός τοῦ συνόφου εἶναι δυνατός ἀν ληφθῆ U π' ὅψιν ὅτι ἡ U εἶναι ἀρμονική.

Διεφαρμογῆς τῆς σχέσεως (5) σελ. 8 ἔχομεν:

$$U_2 = 4U_K - U_\Lambda - U_1 - U_0$$

$$U_3 = 4U_M - U_N - U_4 - U_0$$

Ενθα $U_0, U_1, U_4, U_K, U_\Lambda, U_M, U_N$ γνωσταί τιμαί τῆς U .

§4.- Σύγκλισις τῆς μεθόδου Gauss - Seidel διά τάς ἔξισώσεις Laplace καὶ Poisson.

Διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προκύπτοντος συστήματος ἀλγεβρικῶν ἔξισώσεων $AU = C$ ἐκ τοῦ δοποίου προσδιορίζονται αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζεται ἡ ἐπαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (ὅρα §2 τοῦ παραρτήματος).

Εἰς τήν §2 τοῦ παραρτήματος (σελ. 146) ὑποτίθεται, ὅτι ἡ ἐπαναληπτική μέθοδος διά τάς ἔξισώσεις Laplace καὶ Poisson συγκλίνει. Ἀπαιτεῖται, ἀρα, ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τῆς ὑποθέσεως ταύτης, διά νά εἶναι δυνατόν νά ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος.

'Η ἀπόδειξις γίνεται δι' ἀπ' εύθειας ἐφαρμογῆς τοῦ ἴκανοῦ κριτήριου συγκλίσεως (ὅρα §2 τοῦ παραρτήματος).

Τό σύστημα $AU=C$ εἶναι μή ἐλαττώσιμον, διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει θά ἔπειτε αἱ τιμαί τῆς U εἰς μίαν ὑποπεριοχήν τῆς R νά μή ἐπηρεάζωνται ἀπό τάς συνοριακάς τιμάς τμήματος τῆς καμπύλης τοῦ συνόφου, ὅπερ ἀδύνατον. "Αλλωστε τοῦτο γίνεται ἀμέσως φανερόν, ἐάν καταγράψωμεν τάς ἔξισώσεις τοῦ συστήματος, ὅπότε διαπιστοῦται εύκολως ἐκ

τοῦ τρόπου μορφώσεως των, δτι δέν εἶναι δυνατόν νά εύρεθη όμάς ἐξισώσεων, ή όποιά νά δύναται νά ἐπιλυθῇ ἀνεξαρτήτως τῶν ύπολοί πων.

Διά τήν ἀπόδειξιν καί τοῦ δευτέρου σκέλους τοῦ κριτηρίου λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν (7) σελ. 9 — διά τήν ἐξίσωσιν (8) θά ίσχυουν τά αὐτά, διότι ή ποσότης $-\frac{1}{2}g(x,y)$ ως γνωστή παραμένει εἰς β' μέλος τῆς ἐξισώσεως — ή όποια γράφεται:

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 - \frac{1}{a(a+c)}U_1 - \frac{1}{b(b+d)}U_2 - \frac{1}{c(a+c)}U_3 - \frac{1}{d(b+d)}U_4 = 0 \quad (\alpha)$$

Εἰς τήν ἀνωτέρω σχέσιν ὁ συντελεστής τῆς U_0 εἶναι διαγώνιον στοιχεῖον τοῦ μητρώου A.

Ἐπομένως θά πρέπει:

$$\left|\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right| \geq \left|\frac{-1}{a(a+c)}\right| + \left|\frac{-1}{b(b+d)}\right| + \left|\frac{-1}{c(a+c)}\right| + \left|\frac{-1}{d(b+d)}\right| \quad (\beta)$$

Ή ἐπειδή $a,b,c,d > 0$

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+d)} + \frac{1}{c(a+c)} + \frac{1}{d(b+d)}$$

Ή

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \geq \frac{a+c}{ac(a+c)} + \frac{b+d}{bd(b+d)}$$

Ή

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}$$

δηλαδή ή σχέσις (β) ίσχυει ως ίσοτης.

Ἐναπομένει νά δείξωμεν, δτι ύπαρχει τούλαχιστον μία ἐξίσωσις, διά τήν όποιαν ή ἀνάλογος πρός τήν (β) σχέσις νά ίσχυη ως ἀνισότης. Πρός τούτο λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἐκ τῶν ἐφαρμοζομένων εἰς τά παράτο σύνορον σημεῖα. Εἴς τήν ἐξίσωσιν αὐτήν τούλαχιστον μία ἐκ τῶν τιμῶν U_1, U_2, U_3, U_4 θά εἶναι γνωστή ως συνοριακή. "Εστω δτι αὕτη, χωρίς νά περιορίζεται ή γενικότης, εἶναι ή U_1 . Τότε ή ποσότης $\frac{1}{a(a+c)} U_1$ ως γνωστή μεταφέρεται εἰς τό β' μέλος τῆς ἐξισώσεως. Ούτω θά πρέπει:

$$\left|\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right| > \left|\frac{-1}{c(a+c)}\right| + \left|\frac{-1}{b(b+d)}\right| + \left|\frac{-1}{d(b+d)}\right|$$

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} > \frac{1}{c(a+c)} + \frac{1}{b(b+d)} + \frac{1}{d(b+d)}$$

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} > \frac{1}{ac+c^2} + \frac{1}{bd}$$

$$\frac{1}{ac} > \frac{1}{ac+c^2}$$

$$ac + c^2 > ac$$

$$c^2 > 0, \text{ τό διότον καί } \text{ίσχυει.}$$

Κατ' ἐντελῶς ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ίσχυς τῆς ἀνισότητος, ὅταν μία ἄλλη ἐκ τῶν ύπολοίπων τιμῶν U_2, U_3, U_4 εἶναι γνωστή.

'Απεδείχθη λοιπόν, ὅτι ίσχυει τὸ ίκανόν κριτήριον συγκλίσεως καὶ ἐπομένως ἡ μέθοδος Gauss-Seidel δύναται νά ἐφαρμοσθῇ διὰ τᾶς ἐξισώσεως Laplace καὶ Poisson. Δέον νά σημειωθῇ, ὅτι διὰ τυχόντα δροθιγών κάνναβον αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες τοῦ A ἐν συνδυασμῷ πρός τήν συμμετρίαν αὐτοῦ συνεπάγονται τὸ θετικῶς ὠρισμένον τούτου, ὅπερ μετ' ἀλλων ίσχυουσῶν ἰδιοτήτων ἀποτελεῖ ίκανήν συνθήκην συγκλίσεως καὶ ἐτέλων ἐπαναληπτικῶν μεθόδων*.

§5 . - Ταχύτης συγκλίσεως. Μέθοδος τῆς υπερχαλαρώσεως.

Μία πλήρης διαδρομή τῶν σημείων τοῦ καννάβου διὰ τήν ἐφαρμογήν τῆς ἐξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων ἀποτελεῖ μίαν ἐπανάληψιν (iteration). 'Ο ἀριθμός τῶν ἀπαιτουμένων ἐπαναλήψεων διὰ τήν σύγκλισην ἔκαστοτε δεδομένην ἀκρίβειαν χαρακτηρίζει τήν ταχύτητα τῆς συγκλίσεως. Διὰ τούτο ἐπιδιώκομεν πάντοτε ἡ σύγκλισης νά εἶναι ὅσον τό δυνατόν ταχεῖα, ὥστε νά ἐπιτυγχάνωμεν τήν λμσιν τοῦ συστήματος μέ τόν μικρότερον ἀριθμόν ἐπαναλήψεων.

Διὰ ἐφαρμογῆς τῆς ἐξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων, ὡς αὕτη δίδεται ἀπό τές σχέσεις (5), (6), (9), (10) ἢ τήν γενικωτέραν αὐτῶν (11), σελ. 8 : 10 ἡ μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει βραδέως, ἀπαιτοῦσα πολλάκις πολὺ μεγάλον ἀριθμόν ἐπαναλήψεων, ὅπερ σημαίνει ἀπασχόλησην τοῦ υπολογιστοῦ ἐπί μακρόν χρόνον, καθιστῶσα οὕτω ἀντιοικονομικήν τήν μέθοδον.

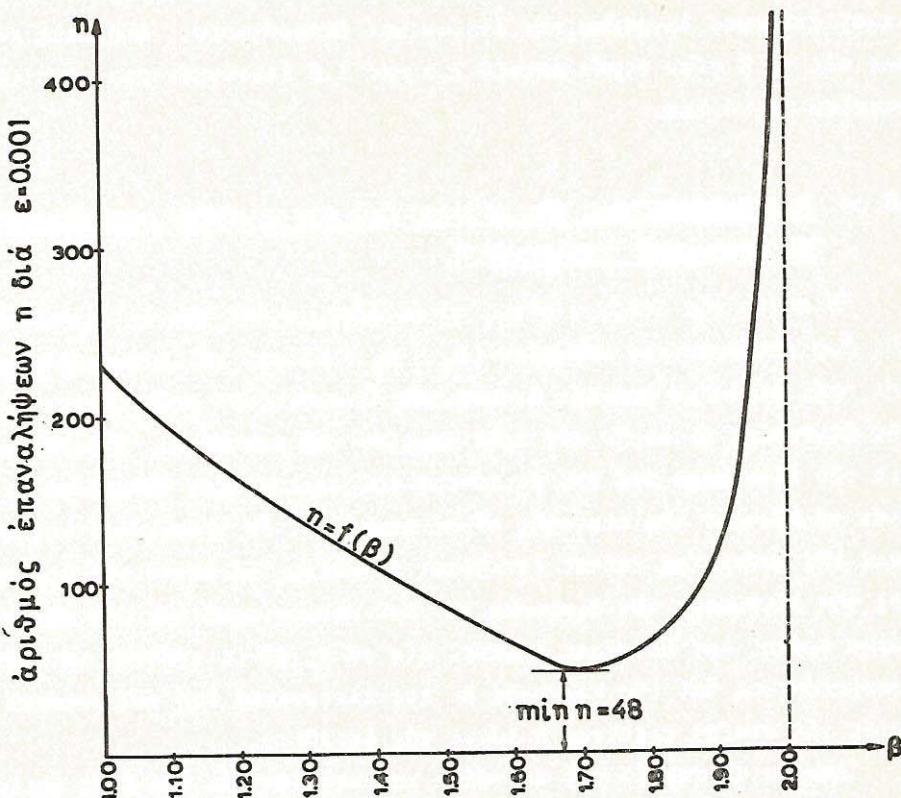
(*) Westlake. A handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of linear Equations. John Wiley and Sons Inc. New York 1968.

Τό μειονέκτημα τουτο αλλάζεται διά χρησιμοποιήσεως μιᾶς βελτιωμένης έπαναληπτικής μεθόδου*, γνωστής ως μεθόδου της ύπερχαλαρώσεως (Overrelaxation method ή Extrapolated Liebmann method).

* Η μεθόδος αυτή συνίσταται είς την χρησιμοποίησιν της σχέσεως (11) ύπό την κάτωθι μορφήν:

$$U_o' = \beta(C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + C_4 U_4 + C_5 g(x,y)) + (1-\beta)U_o \quad (19)$$

Ενθα U_o' είναι η τιμή της U_o ληφθεῖσα κατά την άμεσως προηγουμένη έπαναληψιν και' β είσις θετικός άριθμός μεταξύ 1 και' 2 ($1 < \beta < 2$) καλούμενος παράμετρος της χαλαρώσεως (relaxation parameter).



Σχ.12. Η καμπύλη παριστά την συνάρτησιν $n = f(\beta)$ διά τον προσδιορισμόν της $S = \sigma_x + \sigma_y$ της έφαρμογής της §10.

* [10], §11.4, σελ.375

Είναι προφανές ότι $\beta=1$ έχουμεν τής μεθόδου Gauss-Seidel. Διά καταλλήλου έκλογης τού β μεταξύ 1 και 2 είναι δυνατόν να έπιεται ταχυτάτην σύγκλισιν, πολλάκις 30 ή και 50 φοράς ταχυτέραν τής μεθόδου Gauss-Seidel. Διά τούτο ό β καλεῖται και συντελεστής έπιεται ταχύτερας τής συγκλίσεως.

Είς τό Σχ.12 δεικνύεται η έπιεροή τής τιμής τού β έπιεται της ταχύτητος συγκλίσεως.

'Η καμπύλη έληφθη έκ τής έφαρμογής τής §10 διά μεταβολής τής τιμής τού β άπο 1 έως 2. 'Εκ ταύτης συμπεραίνομεν ότι έπιεται ταχυτάτη σύγκλισις διά $\beta = 1.70$, ητοι $\frac{229}{48} = 4,8$ φοράς ταχυτέρα τής μεθόδου Gauss-Seidel ($\beta=1$).

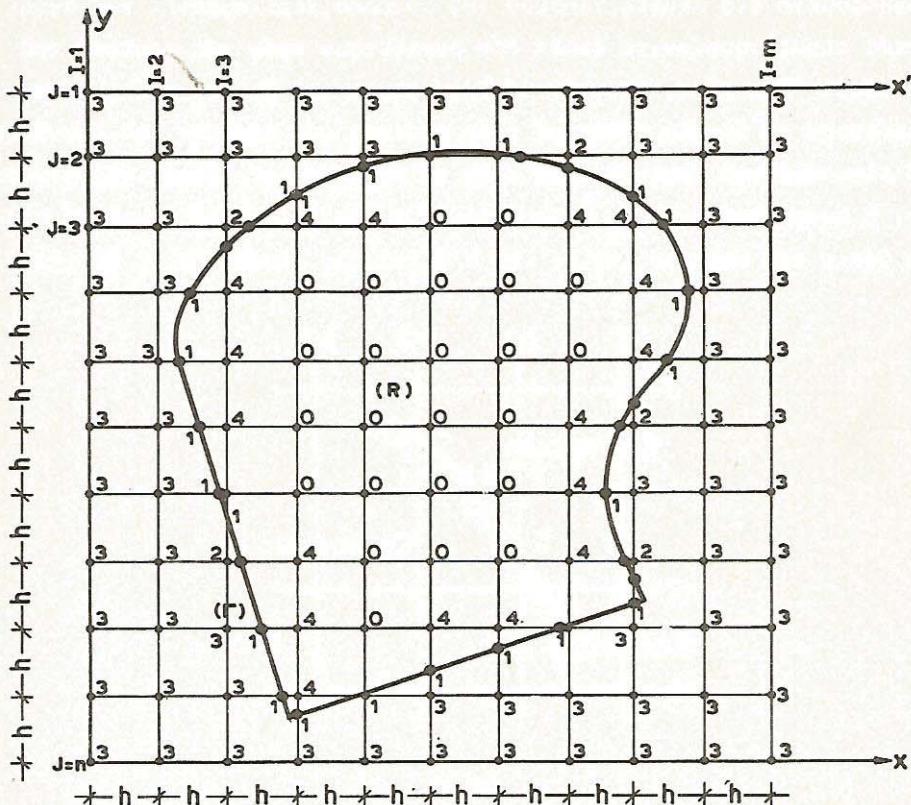
'Ο έκ τῶν προτέρων προσδιοριγμός τής βελτίστης τιμής τού β άποτελεῖ έπιεπονον έργασίαν, τήν δικοίαν και άποφεύγομεν. Δίδοντες συνήθως είς τό β μέσην μεταξύ 1.5 και 1.8 έπιεται ταχύτηταν σχετικώς ταχείαν σύγκλισιν.

§6 .- Συστηματοποίησις τής μεθόδου διά τήν σύνταξιν προγράμματος
"Ηλεκτρονικού 'Υπολογιστού".

'Η ούσια τής μεθόδου είναι να έπιεται της ύπ' οφιν περιοχῆς ένα τετραγωνικόν κάνναβον ($\Delta_x = \Delta_y = h$) και να άντικαταστήσωμεν τήν πρός έπιελυσιν μερικήν διαφορικήν έξισωσιν ύπό μιας προσεγγιστικῆς έξισώσεως διαφορῶν είς κάθε σημεῖον τού καννάβου. 'Η κατάστρωσις τῶν έξισώσεων πρός τής έπιελυσεως των παρουσιάζει δυσκολίαν τινα, διατάσσει τό συνορον τής περιοχῆς είναι καμπύλον. 'Ο τρόπος άντιμετωπίσεως τής δυσκολίας ταύτης έκτιθεται κατωτέρω διά μεθόδικης έφαρμογῆς τής έξισώσεως τῶν διαφορῶν και τού υπολογισμού τῶν μερικῶν παραγώγων πρώτης και δευτέρας τάξεως. Είς τό Σχ.13 δεικνύεται κάνναβος έφαρμοζόμενος έπιεται τής περιοχῆς R περικλειομένης ύπό τού συνόρου Γ, έντος τής δικοίας ζητεῖται η λμσις τής έξισώσεως.

"Απαντα τά σημεῖα τού καννάβου χαρακτηρίζονται ύπό ένδειξης άριθμού, ό διποτος θά καληται "καδικός άριθμός τού σημείου". Τό συνολον δε τούτων άποτελούν τά στοιχεῖα ένδειξης μητρώου. 'Η άντιστοιχίσις τῶν καδικῶν είς τά σημεῖα γίνεται βάσει τής κατωτέρω κατατέξεως τούτων.

3. Διά τά σημεῖα τά διποτα κείνται έκτος τού συνόρου τής περιοχῆς R και είς τά διποτα δέν θά έφαρμοσθῇ η έξισωσις.

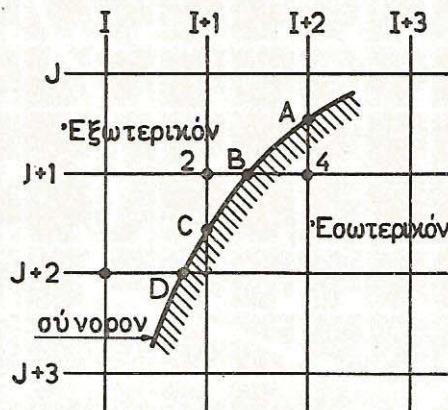


Σχ.13

1. Διά τά σημεῖα, τά όποτα εἶναι τομαί τοῦ συνόρου Γ μέ τά τῶν πλευρῶν τοῦ καννάβου.
0. Διά τά σημεῖα ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου καί ἵσαπέχοντα ἐκ τῶν τεσσάρων γειτονικῶν ($\Delta_x = \Delta_y = h$).
4. Διά τά σημεῖα ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου καί μή ἵσαπέχοντα ἐκ τῶν τεσσάρων γειτονικῶν. (Σημεῖα ἐσωτερικά πλησίον τοῦ συνόρου).
2. Διά τά σημεῖα τοῦ καννάβου, τά όποτα παρουσιάζουν διπλῆν ἀπεικόνισιν ἐπ' τοῦ συνόρου, οἵτοι τό σημεῖον 2 ἀντιστοιχεῖ εἰς δύο σημεῖα τοῦ συνόρου.

Τά σημεῖα τοῦ καννάβου χαρακτηρίζονται ἀπό ἀπόψεως θέσεως ὑπό δύο δεικτῶν i, j. Μέ τούς αὐτοὺς δείκτας χαρακτηρίζονται καί αἱ τι-

μαλ' τῆς συναρτήσεως π.χ. $U(i,j)$. Ἡ ἐξίσωσις τῶν τεσσάρων σημείων, ἐφαρμοζομένη διὰ σημεῖα πλησίον τοῦ συνόρου, περιλαμβάνει καὶ συνοριακάς τιμάς σημείων, τὰ δύο οἷα δέν συμπίπτουν πρός τὰς κορυφάς τοῦ καννάβου. Ἰνα εἶναι δυνατόν νά ἔργασθων καθ' ὅμοιον τρόπον, χαρακτηρίζομεν τὰ σημεῖα ταῦτα μέ τούς δεικτας τοῦ σημείου τοῦ καννάβου τοῦ εύρισκομένου πλησιέστερον πρός τὸ σύνορον καὶ ἐξωτερικῶς τούτου, π.χ. ἡ συνοριακή τιμή U_A ἐνδέ σημείου A (βλ.Σχ.14) θά ἀναφερθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ σημείου $i+2,j$: $U_A = U(i+2,j)$, ὁμοίως $U_D = U(i,j+2)$



Σχ.14

Σημειοῦται δὲ τοῦτο δέν σημαίνει παραμόρφωσιν τοῦ συνόρου, ἦτοι μετατόπισιν τῶν σημείων A καὶ D εἰς τὰ $(i+2,j)$ καὶ $(i,j+2)$ ἀντιστοίχως, ἀλλὰ ἀπλῶς ἔνα τρόπον διὰ νά χαρακτηρίσωμεν διὰ δεικτῶν ἀναφορᾶς σημεῖα τοῦ συνόρου διὰ τὰ δύο οἷα δέν ὑπάρχουν τοιοῦτοι. Ἀντινομία πρός τὸν ἀνωτέρω κανόνα δημιουργεῖται διὰ τὰ σημεῖα τῶν κορυφῶν τοῦ καννάβου, τὰ δύο οἷα ἔχουν διπλῆν ἀπεικόνισιν ἐπ' τοῦ συνόρου π.χ. τὸ σημεῖον 2 τοῦ (Σχ.14) ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀμφότερα τὰ σημεῖα B καὶ C τοῦ συνόρου. Οὕτω παρουσιάζονται δύο συνοριακαί, αἱ U_B καὶ U_C , αἱ δύο οἷαι δέοντας ἀναφερθοῦν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ $(i+1,j+1)$. Ἡ ἄρσις τῆς ἀναφυομένης ἀντινομίας ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς παραδοχῆς, δὲ τι ἀμφότερα τὰ σημεῖα B καὶ C τοῦ συνόρου ἔχουν τὴν αὐτήν τιμήν καὶ ἵσην πρός τὴν τιμήν τοῦ σημείου τοῦ συνόρου τοῦ κειμένου πλησιέστερον πρός τὴν κορυφήν τοῦ καννάβου (σημεῖον B τοῦ Σχ.14). Τό εἰσαγόμενον σφάλμα ὑπό τῆς παραδοχῆς ταῦτης τείνει πρός τὸ μηδέν καθώς τὰ Δ_x καὶ Δ_y τείνουν πρός τὸ μηδέν.

Μετά τόν χαρακτηρισμόν τῶν σημείων διά τῶν καδικῶν τῶν ἀριθμῶν καί τόν προσδιορισμόν τῶν δεικτῶν ἀναφορᾶς τῶν σημείων, προβαίνομεν εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν συντεταγμένων $x(i,j)$ καί $y(i,j)$ τῶν σημείων. Διά τά σημεῖα τά συμπίπτοντα πρός τάς κορυφάς τοῦ καννάβου δό προσδιορισμός τῶν συντεταγμένων εἶναι ἀπλοῦς ὑπολογιζομένων ἐκ τῶν σχέσεων:

$$\begin{aligned} x(i,j) &= (i-1)h \\ y(i,j) &= (j-1)h \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Ενθα i,j οἱ δεῖκται ἀναφορᾶς τοῦ σημείου καί ἡ τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τῶν στοιχείων τοῦ καννάβου. Παρατηροῦμεν, διότι αἱ τετμημέναι $y(i,j)$ δέν μετροῦνται ἐκ τοῦ ἀξονος τῶν x , ἀλλά ἐκ τοῦ x' παραλλήλου πρός τόν x καί ἐφαπτομένου τοῦ ἄνω συνόρου τοῦ καννάβου. Τοῦτο δῆμας δέν ἔνοχλεῖ, διότι τελικῶς ἀπαιτοῦνται διά τόν ὑπολογισμόν οὐχὶ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων, ἀλλὰ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν συντεταγμένων τῶν γειτονικῶν σημείων, ἢ ὅποια καί ἐκφράζει τήν ἀπόστασιν τοῦ τούτων. Ἀντινέτως ἡ παρατυπία αὐτῇ διευκολύνει τήν σύνταξιν τοῦ προγράμματος τοῦ ἡλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ διά τήν ἐκτύπωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων. Διά τά λοιπά σημεῖα, τά μή συμπίπτοντα πρός τάς κορυφάς τοῦ καννάβου, δό προσδιορισμός τῶν συντεταγμένων ἀπαιτεῖ περισσοτέραν ἐργασίαν, καθ' ὃσον αὗται ὑπολογίζονται ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ συνόρου. Ὅπως αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως, οὕτω καί αἱ συντεταγμέναι χαρακτηρίζονται μὲν δύο δείκταις ἀναφορᾶς i,j , προσδιοριζομένους κατά τά ἐκτεθέντα ἀνωτέρω διά τάς τιμάς τῆς συναρτήσεως.

Ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως τῶν διαφορῶν καί τῶν μερικῶν παραγόγων διά τάς διαφόρους κατηγορίας σημείων βάσει τοῦ καδικοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν εἶναι ὡς ἀκολούθως:

α) Ἐξισώσις διαφορῶν (τεσσάρων σημείων).

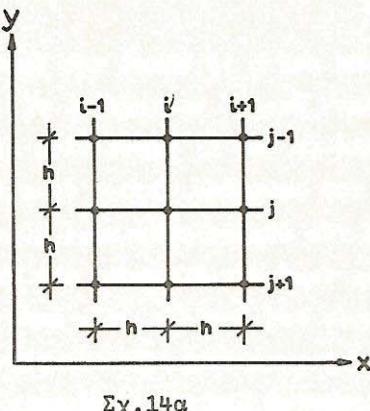
- Σημεῖα 3: δέν ἐφαρμόζεται ἡ ἐξισώσις
- Σημεῖα 1: δέν ἐφαρμόζεται ἡ ἐξισώσις
- Σημεῖα 2: δέν ἐφαρμόζεται ἡ ἐξισώσις
- Σημεῖα 0: ἐφαρμόζεται ἡ ἐξισώσις δι' ἵσαπέχοντα γειτονικά σημεῖα ἐξ.(6) (βλ. Σχ. 14α):

$$U(i,j) = \frac{U(i+1,j) + U(i,j+1) + U(i-1,j) + U(i,j-1) - h^2 g(i,j)}{4} \quad (20)$$

Σημεῖα 4: Εφαρμόζεται ή γενικευμένη έξισωσις τῶν τεσσάρων σημείων ἐξ.(11):

$$U(i,j) = C_1 U(i+1,j) + C_2 U(i,j-1) + C_3 U(i-1,j) + C_4 U(i,j+1) + C_5 g(i,j) \quad (21)$$

Ενθα: C_1, C_2, C_3, C_4 καὶ C_5 οἱ συντελεσταὶ οἱ διδόμενοι ἐκ τῶν σχέσεων (12). Τὰ μεγέθη s_1, s_2, s_3, s_4 ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων:



$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{|x(i+1,j) - x(i,j)|}{h} \\ s_2 &= \frac{|y(i,j-1) - y(i,j)|}{h} \\ s_3 &= \frac{|x(i-1,j) - x(i,j)|}{h} \\ s_4 &= \frac{|y(i,j+1) - y(i,j)|}{h} \end{aligned} \quad (22)$$

β.- Μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

Ἡ U εἶναι γνωστή ἐντὸς καὶ ἐπὶ τοῦ συνόρου. Αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὑπολογίζονται μόνον διὰ τὰ ἐσωτερικά σημεῖα Ο καὶ 4.

Σημεῖα Ο: Ἐκ τῶν σχέσεων (13), (14), (17) ἀντιστοιχῶς,
Σχ.7,8:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(i+1,j) - 2U(i,j) + U(i-1,j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(i,j-1) - 2U(i,j) + U(i,j+1)}{h^2} \quad (23\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{U(i+1,j-1) - U(i-1,j-1) - U(i+1,j+1) + U(i-1,j+1)}{4h^2}$$

Σημεῖα 4: Ἐκ τῶν σχέσεων (15), (16), Σχ.7,8:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 \frac{s_3 U(i+1,j) - (s_1 + s_3) U(i,j) + s_1 U(i-1,j)}{s_1 s_3 (s_1 + s_3) h^2} \quad (24\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 \frac{s_4 U(i,j-1) - (s_2 + s_4)U(i,j) + s_2 U(i,j+1)}{s_2 s_4 (s_2 + s_4) h^2} \quad (24\beta)$$

Τά s_1, s_2, s_3, s_4 δίδονται έκ τῶν σχέσεων (22).
Η μικτή παράγωγος ύπολογίζεται έκ τῶν (18
 α, β), Σχ.9:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{U(i+1,j-1) - 2U(i,j) + U(i-1,j+1)}{2h^2} \quad (25\alpha, \beta)$$

$$\text{καὶ } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{U(i-1,j-1) - 2U(i,j) + U(i+1,j+1)}{2h^2}$$

κατά περίπτωσιν \neq έκ τῆς (23γ) ἀφοῦ προηγουμένως ύπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῆς U ἐκτός τοῦ συνόρου.

§7 .- Δομὴ τοῦ προγράμματος 'Ηλεκτρονικοῦ 'Υπολογιστοῦ.

Τὸ πρόγραμμα SOLAPEQ.

Βάσει τῶν εἰς προηγουμένας παραγράφους ἐκτεθέντων συντάσσεται πρόγραμμα διά φηφιακόν ἡλεκτρονικόν ύπολογιστήν εἰς γλῶσσαν FORTRAN. Εἰς τό πρόγραμμα δύδεται τὸ ὄνομα SOLAPEQ (ἀρχικά τῆς φράσεως SOLUTION OF LAPLACE AND POISSON EQUATION).

Τὸ πρόγραμμα SOLAPEQ ἀποτελεῖται έκ τοῦ κυρίου προγράμματος (MAIN PROGRAM) καὶ τῶν τριῶν υποπρογραμμάτων BOUND, SOPEQ καὶ SHOW.

Ο χρησιμοποιῶν τό πρόγραμμα ἔχει τήν εὐθύνην τῶν κάτωθι ἐργασιῶν:

1.- ἐτοιμασίαν τῶν δεδομένων, τά δύοτα συνέστανται εἰς:

- α. τήν εὔρεσιν τῶν συνοριακῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων σ_x, σ_y καὶ τ_{xy}
- β. τόν καθορισμόν τῆς τιμῆς τοῦ ϵ , δύοτος ἐκφράζει τήν ἐπιθυμτήν ἀκρίβειαν τῆς μεθόδου ύπερχαλαρώσεως
- γ. τόν καθορισμόν τοῦ βιβλίου h τοῦ τετραγωνικοῦ καννάβου καὶ τῶν ἀριθμῶν n_x τῶν n_y δηλούμεντων τό πλῆθος τῶν σημείων αύτοῦ κατά τάς διευθύνσεις x καὶ y ἀντιστοίχως
- δ. τήν ἐκλογήν τῆς τιμῆς β τῆς παραμέτρου χαλαρώσεως.

Αἱ συνοριακαὶ τιμαὶ δίδονται κατὰ σειράν, μὲν ἐκκένησιν ἐκ τινος σημείου τοῦ συνόρου καὶ διάνυσιν τούτου δεξιοστρόφως

$$\sigma_x(i), \sigma_y(i), \tau_{xy}(i) \quad (i = 1 \text{ ἕως } k)$$

ἔνθα ὁ κ ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν συνοριακῶν τιμῶν.

2.- Τὴν μόρφωσιν τοῦ μητρώου INDEX (i, j) τῶν κωδικῶν ἀριθμῶν τῶν σημείων τοῦ καννάβου.

3.- Τὴν μόρφωσιν τῶν μητρῶν $X(i, j)$, $Y(i, j)$ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τοῦ καννάβου.

'Ἐν συνεχείᾳ τὸ πρόγραμμα ἐκτελεῖ κατὰ σειράν τὰς ἀκολούθους ἔργασίας:

4.- 'Υπολογισμός τοῦ $U = \sigma_x + \sigma_y$

'Αναγιγνώσκει τὰς τιμὰς $\sigma_x(i)$, $\sigma_y(i)$ ($i = 1 \text{ ἕως } k$) τοῦ συνόρου καὶ τὰς τοποθετεῖ τῇ κλήσει τοῦ ύποπρογράμματος BOUND εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα (i, j) τοῦ καννάβου.

Μορφώνει τὸ ἄθροισμα $U = \sigma_x + \sigma_y$ ἐπὶ τοῦ συνόρου.

'Υπολογίζει τὰς τιμὰς $U(i, j)$ δι' ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῆς ἑξισώσεως:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x, y) \quad g(x, y) = 0$$

τῇ κλήσει τοῦ ύποπρογράμματος SOPEQ.

'Εκτυπώνει τὰς τιμὰς $U(i, j)$ τῇ κλήσει τοῦ ύποπρογράμματος SHOW.

5.- 'Υπολογισμός τῆς σ_x

$$\text{Μορφώνει τὴν συνάρτησιν } g(x, y) = - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

'Υπολογίζει τὰς τιμὰς $\sigma_x(i, j)$ δι' ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῆς ἑξισώσεως:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = g(x, y)$$

τῇ κλήσει τοῦ ύποπρογράμματος SOPEQ.

'Εκτυπώνει τὰς τιμὰς $\sigma_x(i, j)$ τῇ κλήσει τοῦ ύποπρογράμματος SHOW.

6.- 'Υπολογισμός τῆς σ_y

$$\text{Μορφώνει τὴν συνάρτησιν } g(x, y) = - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

• Υπολογίζει τάς τιμάς $\sigma_y(i,j)$ δι 'άριθμητικής όλοκληρώσεως της έξισώσεως:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = g(x,y)$$

τη κλήσει του ύποπρογράμματος SOPEQ.

• Εκτυπώνει τάς τιμάς $\sigma_y(i,j)$ τη κλήσει του ύποπρογράμματος SHOW.

7.- Υπολογισμός της τ_{xy}

• Αναγιγνώσκει τάς τιμάς $\tau_{xy}(i)$ ($i = 1$ έως κ) έπει του συνδρού και τάς τοποθετεῖ τη κλήσει του ύποπρογράμματος BOUND εἰς τα άντιστοιχα σημεῖα (i,j) του συνδρού.

$$\text{Μορφώνει τήν συνδροτησιν } g(x,y) = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

• Υπολογίζει τάς τιμάς $\tau_{xy}(i,j)$ δι 'άριθμητικής όλοκληρώσεως της έξισώσεως:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = g(x,y)$$

τη κλήσει του ύποπρογράμματος SOPEQ.

• Εκτυπώνει τάς τιμάς $\tau_{xy}(i,j)$ τη κλήσει του ύποπρογράμματος SHOW.

Είς άπασας τάς περιπτώσεις έκτυπούται και 'άριθμός τῶν έπαναληφεων τῶν άπαιτουμένων διε τήν σύγκλισιν της έπαναληπτικής μεθόδου.

8.- Δίκτυον Ισοχρώμων.

Διε τὸν ἔλεγχον τῶν άποτελεσμάτων ύπολογίζονται αὶ τιμαὶ τῶν Ι-ισοχρώμων εἰς τὰ σημεῖα του καννάβου και ἐκτυπούται τὸ δίκτυον τῶν Ισοχρώμων πρὸς παραβολὴν μὲ τήν φωτογραφίαν τήν λαμβανομένην ἐκ του φωτοελαστικοῦ πειράματος.

Παραθέτομεν κατωτέρω τὸ πρόγραμμα SOLAPEQ. Τὰ μητρῶα INDEX(I,J), X(I,J), Y(I,J) του κυρίου προγράμματος έμορφώθησαν συμφώνως πρὸς τάς άπαιτήσεις της έφαρμογῆς της §10.

PROGRAM SOLAPEQ

PROGRAM SOLAPEQ

DIMENSION SX(33,31), SY(33,31), U(33,31), INDEX(33,31), TXY(33,31),
1KOKDER(33), DNS(33,31), DPS(33,31), BV(120), LL(120), MM(120),
2X(33,31), Y(33,31), GG(33,31), FB(33,31)

COMMON /10/ INDEX, U, SY

COMMON/SOLP/EPS, MAXIT, X, Y

COMMON/SH/NX,KO

EQUIVALENCE (SX, TXY), (SY, DNS), (U, DPS).

KREAD 110, EPS, MAXIT, B, NX, NY, K, H, S

110 FORMAT(F6.3,I4,F6.2,3I4,F6.2,F6.2)

DO 1 J=1,NY

DO 1 I=1,NX

SX(I,J)=0.0

SY(I,J)=0.0

U(I,J)=0.0

1 INDEX(I,J)=0

C** FORMULATION OF THE MATRIX =INDEX=

DO 2 J=1,6

DO 2 I=1,22

2 INDEX(I,J)=3

DO 3 I=1,21

3 INDEX(I,7)=3

DO 4 I=1,20

4 INDEX(I,8)=3

DO 5 I=1,20

5 INDEX(I,22)=3

DO 6 I=1,21

6 INDEX(I,23)=3

DO 7 J=24,31

DO 7 I=1,22

7 INDEX(I,J)=3

DO 8 I=1,20

8 INDEX(I,9)=1

DO 9 J=1,6

9 INDEX(23,J)=1

DO 10 I=24,33

10 INDEX(I,1)=1

DO 11 J=2,31

11 INDEX(33,J)=1

DO 12 I=23,32

12 INDEX(I,31)=1

DO 13 J=24,30

13 INDEX(23,J)=1

DO 14 I=1,20

14 INDEX(I,21)=1

DO 15 J=10,20

15 INDEX(I,J)=1

INDEX(21,8)=2

PROGRAM SOLAPEQ

```
INDEX(22,7)=2
INDEX(21,22)=2
INDEX(22,23)=2
INDEX(21,9)=4
INDEX(22,8)=4
INDEX(23,7)=4
INDEX(21,21)=4
INDEX(22,22)=4
INDEX(23,23)=4
INDEX(22,9)=4
INDEX(23,8)=4
INDEX(22,21)=4
INDEX(23,22)=4
DO 16 J=1,NY
16 PRINT 101, (INDEX(I,J),I=1,NX)
101 FORMAT(1H ,33I1)
C** FORMULATION OF THE COORDINATES X(I,J),Y(I,J)
DO 17 J=1,NY
DO 17 I=1,NX
AI=I
AJ=J
X(I,J)=(AI-1.)*H
17 Y(I,J)=(AJ-1.)*H
Y(21,8)=1.87
X(21,8)=5.16
Y(22,7)=1.66
X(22,7)=5.37
Y(21,22)=5.13
X(21,22)=5.16
Y(22,23)=5.34
X(22,23)=5.37
PRINT 102
102 FORMAT(1H1,10X,13HMATRIX X(I,J))
PRINT 103,((X(I,J),I=1,NX),J=1,NY)
103 FORMAT(1H ,17F6.2/16F6.2)
PRINT 104
104 FORMAT(1H1,10X,13HMATRIX Y(I,J))
PRINT 103, ((Y(I,J),I=1,NX),J=1,NY)
C** SX AND SY ON THE BOUNDARY I **
I=1
J=9
READ 600, (BV(N), N=1,K)
600 FORMAT(10F8.2)
CALL BOUND (I,J,K,INDEX,BV,SX,LL,MM,NX,NY)
I=1
J=9
READ 600, (BV(N), N=1,K)
CALL BOUND (I,J,K,INDEX,BV,SY,LL,MM,NX,NY)
```

```
PROGRAM SOLAPEQ
*****
C** CALCULATION OF U=SX+SY **
K0=1
DO 222 J=1,NY
DO 222 I=1,NX
222 U(I,J)=SX(I,J)+SY(I,J)
NNX=NX-1
NNY=NY-1
DO 1001 J=2,NNY
DO 1001 I=2,NNX
1001 GG(I,J)=0.0
CALL SUPEW(H,B,U,INDEX,GG,NNX,NNY)
C** CALCULATION OF SX **
KU=2
DO 1002 J=2,NNY
DO 1002 I=2,NNX
IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 1003
GG(I,J)=-(U(I+1,J)-2.*U(I,J)+U(I-1,J))/(H**2)
GO TO 1002
1003 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 1002
S1=ABS(X(I+1,J)-X(I,J))/H
S2=ABS(Y(I,J+1)-Y(I,J))/H
S3=ABS(X(I-1,J)-X(I,J))/H
S4=ABS(Y(I,J-1)-Y(I,J))/H
GG(I,J)=-2.*(S3*U(I+1,J)-(S1+S3)*U(I,J)+S1*U(I-1,J))/(S1*S3*(S1+
1*S3)*H**2)
1002 CONTINUE
CALL SUPEW(H,B,SX,INDEX,GG,NNX,NNY)
C** CALCULATION OF SY **
KU=3
DO 1004 J=2,NNY
DO 1004 I=2,NNX
IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 1005
GG(I,J)=-(U(I,J+1)-2.*U(I,J)+U(I,J-1))/(H**2)
GO TO 1004
1005 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 1004
S1=ABS(X(I+1,J)-X(I,J))/H
S2=ABS(Y(I,J+1)-Y(I,J))/H
S3=ABS(X(I-1,J)-X(I,J))/H
S4=ABS(Y(I,J-1)-Y(I,J))/H
GG(I,J)=-2.*(S4*U(I,J+1)-(S2+S4)*U(I,J)+S2*U(I,J-1))/(S2*S4*(S2+
1*S4)*H**2)
1004 CONTINUE
CALL SUPEW(H,B,SY,INDEX,GG,NNX,NNY)
C** CALCULATION OF THE DIFFERENCE OF NORMAL STRESSES **
DO 500 J=1,NY
DO 500 I=1,NX
500 DNS(I,J)=(SX(I,J)-SY(I,J))/2.
C** TXY ON THE BONDARY **
```

PROGRAM SOLAPEQ

```
I=1
J=9
READ 600, (BV(N), N=1,K)
CALL BOUND (I,J,K,INDEX,BV,TXY,LL,MM,NX,NY)
C** CALCULATION OF TXY **
K0=4
DO 1006 J=2,NNY
DO 1006 I=2,NNX
IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 1007
GG(I,J)=+(U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1)-U(I+1,J-1)+U(I-1,J-1))/(4.*H**2)
1007 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 1006
LB=INDEX(I-1,J-1)+INDEX(I+1,J+1)
IF(LB-3)41,41,40
40 GG(I,J)=+(U(I+1,J+1)-2.*U(I,J)+U(I-1,J-1))/(2.*H**2)
GO TO 1006
41 GG(I,J)=-(U(I-1,J+1)-2.*U(I,J)+U(I+1,J-1))/(2.*H**2)
1006 CONTINUE
CALL SOPEQ (H,B,TXY,INDEX,GG,NNX,NNY)
C** CALCULATION OF THE DIFFERENCE OF PRINCIPAL STRESSES **
C** FORMULATION OF THE MATKIX OF THE ISOCHROMATIC ORDERS **
KK1=4H
KK2=4H0000
KK3=4HAAAA
KK4=4HB BBBB
KK5=4HC CCC
KK6=4HDD DD
KK7=4HEEEE
KK8=4HFFFF
KK9=4HGGGG
KK10=4HHHHH
KK11=4HIIII
KK12=4HJJJJ
KK13=4HKKKK
DO 297 KA=1,5
HK = KA
H = HK*0.05
PRINT 295,H
295 FORMAT(1H1,45X,23HISOCHROMATICS FOR H=,F5.2,/ )
DO 2901 J=1,NY
DO 1101 KK=1,NX
1101 KORDER(KK)=KK1
DO 291 I=1,NX
IF(INDEX(I,J).EQ.3)GO TO 292
H1=0.0
H2=H
```

PROGRAM SOLAPEQ

```
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK2
H1= 1.-H
H2= 1.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK3
H1=2.-H
H2=2.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK4
H1=3.-H
H2=3.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK5
H1=4.-H
H2=4.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK6
H1= 5.-H
H2= 5.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK7
H1= 6.-H
H2= 6.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK8
H1= 7.-H
H2= 7.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK9
H1= 8.-H
H2= 8.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK10
H1= 9.-H
H2= 9.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK11
H1=10.-H
H2=10.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK12
H1=11.-H
H2=11.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK13
GO TO 291
292 KORDER(I)=KK1
291 CONTINUE
      PRINT 296, (KORDER(I),I=1,NX)
296 FORMAT(1H ,33(A1,1X))
2901 CONTINUE
297 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
SUBROUTINE SOPEQ
*****
SUBROUTINE SOPEQ (H,B,F,INDEX,GG,NNX,NNY)
DIMENSION F(33,31),INDEX(33,31),GG(33,31),X(33,31),Y(33,31)
COMMON/SOLP/EPS,MAXIT,X,Y
ITN=1
33 D=0.0
DO 20 J=2,NNY
DO 20 I=2,NNX
IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 77
FNEW=B*(F(I+1,J)+F(I,J+1)+F(I-1,J)+F(I,J-1)-H**2*GG(I,J))/4.
1(1.-B)*F(I,J)
GO TO 78
77 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 20
S1=ABS(X(I+1,J)-X(I,J))/H
S2=ABS(Y(I,J+1)-Y(I,J))/H
S3=ABS(X(I-1,J)-X(I,J))/H
S4=ABS(Y(I,J-1)-Y(I,J))/H
A0=1./(S1*S3)+1./(S2*S4)
A1=1./(S1*S1+S1*S3)
A2=1./(S2*S2+S2*S4)
A3=1./(S3*S1+S3*S3)
A4=1./(S4*S2+S4*S4)
C1=A1/A0
C2=A2/A0
C3=A3/A0
C4=A4/A0
C5=-H*H/(2.*A0)
FNEW=B*(C1*F(I+1,J)+C2*F(I,J+1)+C3*F(I-1,J)+C4*F(I,J-1)+C5*
1GG(I,J))+(1.-B)*F(I,J)
78 RESID=ABS(FNEW-F(I,J))
IF(RESID-D)37,37,38
38 D=KESID
37 F(I,J)=FNEW
20 CONTINUE
IF(D-EPS)39,39,40
40 ITN=ITN+1
IF(ITN-MAXIT)33,41,41
41 PRINT 200, MAXIT
200 FORMAT(1H1,21H FAILS TO CONVERGE IN,I5,10HITERATIONS)
39 PRINT 201, ITN
201 FORMAT(1H1,19HF WAS CALCULATED IN,I4,10HITERATIONS)
PRINT 210
210 FORMAT(1H1,9HPAGE NO I)
PRINT 211,((F(I,J),I=1,10),J=1,31)
PRINT 212
212 FORMAT(1H1,9HPAGE NO 2)
PRINT 211,((F(I,J),I=11,20),J=1,31)
211 FORMAT(1H ,10F8.2)
PRINT 213
```

SUBROUTINE SOPEQ

```
213 FORMAT(1H1,9HPAGE NO 3)
      PRINT 214,((F(I,J),I=21,33),J=1,31)
214 FORMAT(1H ,13F10.2)
      CALL SHOW(INDEX,F)
      PUNCH 250, ((F(I,J),I=1,33),J=1,31)
250 FFORMAT(10F8.2/10F8.2/10F8.2/3F8.2)
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE BOUND

```
SUBROUTINE BOUND (I,J,K,INDEX,BV,FB,LL,MM,NX,NY)
DIMENSION INDEX(NX,NY), BV(K), LL(K), MM(K), FB(NX,NY)
LL(1)=I
MM(1)=J
FB(I,J)=BV(1)
I=I+1
LL(2)=I
MM(2)=J
FB(I,J)=BV(2)
DO 90 N=3,K
L=I+1
M=J
IF(L.GT.NX) GO TO 10
IF(M.GT.NY) GO TO 10
IF(L.LT.1) GO TO 10
IF(M.LT.1) GO TO 10
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 20
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 20
GO TO 10
20 IF(LL(N).NE_LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
10 L=I+1
M=J+1
IF(L.GT.NX) GO TO 11
IF(M.GT.NY) GO TO 11
IF(L.LT.1) GO TO 11
IF(M.LT.1) GO TO 11
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 21
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 21
GO TO 11
21 IF(LL(N).NE_LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
11 L=I
M=J+1
IF(L.GT.NX) GO TO 12
IF(M.GT.NY) GO TO 12
IF(L.LT.1) GO TO 12
IF(M.LT.1) GO TO 12
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 22
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 22
GO TO 12
22 IF(LL(N).NE_LL(N-2)) GO TO 40
```

SUBROUTINE BOUND

```
*****  
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40  
12 L=I-1  
M=J+1  
IF(L.GT.NX) GO TO 13  
IF(M.GT.NY) GO TO 13  
IF(L.LT.1) GO TO 13  
IF(M.LT.1) GO TO 13  
LL(N)=L  
MM(N)=M  
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 23  
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 23  
GO TO 13  
23 IF(LL(N).NE_LL(N-2)) GO TO 40  
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40  
13 L=I-1  
M=J  
IF(L.GT.NX) GO TO 14  
IF(M.GT.NY) GO TO 14  
IF(L.LT.1) GO TO 14  
IF(M.LT.1) GO TO 14  
LL(N)=L  
MM(N)=M  
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 24  
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 24  
GO TO 14  
24 IF(LL(N).NE_LL(N-2)) GO TO 40  
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40  
14 L=I-1  
M=J-1  
IF(L.GT.NX) GO TO 15  
IF(M.GT.NY) GO TO 15  
IF(L.LT.1) GO TO 15  
IF(M.LT.1) GO TO 15  
LL(N)=L  
MM(N)=M  
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 25  
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 25  
GO TO 15  
25 IF(LL(N).NE_LL(N-2)) GO TO 40  
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40  
15 L=1  
M=J-1  
IF(L.GT.NX) GO TO 16  
IF(M.GT.NY) GO TO 16  
IF(L.LT.1) GO TO 16  
IF(M.LT.1) GO TO 16  
LL(N)=L  
MM(N)=M
```

SUBROUTINE BOUND

```
*****  
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 26  
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 26  
GO TO 16  
26 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40  
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40  
16 L=I+1  
M=J-1  
LL(N)=L  
MM(N)=M  
40 FB(L,M)=BV(N)  
I=L  
J=M  
IF(INDEX(I,J).EQ.1) GO TO 71  
IF(INDEX(I,J).EQ.2) GO TO 72  
71 INDEX(I,J)=10  
GO TO 90  
72 INDEX(I,J)=20  
90 CONTINUE  
DO 73 J=1,NY  
DO 73 I=1,NX  
IF(INDEX(I,J).EQ.10) GO TO 74  
IF(INDEX(I,J).EQ.20) GO TO 75  
GO TO 73  
74 INDEX(I,J)=1  
GO TO 73  
75 INDEX(I,J)=2  
73 RETURN  
END
```

SUBROUTINE SHOW

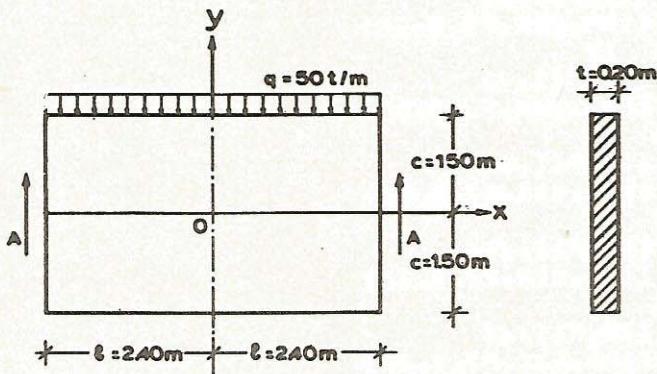
```
*****  
SUBROUTINE SHOW (INDEX,F)  
DIMENSION F(33,31),INDEX(33,31),II(33)  
COMMUN/SI/NX,K0  
NN=NX/7  
NI=NX-NN*7  
IF(NI.GT.0) NN=NN+1  
DO 1 N=1,NN  
GO TO (31,32,33,34),K0  
31 PRINT 91  
91 FORMAT(1HJ,30X,30HAKROISLA ORHZM UASEZM SX+SV)  
PRINT 92  
92 FORMAT(1H ,30X,22HSUM OF NORMAL STRESSES)  
GO TO 40  
32 PRINT 93  
93 FORMAT(1HJ,30X,18HOKHAI UASEIS SX)  
PRINT 94  
94 FORMAT(1H ,30X,15HNORMAL STRESSES)  
GO TO 40  
33 PRINT 95  
95 FORMAT(1HJ,30X,18HOKHAI UASEIS SV)  
PRINT 94  
GO TO 40  
34 PRINT 96  
96 FORMAT(1HJ,30X,25HDIAULGUIJAI UASEIS UXV,  
PRINT 97  
97 FORMAT(1H ,30X,14HSHEAR STRESSES)  
40 PRINT 102, N  
102 FORMAT(1HJ,15X,8HSEKIS M0,I2)  
PRINT 103  
103 FORMAT(1H ,15X,4HPAGE,/)  
PRINT 104  
104 FORMAT(1H ,10X,69(1H*))  
PRINT 105  
105 FORMAT(1H ,10X,6H* I *,7(8X,1H*))  
K=(N-1)*7+1  
L=7*N  
IF(L.GT.NX) L=NX  
DO 11 I=K,L  
11 II(I)=1  
PRINT 106, (II(I), I=K,L)  
106 FORMAT(1H ,10X,1H*,4X,1H*,7(3X,I2,3X,1H*))  
PRINT 107  
107 FORMAT(1H ,10X,6H* J *,7(8X,1H*))  
PRINT 104  
DO 4 J=1,31  
PRINT 108, J  
108 FORMAT(1H ,10X,2H* ,12,2H *)  
DO 12 I=K,L  
12
```

SUBROUTINE SHOW

```
*****  
IF(INDEX(I,J).EQ.3) GO TO 12  
IA=I-K+1  
GO TO (70,71,72,73,74,75,76),IA  
70 PRINT 170,F(I,J)  
170 FORMAT(1H+,16X,F7.2,2X)  
GO TO 12  
71 PRINT 171,F(I,J)  
171 FORMAT(1H+,25X,F7.2,2X)  
GO TO 12  
72 PRINT 172,F(I,J)  
172 FORMAT(1H+,34X,F7.2,2X)  
GO TO 12  
73 PRINT 173,F(I,J)  
173 FORMAT(1H+,43X,F7.2,2X)  
GO TO 12  
74 PRINT 174,F(I,J)  
174 FORMAT(1H+,52X,F7.2,2X)  
GO TO 12  
75 PRINT 175,F(I,J)  
175 FORMAT(1H+,61X,F7.2,2X)  
76 PRINT 176,F(I,J)  
176 FORMAT(1H+,70X,F7.2,2X)  
12 CONTINUE  
PRINT 180  
180 FORMAT(1H+,16X,7(8X,1H*))  
4 CONTINUE  
PRINT 104  
1 CONTINUE  
RETURN  
END
```

§8 . Έκπληξη του προγράμματος SOLARERO είς δίσκου γνωστής έντασεως.

Διά τόν έλεγχον τῆς άκριβείας τῆς μεθοδολογίας έφαρμόζομεν τό πρόγραμμα είς τόν δίσκου τοῦ Σχ.15, τοῦ όποίου ή έντασις είναι γνωστή.



Σχ.15

Αἱ συνιστῶσαι τῆς έντασεως διά τήν ἀνωτέρω περίπτωσιν φορτίσεως τοῦ όρθιογωνικοῦ δίσκου δύναται ύπό τῶν κατωτέρω ἐκφράσεων*:

$$\sigma_x = - \frac{q}{2tI} (1^2 - x^2)y - \frac{q}{2tI} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right)$$

$$\sigma_y = - \frac{q}{2tI} \left(-\frac{1}{3} y^3 + c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \quad (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\tau_{xy} = + \frac{q}{2tI} (c^2 - y^2)x$$

Ἐνθα $I = \frac{(2c)^3}{12} = \frac{2}{3} c^3$ ή ἀνά μονάδα πάχους ροπή ἀδρανείας τῆς διατομῆς.

Σημείωσις: Εἰς τήν ύπό τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων διδομένην έντασιν ἡ ισορρόπησις τοῦ δίσκου γίνεται ύπό τεμνούσῶν δυνάμεων κατανεμημένων είς τάς διατομάς $x = \pm l$ ητοι:

$$A = \int_{-c}^{c} (\tau_{xy})_{x=-l} dy = \int_{-c}^{c} (\tau_{xy})_{x=+l} dy = ql$$

* [7] §21, σελ.41

Δέν έξετάζεται ή αύστηρότης τῆς ἀνωτέρω λύσεως' ἀρκούμενα μόνον εἰς τὸ γεγονός, διὰ αυτή ίκανοποιεῖ τάς έξισώσεις 1(α,β,γ) καὶ 2(α,β,γ,δ).

Ἐπί τοῦ δίσκου τοῦ Σχ.15 ἐπιθέτομεν κάνναβον μὲν βῆμα $h=0.10m$, ὅπότε θά εἴναι:

$$v_x = \frac{4.80}{0.10} + 1 = 49 \quad (\text{πλήθος σημείων μιᾶς σειρᾶς})$$

$$v_y = \frac{3.00}{0.10} + 1 = 31 \quad (\text{πλήθος σημείων μιᾶς στήλης})$$

$$\kappa = 2(v_x + v_y) - 4 = 2(49+31) - 4 = 156 \quad (\text{πλήθος συνοριακῶν σημείων})$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (α, β, γ) ὑπολογίζονται αἱ τιμαὶ τῶν σ_x , σ_y καὶ τ_{xy} εἰς τὸ σύνορον τοῦ δίσκου καὶ ἀκολουθῶς ὑπολογίζονται αἱ συνιστῶσαι τῆς ἔντάσεως εἰς ἄπαντα τὰ ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ καννάβου δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προγράμματος SOLAPEQ μὲν ἀκρίβειαν συγκλίσεως τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου $\epsilon = 0.0005$.

Αἱ ὑπολογισθεῖσαι τιμαὶ ἐμφαίνονται εἰς τοὺς πίνακας τῶν σελίδων 40 ἕως 60.

Εἰς τοὺς πίνακας τῶν σελίδων 61, 62, 63 ἐμφαίνονται αἱ τιμαὶ τῶν ἔντατικῶν μεγεθῶν αἱ ὑπολογισθεῖσαι δι' ἀπ' εύθετας ἐφαρμογῆς τῶν σχέσεων (α, β, γ) . Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν σ_x, σ_y καὶ τῆς ἀντιμετρίας τῶν τ_{xy} ὡς πρός τὸν δ_{xy} οὐ έξετυπώθησαν μόνον αἱ τιμαὶ τοῦ ἀριστεροῦ ήμέσεος τοῦ δίσκου καὶ μάλιστα αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διατομὰς $I = 1, 3, 5, \dots, 25$.

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων ληφθέντων κατὰ τοὺς δύο ὡς ἀνώ τρόπους, διαπιστοῦται ἡ μεγάλη ἀκρίβεια τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῶν έξισώσεων Laplace καὶ Poisson.

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 1
PAGE

	T	1	2	3	4	5	6	7							
J		*	*	*	*	*	*	*							
1	*	-5.00	*	-8.92	*	-12.67	*	-16.25	*	-19.67	*	-22.92	*	-26.00	*
2	*	-3.16	*	-6.82	*	-10.32	*	-13.67	*	-16.85	*	-19.89	*	-22.77	*
3	*	-1.64	*	-5.03	*	-8.28	*	-11.39	*	-14.35	*	-17.17	*	-19.84	*
4	*	-0.40	*	-3.53	*	-6.54	*	-9.40	*	-12.14	*	-14.74	*	-17.21	*
5	*	0.57	*	-2.30	*	-5.05	*	-7.68	*	-10.19	*	-12.57	*	-14.84	*
6	*	1.30	*	-1.31	*	-3.82	*	-6.21	*	-8.49	*	-10.66	*	-12.71	*
7	*	1.80	*	-0.55	*	-2.80	*	-4.95	*	-7.01	*	-8.96	*	-10.81	*
8	*	2.10	*	0.01	*	-1.99	*	-3.90	*	-5.73	*	-7.46	*	-9.11	*
9	*	2.23	*	0.40	*	-1.35	*	-3.03	*	-4.62	*	-6.14	*	-7.58	*
10	*	2.20	*	0.63	*	-0.87	*	-2.31	*	-3.67	*	-4.98	*	-6.21	*
11	*	2.04	*	0.73	*	-0.52	*	-1.72	*	-2.86	*	-3.95	*	-4.98	*
12	*	1.76	*	0.72	*	-0.29	*	-1.24	*	-2.16	*	-3.03	*	-3.85	*
13	*	1.40	*	0.61	*	-0.14	*	-0.86	*	-1.54	*	-2.19	*	-2.81	*
14	*	0.97	*	0.45	*	-0.06	*	-0.54	*	-0.99	*	-1.43	*	-1.84	*
15	*	0.50	*	0.23	*	-0.02	*	-0.26	*	-0.49	*	-0.71	*	-0.92	*
16	*	0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.01	*	-0.01	*	-0.01	*	-0.01	*
17	*	-0.50	*	-0.24	*	0.01	*	0.25	*	0.47	*	0.69	*	0.89	*
18	*	-0.97	*	-0.45	*	0.05	*	0.52	*	0.98	*	1.41	*	1.82	*
19	*	-1.40	*	-0.62	*	0.13	*	0.84	*	1.53	*	2.17	*	2.79	*
20	*	-1.76	*	-0.72	*	0.28	*	1.23	*	2.14	*	3.01	*	3.83	*
21	*	-2.04	*	-0.73	*	0.51	*	1.71	*	2.84	*	3.93	*	4.95	*
22	*	-2.20	*	-0.64	*	0.86	*	2.29	*	3.66	*	4.96	*	6.19	*
23	*	-2.23	*	-0.40	*	1.34	*	3.02	*	4.67	*	6.12	*	7.56	*
24	*	-2.10	*	-0.01	*	1.98	*	3.89	*	5.71	*	7.45	*	9.09	*
25	*	-1.80	*	0.55	*	2.80	*	4.95	*	7.00	*	8.94	*	10.79	*
26	*	-1.30	*	1.31	*	3.81	*	6.20	*	8.48	*	10.64	*	12.70	*
27	*	-0.57	*	2.30	*	5.05	*	7.68	*	10.18	*	12.57	*	14.83	*
28	*	0.40	*	3.53	*	6.53	*	9.40	*	12.13	*	14.73	*	17.20	*
29	*	1.64	*	5.03	*	8.28	*	11.39	*	14.35	*	17.16	*	19.84	*
30	*	3.16	*	6.82	*	10.32	*	13.66	*	16.85	*	19.89	*	22.76	*
31	*	5.00	*	8.92	*	12.67	*	16.25	*	19.67	*	22.92	*	26.00	*

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 2
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	8	*	9	*	10	*	11	*	12	*	13	*	14	*	
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	-28.92	*	-31.67	*	-34.25	*	-36.67	*	-38.92	*	-41.00	*	-42.92
*	2	*	-25.49	*	-28.06	*	-30.47	*	-32.72	*	-34.82	*	-36.77	*	-38.56
*	3	*	-22.37	*	-24.75	*	-26.99	*	-29.09	*	-31.04	*	-32.84	*	-34.51
*	4	*	-19.54	*	-21.74	*	-23.81	*	-25.74	*	-27.54	*	-29.21	*	-30.74
*	5	*	-16.98	*	-18.99	*	-20.89	*	-22.66	*	-24.31	*	-25.84	*	-27.25
*	6	*	-14.66	*	-16.49	*	-18.21	*	-19.83	*	-21.33	*	-22.72	*	-24.00
*	7	*	-12.56	*	-14.21	*	-15.76	*	-17.21	*	-18.56	*	-19.82	*	-20.97
*	8	*	-10.66	*	-12.13	*	-13.51	*	-14.80	*	-16.00	*	-17.11	*	-18.14
*	9	*	-8.94	*	-10.23	*	-11.44	*	-12.56	*	-13.62	*	-14.59	*	-15.48
*	10	*	-7.38	*	-8.48	*	-9.52	*	-10.48	*	-11.39	*	-12.22	*	-12.99
*	11	*	-5.95	*	-6.87	*	-7.73	*	-8.54	*	-9.29	*	-9.98	*	-10.62
*	12	*	-4.63	*	-5.36	*	-6.05	*	-6.70	*	-7.30	*	-7.86	*	-8.37
*	13	*	-3.40	*	-3.95	*	-4.47	*	-4.95	*	-5.40	*	-5.82	*	-6.21
*	14	*	-2.23	*	-2.60	*	-2.95	*	-3.27	*	-3.57	*	-3.85	*	-4.11
*	15	*	-1.11	*	-1.35	*	-1.47	*	-1.63	*	-1.79	*	-1.93	*	-2.05
*	16	*	-0.01	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02
*	17	*	1.08	*	1.27	*	1.44	*	1.60	*	1.74	*	1.88	*	2.01
*	18	*	2.20	*	2.57	*	2.91	*	3.23	*	3.53	*	3.81	*	4.06
*	19	*	3.37	*	3.92	*	4.43	*	4.92	*	5.36	*	5.78	*	6.16
*	20	*	4.60	*	5.33	*	6.02	*	6.66	*	7.26	*	7.82	*	8.33
*	21	*	5.92	*	6.84	*	7.70	*	8.50	*	9.25	*	9.95	*	10.58
*	22	*	7.36	*	8.45	*	9.49	*	10.45	*	11.35	*	12.18	*	12.95
*	23	*	8.92	*	10.20	*	11.41	*	12.54	*	13.58	*	14.56	*	15.45
*	24	*	10.64	*	12.11	*	13.49	*	14.77	*	15.97	*	17.08	*	18.11
*	25	*	12.54	*	14.19	*	15.74	*	17.19	*	18.54	*	19.79	*	20.94
*	26	*	14.64	*	16.48	*	18.20	*	19.81	*	21.31	*	22.69	*	23.97
*	27	*	16.96	*	18.98	*	20.87	*	22.65	*	24.30	*	25.82	*	27.23
*	28	*	19.53	*	21.73	*	23.80	*	25.73	*	27.53	*	29.20	*	30.73
*	29	*	22.36	*	24.75	*	26.99	*	29.08	*	31.03	*	32.83	*	34.50
*	30	*	25.49	*	28.05	*	30.46	*	32.72	*	34.82	*	36.76	*	38.55
*	31	*	28.92	*	31.67	*	34.25	*	36.67	*	38.92	*	41.00	*	42.92

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 3
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
*	15	*	16	*	17	*	18	*	19	*	20	*			
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
*	1	*	-44.67	*	-46.25	*	-47.67	*	-48.92	*	-50.00	*	-50.92	*	-51.67
*	2	*	-40.19	*	-41.67	*	-42.99	*	-44.16	*	-45.17	*	-46.02	*	-46.72
*	3	*	-36.02	*	-37.39	*	-38.62	*	-39.71	*	-40.65	*	-41.44	*	-42.09
*	4	*	-32.14	*	-33.41	*	-34.54	*	-35.54	*	-36.41	*	-37.14	*	-37.74
*	5	*	-28.53	*	-29.69	*	-30.73	*	-31.65	*	-32.44	*	-33.12	*	-33.67
*	6	*	-25.16	*	-26.22	*	-27.16	*	-28.00	*	-28.72	*	-29.33	*	-29.83
*	7	*	-22.02	*	-22.97	*	-23.82	*	-24.57	*	-25.22	*	-25.77	*	-26.22
*	8	*	-19.07	*	-19.92	*	-20.67	*	-21.34	*	-21.92	*	-22.41	*	-22.81
*	9	*	-16.30	*	-17.04	*	-17.70	*	-18.29	*	-18.79	*	-19.22	*	-19.57
*	10	*	-13.69	*	-14.32	*	-14.89	*	-15.39	*	-15.82	*	-16.19	*	-16.49
*	11	*	-11.21	*	-11.74	*	-12.21	*	-12.63	*	-12.99	*	-13.29	*	-13.54
*	12	*	-8.84	*	-9.26	*	-9.64	*	-9.97	*	-10.26	*	-10.51	*	-10.71
*	13	*	-6.56	*	-6.87	*	-7.16	*	-7.41	*	-7.62	*	-7.81	*	-7.96
*	14	*	-4.34	*	-4.55	*	-4.74	*	-4.91	*	-5.06	*	-5.18	*	-5.28
*	15	*	-2.17	*	-2.28	*	-2.37	*	-2.46	*	-2.53	*	-2.59	*	-2.64
*	16	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.03
*	17	*	2.12	*	2.23	*	2.32	*	2.41	*	2.48	*	2.54	*	2.59
*	18	*	4.30	*	4.51	*	4.69	*	4.86	*	5.00	*	5.13	*	5.23
*	19	*	6.51	*	6.83	*	7.11	*	7.36	*	7.58	*	7.76	*	7.91
*	20	*	8.79	*	9.22	*	9.59	*	9.93	*	10.21	*	10.46	*	10.66
*	21	*	11.17	*	11.69	*	12.16	*	12.58	*	12.94	*	13.25	*	13.50
*	22	*	13.65	*	14.28	*	14.85	*	15.35	*	15.78	*	16.15	*	16.45
*	23	*	16.27	*	17.00	*	17.66	*	18.25	*	18.75	*	19.18	*	19.53
*	24	*	19.04	*	19.88	*	20.64	*	21.30	*	21.88	*	22.37	*	22.77
*	25	*	21.99	*	22.94	*	23.79	*	24.54	*	25.19	*	25.74	*	26.19
*	26	*	25.14	*	26.19	*	27.14	*	27.97	*	28.69	*	29.30	*	29.80
*	27	*	24.51	*	29.67	*	30.71	*	31.63	*	32.42	*	33.09	*	33.64
*	28	*	32.13	*	33.39	*	34.53	*	35.53	*	36.39	*	37.13	*	37.73
*	29	*	36.01	*	37.38	*	38.61	*	39.70	*	40.63	*	41.43	*	42.08
*	30	*	40.19	*	41.66	*	42.98	*	44.15	*	45.16	*	46.02	*	46.72
*	31	*	44.67	*	46.25	*	47.67	*	48.92	*	50.00	*	50.92	*	51.67

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ^{2A}
NORMAL STRESSES

ΣΦΑΙΣ NO 4
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	22	*	23	*	24	*	25	*	26	*	27	*	28
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	1	*	-52.25	*	-52.67	*	-52.92	*	-53.00	*	-52.92	*	-52.25
*	2	*	-47.27	*	-47.66	*	-47.89	*	-47.97	*	-47.89	*	-47.27
*	3	*	-42.60	*	-42.96	*	-43.17	*	-43.25	*	-43.17	*	-42.96
*	4	*	-38.2.	*	-38.54	*	-38.74	*	-38.81	*	-38.74	*	-38.21
*	5	*	-34.09	*	-34.40	*	-34.58	*	-34.64	*	-34.58	*	-34.09
*	6	*	-30.22	*	-30.50	*	-30.66	*	-30.72	*	-30.66	*	-30.22
*	7	*	-26.57	*	-26.82	*	-26.97	*	-27.02	*	-26.97	*	-26.57
*	8	*	-23.12	*	-23.34	*	-23.47	*	-23.52	*	-23.47	*	-23.12
*	9	*	-19.84	*	-20.04	*	-20.15	*	-20.19	*	-20.15	*	-19.84
*	10	*	-16.72	*	-16.89	*	-16.99	*	-17.02	*	-16.99	*	-16.72
*	11	*	-13.74	*	-13.88	*	-13.96	*	-13.99	*	-13.96	*	-13.74
*	12	*	-10.86	*	-10.97	*	-11.04	*	-11.06	*	-11.04	*	-10.86
*	13	*	-8.0.	*	-8.16	*	-8.21	*	-8.23	*	-8.21	*	-8.07
*	14	*	-5.36	*	-5.41	*	-5.45	*	-5.46	*	-5.44	*	-5.41
*	15	*	-2.65	*	-2.71	*	-2.72	*	-2.73	*	-2.72	*	-2.71
*	16	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.03	*	-0.02
*	17	*	2.63	*	2.66	*	2.67	*	2.68	*	2.67	*	2.66
*	18	*	5.30	*	5.36	*	5.39	*	5.40	*	5.39	*	5.36
*	19	*	8.03	*	8.11	*	8.16	*	8.18	*	8.16	*	8.11
*	20	*	10.81	*	10.93	*	10.99	*	11.01	*	10.99	*	10.93
*	21	*	13.69	*	13.83	*	13.91	*	13.94	*	13.91	*	13.83
*	22	*	16.68	*	16.85	*	16.95	*	16.98	*	16.95	*	16.68
*	23	*	19.80	*	20.00	*	20.11	*	20.15	*	20.11	*	20.00
*	24	*	23.08	*	23.30	*	23.44	*	23.48	*	23.44	*	23.30
*	25	*	26.54	*	26.79	*	26.94	*	26.99	*	26.94	*	26.79
*	26	*	30.19	*	30.47	*	30.64	*	30.69	*	30.64	*	30.47
*	27	*	34.07	*	34.38	*	34.56	*	34.62	*	34.56	*	34.38
*	28	*	38.19	*	38.53	*	38.73	*	38.79	*	38.73	*	38.53
*	29	*	42.58	*	42.95	*	43.16	*	43.23	*	43.16	*	42.95
*	30	*	47.26	*	47.65	*	47.88	*	47.96	*	47.88	*	47.65
*	31	*	52.25	*	52.67	*	52.92	*	53.00	*	52.97	*	52.67

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
*	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	34	*	35		
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
*	1	*	-51.67	*	-50.92	*	-50.00	*	-48.92	*	-47.67	*	-46.25	*	-44.67
*	2	*	-46.72	*	-46.02	*	-45.17	*	-44.16	*	-42.99	*	-41.67	*	-40.19
*	3	*	-42.09	*	-41.44	*	-40.64	*	-39.71	*	-38.62	*	-37.39	*	-36.02
*	4	*	-37.74	*	-37.14	*	-36.41	*	-35.54	*	-34.54	*	-33.41	*	-32.14
*	5	*	-33.66	*	-33.11	*	-32.44	*	-31.65	*	-30.73	*	-29.69	*	-28.53
*	6	*	-29.83	*	-29.33	*	-28.72	*	-27.99	*	-27.16	*	-26.22	*	-25.16
*	7	*	-26.22	*	-25.77	*	-25.22	*	-24.56	*	-23.81	*	-22.96	*	-22.01
*	8	*	-22.80	*	-22.40	*	-21.91	*	-21.34	*	-20.67	*	-19.91	*	-19.07
*	9	*	-19.57	*	-19.22	*	-18.79	*	-18.28	*	-17.70	*	-17.04	*	-16.30
*	10	*	-16.49	*	-16.19	*	-15.82	*	-15.39	*	-14.88	*	-14.32	*	-13.68
*	11	*	-13.54	*	-13.29	*	-12.98	*	-12.62	*	-12.20	*	-11.73	*	-11.20
*	12	*	-10.70	*	-10.50	*	-10.26	*	-9.97	*	-9.63	*	-9.26	*	-8.83
*	13	*	-7.96	*	-7.81	*	-7.62	*	-7.40	*	-7.15	*	-6.87	*	-6.55
*	14	*	-5.28	*	-5.18	*	-5.05	*	-4.91	*	-4.74	*	-4.55	*	-4.34
*	15	*	-2.64	*	-2.59	*	-2.53	*	-2.45	*	-2.37	*	-2.27	*	-2.17
*	16	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.02
*	17	*	2.59	*	2.54	*	2.48	*	2.41	*	2.33	*	2.23	*	2.13
*	18	*	5.23	*	5.13	*	5.01	*	4.87	*	4.70	*	4.51	*	4.30
*	19	*	7.91	*	7.76	*	7.58	*	7.36	*	7.12	*	6.83	*	6.52
*	20	*	10.66	*	10.46	*	10.22	*	9.93	*	9.60	*	9.22	*	8.80
*	21	*	13.50	*	13.25	*	12.95	*	12.58	*	12.17	*	11.70	*	11.17
*	22	*	16.45	*	16.15	*	15.78	*	15.35	*	14.85	*	14.29	*	13.65
*	23	*	19.53	*	19.18	*	18.76	*	18.25	*	17.67	*	17.01	*	16.27
*	24	*	22.77	*	22.37	*	21.88	*	21.31	*	20.64	*	19.89	*	19.04
*	25	*	26.19	*	25.74	*	25.19	*	24.54	*	23.79	*	22.94	*	21.99
*	26	*	29.81	*	29.31	*	28.70	*	27.97	*	27.14	*	26.26	*	25.14
*	27	*	33.64	*	33.09	*	32.42	*	31.63	*	30.71	*	29.67	*	28.51
*	28	*	37.73	*	37.13	*	36.40	*	35.53	*	34.53	*	33.40	*	32.13
*	29	*	42.08	*	41.43	*	40.63	*	39.70	*	38.61	*	37.39	*	36.01
*	30	*	46.72	*	46.02	*	45.16	*	44.15	*	42.99	*	41.66	*	40.19
*	31	*	51.67	*	50.92	*	50.00	*	48.92	*	47.67	*	46.25	*	44.67

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 6
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
*	*	36	*	37	*	38	*	39	*	40	*	41	*	42	
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	1	*	-42.92	*	-41.00	*	-38.92	*	-36.67	*	-34.25	*	-31.67	*	-28.92
*	2	*	-38.56	*	-36.77	*	-34.82	*	-32.72	*	-30.47	*	-28.06	*	-25.49
*	3	*	-34.50	*	-32.84	*	-31.04	*	-29.09	*	-26.99	*	-24.75	*	-22.37
*	4	*	-30.74	*	-29.21	*	-27.54	*	-25.74	*	-23.81	*	-21.74	*	-19.54
*	5	*	-27.24	*	-25.84	*	-24.31	*	-22.66	*	-20.89	*	-18.99	*	-16.97
*	6	*	-23.99	*	-22.71	*	-21.32	*	-19.82	*	-18.21	*	-16.49	*	-14.65
*	7	*	-20.96	*	-19.81	*	-18.56	*	-17.21	*	-15.76	*	-14.21	*	-12.56
*	8	*	-18.13	*	-17.11	*	-16.00	*	-14.80	*	-13.51	*	-12.13	*	-10.66
*	9	*	-15.48	*	-14.58	*	-13.61	*	-12.56	*	-11.43	*	-10.22	*	-8.94
*	10	*	-12.98	*	-12.21	*	-11.38	*	-10.48	*	-9.51	*	-8.48	*	-7.37
*	11	*	-10.62	*	-9.98	*	-9.28	*	-8.53	*	-7.72	*	-6.86	*	-5.94
*	12	*	-8.36	*	-7.85	*	-7.30	*	-6.69	*	-6.05	*	-5.36	*	-4.62
*	13	*	-6.20	*	-5.82	*	-5.40	*	-4.95	*	-4.46	*	-3.94	*	-3.39
*	14	*	-4.10	*	-3.85	*	-3.57	*	-3.26	*	-2.94	*	-2.60	*	-2.23
*	15	*	-2.05	*	-1.92	*	-1.78	*	-1.63	*	-1.47	*	-1.29	*	-1.11
*	16	*	-0.02	*	-0.02	*	-0.01	*	-0.01	*	-0.01	*	-0.01	*	-0.01
*	17	*	2.02	*	1.89	*	1.75	*	1.60	*	1.44	*	1.27	*	1.09
*	18	*	4.97	*	3.81	*	3.54	*	3.24	*	2.92	*	2.58	*	2.21
*	19	*	6.17	*	5.79	*	5.37	*	4.92	*	4.44	*	3.92	*	3.38
*	20	*	8.33	*	7.82	*	7.27	*	6.67	*	6.03	*	5.34	*	4.61
*	21	*	10.59	*	9.95	*	9.26	*	8.51	*	7.70	*	6.84	*	5.93
*	22	*	12.95	*	12.19	*	11.36	*	10.46	*	9.49	*	8.46	*	7.36
*	23	*	15.45	*	14.56	*	13.59	*	12.54	*	11.41	*	10.21	*	8.93
*	24	*	18.11	*	17.09	*	15.98	*	14.78	*	13.49	*	12.11	*	10.65
*	25	*	20.94	*	19.79	*	18.54	*	17.19	*	15.74	*	14.20	*	12.55
*	26	*	23.98	*	22.70	*	21.31	*	19.81	*	18.20	*	16.48	*	14.65
*	27	*	27.23	*	25.83	*	24.30	*	22.65	*	20.88	*	18.98	*	16.97
*	28	*	30.73	*	29.20	*	27.53	*	25.73	*	23.80	*	21.73	*	19.53
*	29	*	34.50	*	32.84	*	31.03	*	29.08	*	26.99	*	24.75	*	22.36
*	30	*	38.55	*	36.76	*	34.82	*	32.72	*	30.46	*	28.05	*	25.49
*	31	*	42.92	*	41.00	*	38.92	*	36.67	*	34.25	*	31.67	*	28.92

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 7
PAGE

	I														
	*	43	*	44	*	45	*	46	*	47	*	48	*	49	*
	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	1	*	-26.00	*	-22.92	*	-19.67	*	-16.25	*	-12.67	*	-8.92	*	-5.00
*	2	*	-22.77	*	-19.89	*	-16.85	*	-13.66	*	-10.32	*	-6.82	*	-3.16
*	3	*	-19.84	*	-17.17	*	-14.35	*	-11.39	*	-8.28	*	-5.03	*	-1.64
*	4	*	-17.20	*	-14.74	*	-12.14	*	-9.40	*	-6.53	*	-3.53	*	0.40
*	5	*	-14.83	*	-12.57	*	-10.19	*	-7.68	*	-5.05	*	-2.30	*	0.57
*	6	*	-12.71	*	-10.65	*	-8.48	*	-6.21	*	-3.80	*	-1.31	*	1.30
*	7	*	-10.81	*	-8.95	*	-7.00	*	-4.95	*	-2.80	*	-0.55	*	1.80
*	8	*	-9.10	*	-7.46	*	-5.72	*	-3.90	*	-1.99	*	0.01	*	2.10
*	9	*	-7.58	*	-6.14	*	-4.62	*	-2.02	*	-1.35	*	0.40	*	2.23
*	10	*	-6.21	*	-4.97	*	-3.67	*	-1.30	*	-0.87	*	0.63	*	2.20
*	11	*	-4.97	*	-3.94	*	-2.86	*	-1.72	*	-0.52	*	0.73	*	2.04
*	12	*	-3.84	*	-3.02	*	-2.15	*	-1.24	*	-0.28	*	0.72	*	1.76
*	13	*	-2.81	*	-2.19	*	-1.54	*	-0.85	*	-0.14	*	0.62	*	1.40
*	14	*	-1.84	*	-1.43	*	-0.99	*	-0.53	*	-0.05	*	0.45	*	0.97
*	15	*	-0.91	*	-0.70	*	-0.49	*	-0.26	*	-0.02	*	0.24	*	0.50
*	16	*	-0.01	*	-0.01	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	0.00
*	17	*	0.90	*	0.69	*	0.48	*	0.25	*	0.01	*	-0.24	*	-0.50
*	18	*	1.82	*	1.41	*	0.98	*	0.53	*	0.05	*	-0.45	*	-0.97
*	19	*	2.79	*	2.18	*	1.53	*	0.85	*	0.13	*	-0.62	*	-1.40
*	20	*	3.83	*	3.01	*	2.14	*	1.23	*	0.28	*	-0.72	*	-1.76
*	21	*	4.96	*	3.93	*	2.85	*	1.71	*	0.52	*	-0.73	*	-2.04
*	22	*	6.19	*	4.96	*	3.66	*	2.30	*	0.86	*	-0.63	*	-2.20
*	23	*	7.57	*	6.13	*	4.61	*	3.02	*	1.35	*	-0.40	*	-2.23
*	24	*	9.05	*	7.45	*	5.72	*	3.89	*	1.93	*	-0.01	*	-2.10
*	25	*	10.80	*	8.95	*	7.00	*	4.95	*	2.80	*	0.55	*	-1.80
*	26	*	12.70	*	10.65	*	8.48	*	6.20	*	3.87	*	1.31	*	-1.30
*	27	*	14.83	*	12.57	*	10.18	*	7.68	*	5.05	*	2.30	*	-0.57
*	28	*	17.20	*	14.73	*	12.13	*	9.40	*	6.53	*	3.53	*	0.40
*	29	*	19.84	*	17.17	*	14.35	*	11.39	*	8.28	*	5.03	*	1.64
*	30	*	22.76	*	19.89	*	16.85	*	13.66	*	10.32	*	6.82	*	3.16
*	31	*	26.00	*	22.92	*	19.67	*	16.25	*	12.67	*	8.92	*	5.00

ΟΡΓΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΞ NC 1
PAGE

	I	1	2	3	4	5	6	7	
J	*	*	*	*	*	*	*	*	
1	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*
2	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*
3	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*
4	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*
5	*	-23.79	*	-23.79	*	-23.78	*	-23.78	*
6	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*
7	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*
8	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*
9	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*
10	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*
11	*	-18.52	*	-18.52	*	-18.52	*	-18.52	*
12	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*
13	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*
14	*	-14.99	*	-14.99	*	-14.98	*	-14.98	*
15	*	-13.75	*	-13.75	*	-13.75	*	-13.75	*
16	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*
17	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*
18	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*
19	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*
20	*	-7.62	*	-7.62	*	-7.62	*	-7.62	*
21	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*
22	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*
23	*	-4.39	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*
24	*	-3.45	*	-3.45	*	-3.45	*	-3.45	*
25	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*
26	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*
27	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*
28	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*
29	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*
30	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*
31	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 3
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*
*	2	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*
*	3	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*
*	4	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*
*	5	*	-23.78	*	-23.78	*	-23.78	*	-23.78	*	-23.78	*
*	6	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.14	*	-23.14	*
*	7	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*
*	8	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*
*	9	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*
*	10	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.59	*	-19.59	*
*	11	*	-18.51	*	-18.51	*	-18.51	*	-18.51	*	-18.51	*
*	12	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*
*	13	*	-16.19	*	-16.19	*	-16.19	*	-16.19	*	-16.19	*
*	14	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*
*	15	*	-13.74	*	-13.74	*	-13.74	*	-13.74	*	-13.74	*
*	16	*	-12.49	*	-12.49	*	-12.49	*	-12.49	*	-12.49	*
*	17	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*
*	18	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*
*	19	*	-8.79	*	-8.79	*	-8.79	*	-8.79	*	-8.79	*
*	20	*	-7.61	*	-7.61	*	-7.61	*	-7.61	*	-7.61	*
*	21	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*
*	22	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*
*	23	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*
*	24	*	-3.44	*	-3.44	*	-3.44	*	-3.44	*	-3.44	*
*	25	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*
*	26	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*
*	27	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*
*	28	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*
*	29	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*
*	30	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*
*	31	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ NORMAL STRESSES

SFAIS NC 4
PAGE

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
PAGE

I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	34	*
J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
1	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	
2	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	
3	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	
4	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	
5	*	-23.78	*	-23.78	*	-23.78	*	-23.78	*	-23.78	*	
6	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	
7	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	
8	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	
9	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	
10	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	
11	*	-18.51	*	-18.51	*	-18.51	*	-18.51	*	-18.52	*	
12	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	
13	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*	
14	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	
15	*	-13.74	*	-13.74	*	-13.74	*	-13.74	*	-13.74	*	
16	*	-12.49	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*	
17	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	
18	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	
19	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*	
20	*	-7.61	*	-7.61	*	-7.61	*	-7.61	*	-7.61	*	
21	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	
22	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	
23	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*	
24	*	-3.44	*	-3.44	*	-3.45	*	-3.45	*	-3.45	*	
25	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	
26	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	
27	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	
28	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	
29	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	
30	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	
31	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 6
PAGE

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES SY

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 7
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	43	*	44	*	45	*	46	*	47	*	48	*
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*	-25.00	*
*	2	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*	-24.92	*
*	3	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*	-24.68	*
*	4	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*	-24.30	*
*	5	*	-23.78	*	-23.79	*	-23.79	*	-23.79	*	-23.79	*
*	6	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*	-23.15	*
*	7	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*	-22.40	*
*	8	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*	-21.55	*
*	9	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*	-20.61	*
*	10	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*	-19.60	*
*	11	*	-18.52	*	-18.52	*	-18.52	*	-18.52	*	-18.52	*
*	12	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*	-17.38	*
*	13	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*	-16.20	*
*	14	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*	-14.98	*
*	15	*	-13.75	*	-13.75	*	-13.75	*	-13.75	*	-13.75	*
*	16	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*	-12.50	*
*	17	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*	-11.25	*
*	18	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*	-10.01	*
*	19	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*	-8.80	*
*	20	*	-7.62	*	-7.62	*	-7.62	*	-7.62	*	-7.62	*
*	21	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*	-6.48	*
*	22	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*	-5.40	*
*	23	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.38	*	-4.39	*	-4.39	*
*	24	*	-3.45	*	-3.45	*	-3.45	*	-3.45	*	-3.45	*
*	25	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*	-2.60	*
*	26	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*	-1.85	*
*	27	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*	-1.21	*
*	28	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*	-0.70	*
*	29	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*	-0.32	*
*	30	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*	-0.08	*
*	31	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*	-0.00	*

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ TXY SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 1
PAGE

	I	1	2	3	4	5	6	7		
J		*	*	*	*	*	*	*		
1	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00
2	*	-3.87	*	-3.71	*	-3.55	*	-3.38	*	-3.22
3	*	-7.47	*	-7.16	*	-6.85	*	-6.53	*	-6.22
4	*	-10.80	*	-10.35	*	-9.90	*	-9.45	*	-9.00
5	*	-13.87	*	-13.29	*	-12.71	*	-12.13	*	-11.55
6	*	-16.67	*	-15.97	*	-15.28	*	-14.58	*	-13.89
7	*	-19.20	*	-18.40	*	-17.60	*	-16.80	*	-16.00
8	*	-21.47	*	-20.57	*	-19.68	*	-18.78	*	-17.89
9	*	-23.47	*	-22.49	*	-21.51	*	-20.53	*	-19.55
10	*	-25.20	*	-24.15	*	-23.10	*	-22.05	*	-21.00
11	*	-26.67	*	-25.56	*	-24.44	*	-23.33	*	-22.22
12	*	-27.87	*	-26.71	*	-25.54	*	-24.38	*	-23.22
13	*	-28.80	*	-27.60	*	-26.40	*	-25.20	*	-24.00
14	*	-29.47	*	-28.24	*	-27.01	*	-25.78	*	-24.55
15	*	-29.87	*	-28.62	*	-27.38	*	-26.13	*	-24.88
16	*	-30.00	*	-28.75	*	-27.50	*	-26.25	*	-24.99
17	*	-29.87	*	-28.62	*	-27.38	*	-26.13	*	-24.88
18	*	-29.47	*	-28.24	*	-27.01	*	-25.78	*	-24.55
19	*	-28.80	*	-27.60	*	-26.40	*	-25.20	*	-23.99
20	*	-27.87	*	-26.71	*	-25.54	*	-24.38	*	-23.22
21	*	-26.67	*	-25.56	*	-24.44	*	-23.33	*	-22.22
22	*	-25.20	*	-24.15	*	-23.10	*	-22.05	*	-21.00
23	*	-23.47	*	-22.49	*	-21.51	*	-20.53	*	-19.55
24	*	-21.47	*	-20.57	*	-19.68	*	-18.78	*	-17.89
25	*	-19.20	*	-18.40	*	-17.60	*	-16.80	*	-16.00
26	*	-16.67	*	-15.97	*	-15.28	*	-14.58	*	-13.89
27	*	-13.87	*	-13.29	*	-12.71	*	-12.13	*	-11.55
28	*	-10.80	*	-10.35	*	-9.90	*	-9.45	*	-9.00
29	*	-7.47	*	-7.16	*	-6.84	*	-6.53	*	-6.22
30	*	-3.87	*	-3.71	*	-3.54	*	-3.38	*	-3.22
31	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00

**ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ TXY
SHEAR STRESSES**

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ SHEAR STRESSSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 4
PAGE

	I	22	23	24	25	26	27	28
J								
1	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00
2	*	-0.48	*	-0.32	*	-0.16	*	0.32
3	*	-0.93	*	-0.62	*	-0.31	*	0.63
4	*	-1.34	*	-0.89	*	-0.44	*	0.91
5	*	-1.72	*	-1.15	*	-0.57	*	1.16
6	*	-2.07	*	-1.38	*	-0.68	*	1.40
7	*	-2.39	*	-1.59	*	-0.79	*	1.61
8	*	-2.67	*	-1.77	*	-0.88	*	1.80
9	*	-2.92	*	-1.94	*	-0.96	*	1.97
10	*	-3.13	*	-2.08	*	-1.03	*	2.12
11	*	-3.32	*	-2.20	*	-1.09	*	2.24
12	*	-3.46	*	-2.30	*	-1.14	*	2.34
13	*	-3.58	*	-2.38	*	-1.18	*	2.42
14	*	-3.66	*	-2.44	*	-1.21	*	2.47
15	*	-3.71	*	-2.47	*	-1.23	*	2.51
16	*	-3.72	*	-2.48	*	-1.23	*	2.52
17	*	-3.71	*	-2.47	*	-1.23	*	2.51
18	*	-3.66	*	-2.44	*	-1.21	*	2.47
19	*	-3.58	*	-2.38	*	-1.18	*	2.42
20	*	-3.47	*	-2.31	*	-1.14	*	2.34
21	*	-3.32	*	-2.21	*	-1.10	*	2.24
22	*	-3.14	*	-2.09	*	-1.04	*	2.11
23	*	-2.92	*	-1.94	*	-0.96	*	1.97
24	*	-2.67	*	-1.78	*	-0.88	*	1.80
25	*	-2.39	*	-1.59	*	-0.79	*	1.61
26	*	-2.07	*	-1.38	*	-0.69	*	1.40
27	*	-1.73	*	-1.15	*	-0.57	*	1.16
28	*	-1.34	*	-0.89	*	-0.44	*	0.90
29	*	-0.93	*	-0.62	*	-0.31	*	0.63
30	*	-0.48	*	-0.32	*	-0.16	*	0.32
31	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 6
PAGE

ΣΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES TXY

I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*
2	*	1.77	*	1.94	*	2.10	*	2.26	*	2.42	*
3	*	3.43	*	3.74	*	4.05	*	4.36	*	4.67	*
4	*	4.96	*	5.41	*	5.85	*	6.30	*	6.75	*
5	*	6.36	*	6.94	*	7.52	*	8.09	*	8.67	*
6	*	7.65	*	8.34	*	9.04	*	9.73	*	10.42	*
7	*	8.81	*	9.61	*	10.41	*	11.21	*	12.01	*
8	*	9.85	*	10.74	*	11.64	*	12.53	*	13.42	*
9	*	10.77	*	11.74	*	12.72	*	13.70	*	14.68	*
10	*	11.56	*	12.61	*	13.66	*	14.71	*	15.76	*
11	*	12.23	*	13.34	*	14.46	*	15.57	*	16.68	*
12	*	12.78	*	13.95	*	15.11	*	16.27	*	17.43	*
13	*	13.21	*	14.41	*	15.61	*	16.81	*	18.01	*
14	*	13.52	*	14.75	*	15.97	*	17.20	*	18.43	*
15	*	13.70	*	14.94	*	16.19	*	17.43	*	18.68	*
16	*	13.76	*	15.01	*	16.26	*	17.51	*	18.76	*
17	*	13.70	*	14.94	*	16.19	*	17.43	*	18.68	*
18	*	13.52	*	14.74	*	15.97	*	17.20	*	18.42	*
19	*	13.21	*	14.41	*	15.61	*	16.81	*	18.01	*
20	*	12.78	*	13.94	*	15.10	*	16.26	*	17.42	*
21	*	12.23	*	13.34	*	14.45	*	15.56	*	16.67	*
22	*	11.56	*	12.61	*	13.66	*	14.71	*	15.76	*
23	*	10.76	*	11.74	*	12.72	*	13.69	*	14.67	*
24	*	9.84	*	10.74	*	11.63	*	12.53	*	13.42	*
25	*	8.80	*	9.60	*	10.40	*	11.20	*	12.00	*
26	*	7.64	*	8.34	*	9.03	*	9.73	*	10.42	*
27	*	6.36	*	6.94	*	7.51	*	8.09	*	8.67	*
28	*	4.95	*	5.40	*	5.85	*	6.30	*	6.75	*
29	*	3.42	*	3.73	*	4.05	*	4.36	*	4.67	*
30	*	1.77	*	1.93	*	2.09	*	2.26	*	2.42	*
31	*	0.00	*	0.06	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 7
PAGE

**OPÉAI TAZÉTISSES EX
NORMAL STRESSES**

ΟΡΘΑΙ ΤΑΞΕΙΣ ΣΩ
NORMAL STRESSES ΣΩ

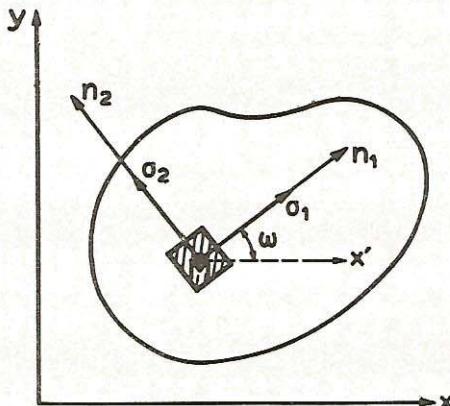
*	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
*	4	1	3	5	7	9	11	13	15	17
*	1	-25.00*	-25.00*	-25.00*	-25.00*	-25.00*	-25.00*	-25.00*	-25.00*	-25.00*
*	2	-24.92*	-24.92*	-24.92*	-24.92*	-24.92*	-24.92*	-24.92*	-24.92*	-24.92*
*	3	-24.68*	-24.68*	-24.68*	-24.68*	-24.68*	-24.68*	-24.68*	-24.68*	-24.68*
*	4	-24.36*	-24.36*	-24.36*	-24.36*	-24.36*	-24.36*	-24.36*	-24.36*	-24.36*
*	5	-23.79*	-23.79*	-23.79*	-23.79*	-23.79*	-23.79*	-23.79*	-23.79*	-23.79*
*	6	-23.15*	-23.15*	-23.15*	-23.15*	-23.15*	-23.15*	-23.15*	-23.15*	-23.15*
*	7	-22.40*	-22.40*	-22.40*	-22.40*	-22.40*	-22.40*	-22.40*	-22.40*	-22.40*
*	8	-21.55*	-21.55*	-21.55*	-21.55*	-21.55*	-21.55*	-21.55*	-21.55*	-21.55*
*	9	-20.61*	-20.61*	-20.61*	-20.61*	-20.61*	-20.61*	-20.61*	-20.61*	-20.61*
*	10	-19.60*	-19.60*	-19.60*	-19.60*	-19.60*	-19.60*	-19.60*	-19.60*	-19.60*
*	11	-18.52*	-18.52*	-18.52*	-18.52*	-18.52*	-18.52*	-18.52*	-18.52*	-18.52*
*	12	-17.38*	-17.38*	-17.38*	-17.38*	-17.38*	-17.38*	-17.38*	-17.38*	-17.38*
*	13	-16.20*	-16.20*	-16.20*	-16.20*	-16.20*	-16.20*	-16.20*	-16.20*	-16.20*
*	14	-14.99*	-14.99*	-14.99*	-14.99*	-14.99*	-14.99*	-14.99*	-14.99*	-14.99*
*	15	-13.75*	-13.75*	-13.75*	-13.75*	-13.75*	-13.75*	-13.75*	-13.75*	-13.75*
*	16	-12.50*	-12.50*	-12.50*	-12.50*	-12.50*	-12.50*	-12.50*	-12.50*	-12.50*
*	17	-11.25*	-11.25*	-11.25*	-11.25*	-11.25*	-11.25*	-11.25*	-11.25*	-11.25*
*	18	-10.01*	-10.01*	-10.01*	-10.01*	-10.01*	-10.01*	-10.01*	-10.01*	-10.01*
*	19	-8.80*	-8.80*	-8.80*	-8.80*	-8.80*	-8.80*	-8.80*	-8.80*	-8.80*
*	20	-7.62*	-7.62*	-7.62*	-7.62*	-7.62*	-7.62*	-7.62*	-7.62*	-7.62*
*	21	-6.48*	-6.48*	-6.48*	-6.48*	-6.48*	-6.48*	-6.48*	-6.48*	-6.48*
*	22	-5.40*	-5.40*	-5.40*	-5.40*	-5.40*	-5.40*	-5.40*	-5.40*	-5.40*
*	23	-4.39*	-4.39*	-4.39*	-4.39*	-4.39*	-4.39*	-4.39*	-4.39*	-4.39*
*	24	-3.45*	-3.45*	-3.45*	-3.45*	-3.45*	-3.45*	-3.45*	-3.45*	-3.45*
*	25	-2.60*	-2.60*	-2.60*	-2.60*	-2.60*	-2.60*	-2.60*	-2.60*	-2.60*
*	26	-1.85*	-1.85*	-1.85*	-1.85*	-1.85*	-1.85*	-1.85*	-1.85*	-1.85*
*	27	-1.21*	-1.21*	-1.21*	-1.21*	-1.21*	-1.21*	-1.21*	-1.21*	-1.21*
*	28	-0.70*	-0.70*	-0.70*	-0.70*	-0.70*	-0.70*	-0.70*	-0.70*	-0.70*
*	29	-0.32*	-0.32*	-0.32*	-0.32*	-0.32*	-0.32*	-0.32*	-0.32*	-0.32*
*	30	-0.08*	-0.08*	-0.08*	-0.08*	-0.08*	-0.08*	-0.08*	-0.08*	-0.08*
*	31	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ
SHEAR STRESSES

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
*	1	4	-3.87*	-3.54*	-3.00*	0.00*	0.00*	0.00*	-2.90*	-2.58*	-2.02*	-0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	*
*	2	4	-7.47*	-6.84*	-6.22*	-3.22*	-3.00*	-2.22*	-5.60*	-4.98*	-4.36*	-3.73*	-3.00*	-1.93*	-1.61*	-0.93*	-0.57*	-0.32*	*
*	3	4	-10.80*	-9.90*	-9.00*	-8.19*	-7.20*	-6.30*	-8.10*	-7.20*	-6.30*	-5.40*	-4.50*	-3.60*	-2.70*	-1.87*	-1.24*	-0.62*	*
*	4	5	-13.87*	-12.71*	-11.56*	-10.40*	-9.24*	-8.90*	-10.40*	-9.24*	-8.90*	-8.00*	-7.00*	-6.00*	-5.00*	-4.00*	-3.00*	-0.90*	*
*	5	6	-16.67*	-15.28*	-13.86*	-12.50*	-11.11*	-9.72*	-12.50*	-11.11*	-9.72*	-8.33*	-7.00*	-6.00*	-5.00*	-4.00*	-3.00*	-2.00*	*
*	6	7	-19.20*	-17.60*	-16.00*	-14.40*	-12.80*	-11.20*	-14.40*	-12.80*	-11.20*	-9.60*	-8.00*	-7.00*	-6.00*	-5.00*	-4.00*	-3.00*	*
*	8	9	-21.47*	-19.68*	-17.89*	-16.31*	-14.31*	-12.52*	-16.10*	-14.31*	-12.52*	-10.73*	-9.00*	-8.00*	-7.00*	-6.00*	-5.00*	-4.00*	*
*	10	11	-23.47*	-21.51*	-19.56*	-17.60*	-15.64*	-13.69*	-17.60*	-15.64*	-13.69*	-11.73*	-10.00*	-9.00*	-8.00*	-7.00*	-6.00*	-5.00*	*
*	12	13	-25.20*	-24.10*	-22.00*	-21.00*	-18.90*	-17.60*	-21.00*	-22.00*	-21.00*	-19.56*	-17.80*	-16.00*	-14.00*	-12.00*	-10.00*	-8.00*	*
*	14	15	-26.67*	-24.44*	-22.22*	-20.00*	-18.56*	-16.26*	-20.00*	-22.22*	-20.00*	-18.56*	-16.26*	-14.00*	-12.00*	-10.00*	-8.00*	-6.00*	*
*	16	17	-27.87*	-25.54*	-23.22*	-21.00*	-19.20*	-17.00*	-21.00*	-22.00*	-21.00*	-19.20*	-17.00*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	18	19	-28.80*	-26.40*	-24.00*	-21.00*	-19.00*	-17.00*	-21.00*	-22.00*	-21.00*	-19.00*	-17.00*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	20	21	-29.47*	-27.01*	-24.56*	-22.10*	-19.64*	-17.19*	-22.10*	-24.56*	-22.10*	-19.64*	-17.19*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	22	23	-29.87*	-27.38*	-24.89*	-22.40*	-19.91*	-17.42*	-22.40*	-25.00*	-22.40*	-19.91*	-17.42*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	24	25	-30.07*	-27.50*	-25.00*	-22.50*	-20.00*	-17.50*	-22.50*	-25.00*	-22.50*	-19.00*	-17.50*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	26	27	-29.87*	-27.38*	-24.89*	-22.40*	-19.91*	-17.42*	-22.40*	-25.00*	-22.40*	-19.91*	-17.42*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	28	29	-29.47*	-27.01*	-24.56*	-22.10*	-19.64*	-17.19*	-22.10*	-24.56*	-22.10*	-19.64*	-17.19*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	30	31	-28.80*	-26.40*	-24.00*	-21.00*	-19.00*	-17.00*	-21.00*	-24.00*	-21.00*	-19.00*	-17.00*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	32	33	-27.87*	-25.54*	-23.22*	-21.00*	-19.20*	-17.00*	-21.00*	-24.00*	-21.00*	-19.20*	-17.00*	-15.00*	-13.00*	-11.00*	-9.00*	-7.00*	*
*	34	35	-26.67*	-24.44*	-22.22*	-20.00*	-18.56*	-16.26*	-20.00*	-23.00*	-20.00*	-18.56*	-16.26*	-14.00*	-12.00*	-10.00*	-8.00*	-6.00*	*
*	36	37	-25.20*	-23.10*	-21.00*	-19.56*	-17.60*	-15.64*	-21.00*	-24.00*	-21.00*	-19.56*	-17.60*	-15.64*	-13.69*	-11.73*	-9.78*	-7.02*	*
*	38	39	-24.47*	-19.68*	-17.89*	-15.00*	-12.00*	-9.00*	-17.89*	-21.00*	-19.68*	-17.89*	-15.00*	-12.00*	-9.00*	-6.00*	-3.00*	-0.00*	*
*	40	41	-23.87*	-19.20*	-16.67*	-14.00*	-11.00*	-8.00*	-19.20*	-23.00*	-19.20*	-16.67*	-14.00*	-11.00*	-8.00*	-5.00*	-2.00*	-0.00*	*
*	42	43	-23.47*	-19.00*	-15.28*	-13.00*	-10.00*	-7.00*	-19.00*	-23.00*	-19.00*	-15.28*	-13.00*	-10.00*	-7.00*	-4.00*	-1.00*	-0.00*	*
*	44	45	-22.87*	-17.60*	-14.00*	-11.00*	-8.00*	-5.00*	-17.60*	-21.00*	-17.60*	-14.00*	-11.00*	-8.00*	-5.00*	-2.00*	-1.00*	-0.00*	*
*	46	47	-22.47*	-17.00*	-13.89*	-11.00*	-8.00*	-5.00*	-17.00*	-21.00*	-17.00*	-13.89*	-11.00*	-8.00*	-5.00*	-2.00*	-1.00*	-0.00*	*
*	48	49	-21.47*	-12.71*	-10.00*	-7.00*	-4.00*	-1.00*	-12.71*	-16.00*	-12.71*	-10.00*	-7.00*	-4.00*	-1.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	*
*	50	51	-21.00*	-12.00*	-9.00*	-6.00*	-3.00*	-0.00*	-12.00*	-16.00*	-12.00*	-9.00*	-6.00*	-3.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	-0.00*	*

§ 9 .- Υπολογισμός τῶν κυρίων τάσεων σ_x, σ_y καὶ τῶν γωνιῶν

διευθύνσεων $\omega = (\hat{n}_1, x)$. Τό πρόγραμμα PRINCST.



Σχ.16

Μετά τόν προσδιορισμόν τῶν σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} εἰς ὅλα τά σημεῖα τοῦ καννάβου, ύπολογίζομεν τάς κυρίας τάσεις σ_1, σ_2 ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\alpha)$$

Ενθα $\sigma_1 > \sigma_2$, ἢτοι ἡ σ_1 εἶναι πάντοτε ἡ ἀλγεβρικῶς μεγαλυτέρα. Τάς ἐπίπεδα, ἐπί τῶν ὁποίων αἱ σ_1 καὶ σ_2 εἶναι κάθεται, καλοῦνται, ὡς γνωστόν, κύρια ἐπίπεδα. Τά διανύσματα n_1 καὶ n_2 (βλ. Σχ.16) κάθετα ἐπί τῶν κυρίων ἐπίπεδων καὶ μὲν φοράν πρός τό ἔξωτερικόν τοῦ ὀρθογωνικοῦ στοιχείου καθορίζουν τάς διευθύνσεις τῶν κυρίων τάσεων. Διά τόν προσδιορισμόν τῶν κυρίων διευθύνσεων ἀρκεῖ νά προσδιορισθῇ ἡ γωνία $\omega = (\hat{n}_1, x)$, τήν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἀξωνικός καὶ μετά τοῦ διανύσματος n_1 . Ή ἐτέρα κυρία διεύθυνσις εἶναι $\omega' = (\hat{n}_1, x) + \frac{\pi}{2}$.

Η γωνία (\hat{n}_1, x) δέδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\operatorname{tg} 2(\hat{n}_1, x) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\beta)$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προσδιορίζονται δύο τιμαὶ τῆς γωνίας (\hat{n}_1, x) διαφέρουσαι μεταξύ τῶν κατά $\frac{\pi}{2}$. Συνεπῶς ἡ σχέσις (β) δέν ἐπαρκεῖ διά τόν προσδιορισμόν τῆς γωνίας $\omega = (\hat{n}_1, x)$. Πρός τοῦτο χρη-

στιμοποιούμεν και τάς άκολουθους δύο σχέσεις:^{*}

$$\cos 2(\hat{n_1}, x) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (\gamma)$$

$$\sin 2(\hat{n_1}, x) = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (\delta)$$

Έκ τῶν σχέσεων τούτων συμπεραίνομεν, ότι τάς $\cos 2(\hat{n_1}, x)$ και $\sin 2(\hat{n_1}, x)$ είναι άντιστοί χως όμορφη πρόσ τάς ποσότητας $\sigma_x - \sigma_y$ και τ_{xy} .

Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης διά τόν προσδιορισμόν τῆς γωνίας $(\hat{n_1}, x)$ έργαζόμεθα ώς κατωτέρω:

Προσδιορίζομεν μίαν γωνίαν $0 \leq 2\omega_0 < \frac{\pi}{2}$ ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\operatorname{tg} 2\omega_0 = \frac{|2\tau_{xy}|}{|\sigma_x - \sigma_y|} \quad (\varepsilon)$$

και ἐν συνεχείᾳ διακρίνομεν τάς άκολουθους περιπτώσεις ἐπαληθευόμενας εύκολως ἐκ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

$$1. \quad \tau_{xy} \geq 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y > 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = 2\omega_0 \quad (\hat{n_1}, x) = \omega_0$$

$$2. \quad \tau_{xy} \geq 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y < 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = \pi - 2\omega_0 \quad (\hat{n_1}, x) = \frac{\pi}{2} - \omega_0$$

$$3. \quad \tau_{xy} < 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y < 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = \pi + 2\omega_0 \quad (\hat{n_1}, x) = \frac{\pi}{2} + \omega_0$$

$$4. \quad \tau_{xy} < 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y > 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = 2\pi - 2\omega_0 \quad (\hat{n_1}, x) = \pi - \omega_0$$

$$5. \quad \tau_{xy} > 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y = 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = \frac{\pi}{2} \quad (\hat{n_1}, x) = \frac{\pi}{4}$$

$$6. \quad \tau_{xy} < 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y = 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = \frac{3\pi}{2} \quad (\hat{n_1}, x) = \frac{3\pi}{4}$$

$$7. \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_x - \sigma_y = 0 \quad 2(\hat{n_1}, x) = (\hat{n_1}, x) = \text{ἀπροσδιόριστος}$$

Η περίπτωσις 7 δηλοῖ, ότι είς τό διευθύνσεις σημεῖον, δλαι αἱ διευθύνσεις είναι κύριαι και $\sigma_x - \sigma_y = \sigma_1 - \sigma_2$ ή $\sigma_1 = \sigma_2$, δηλαδή το

* [5] §1.7, σελ.20

σημείων είναι ίσοτροπον.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ως αὖτα ἐκτεθέντων συντάσσεται πρόγραμμα ήλεκτρονικοῦ ύπολογιστοῦ διά τὸν ύπολογισμὸν τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καὶ τῆς γωνίας $\omega = (\pi_1^{\wedge} x)$. Εἰς τό πρόγραμμα δίδεται τὸ δῆμα PRINCST.

Τό πρόγραμμα PRINCST ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ κυρίου μέρους αὐτοῦ καὶ τοῦ ύποπρογράμματος SHOW.

Τό πρόγραμμα ἔκτελετ τάς κατωτέρω ἐργασίας:

- 1.- 'Αναγιγνώσκει ἐκ τῶν δεδομένων τάς τιμάς $\sigma_x(i,j)$, $\sigma_y(i,j)$ καὶ $\tau_{xy}(i,j)$ τάς ύπολογισθεῖσας ἐκ τοῦ προγράμματος SOLAPEQ.
- 2.- 'Υπολογίζει τάς τιμάς $\sigma_1(i,j)$, $\sigma_2(i,j)$ καὶ $\omega(i,j)$ εἰς τά σημεῖα ἐνθα τό INDEX(i,j) $\neq 3$.
- 3.- 'Εκτυπώνει τάς τιμάς $\sigma_1(i,j)$, $\sigma_2(i,j)$, $\omega(i,j)$ τῇ κλήσει τοῦ ύποπρογράμματος SHOW.

Βεβαίως τό πρόγραμμα PRINCST δύναται νά ἀποτελέσῃ ύποπρόγραμμα τοῦ SOLAPEQ ὥστε τοῦτο 'νά ύπολογίζῃ καὶ τάς σ_1, σ_2 καὶ ω συγχρόνως μέ τάς σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} . Πλὴν ὅμως ἀπετέλεσεν ίδιαντερον πρόγραμμα πρός ἀποφυγήν μειώσεως τῆς δυναμικότητος τοῦ προγράμματος SOLAPEQ ἀναφορικῶς πρός τό πλῆθος τῶν σημείων τοῦ κανυάβου.

Κατωτέρω παρατίθεται τό πρόγραμμα PRINCST, ως τοῦτο ἔχρησιμο ποιηθῇ διά τὴν ἐφαρμογήν τῆς §10.

PROGRAM PRINCST

C PROGRAM PRINCST
DIMENSION SX(33,31),SY(33,31), TXY(33,31),S1(33,31),S2(33,31),
1OMEGA(33,31),INDEX(33,31)
COMMON/SH/KO,NX,NY
READ 100,NX,NY
100 FORMAT(2I3)
READ 101, ((SX(I,J),I=1,NX), J=1,NY)
READ 101, ((SY(I,J),I=1,NX), J=1,NY)
READ 101, ((TXY(I,J),I=1,NX), J=1,NY)
101 FORMAT(10F8.2/10F8.2/10F8.2/3F8.2)
C** FORMULATION OF THE MATRIX =INDEX=
DO 2 J=1,6
DO 2 I=1,22
2 INDEX(I,J)=3
DO 3 I=1,21
3 INDEX(I,7)=3
DO 4 I=1,20
4 INDEX(I,8)=3
DO 5 I=1,20
5 INDEX(I,22)=3
DO 6 I=1,21
6 INDEX(I,23)=3
DO 7 J=24,31
DO 7 I=1,22
7 INDEX(I,J)=3
DO 8 I=1,20
8 INDEX(I,9)=1
DO 9 J=1,6
9 INDEX(23,J)=1
DO 10 I=24,33
10 INDEX(I,1)=1
DO 11 J=2,31
11 INDEX(33,J)=1
DO 12 I=23,32
12 INDEX(I,31)=1
DO 13 J=24,30
13 INDEX(23,J)=1
DO 14 I=1,20
14 INDEX(I,21)=1
DO 15 J=10,20
15 INDEX(1,J)=1
INDEX(21,8)=2
INDEX(22,7)=2
INDEX(21,22)=2
INDEX(22,23)=2
INDEX(21,9)=4
INDEX(22,8)=4
INDEX(23,7)=4

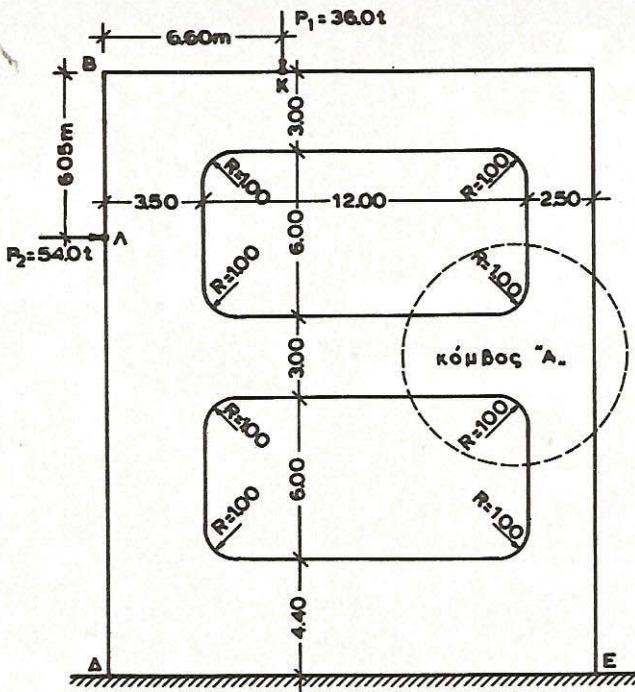
PROGRAM PRINCST

```
INDEX(21,21)=4
INDEX(22,22)=4
INDEX(23,23)=4
INDEX(22,9)=4
INDEX(23,8)=4
INDEX(22,21)=4
INDEX(23,22)=4
DO 16 J=1,NY
16 PRINT 501, (INDEX(I,J), I=1,NX)
501 FORMAT(1H ,33I1)
C** CALCULATION OF PRINCIPAL STRESSES
DO 302 J=1,NY
DO 302 I=1,NX
S1(I,J)=0.0
S2(I,J)=0.0
302 OMEGA(I,J)=0.0
DO 1 J=1,NY
DO 1 I=1,NX
IF( INDEX(I,J).EQ.3) GO TO 1
A=(SX(I,J)+SY(I,J))/2.
B=(SX(I,J)-SY(I,J))/2.
C=SQRT(B**2+TXY(I,J)**2)
S1(I,J)=A+C
S2(I,J)=A-C
1 CONTINUE
K0=5
CALL SHOW(INDEX,S1)
K0=6
CALL SHOW(INDEX,S2)
C** DIRECTION ANGLE OMEGA=(N1,X)
DO 303 J=1,NY
DO 303 I=1,NX
PI=3.14
IF( INDEX(I,J).EQ.3) GO TO 303
C=2.*TXY(I,J)
D=SX(I,J)-SY(I,J)
Z=0.0
IF(D.EQ.Z) GO TO 314
R=ATAN(ABS(C/D))
IF(C.GE.Z.AND.D.GT.Z) GO TO 310
IF(C.GE.Z.AND.D.LT.Z) GO TO 311
IF(C.LE.Z.AND.D.LT.Z) GO TO 312
IF(C.LE.Z.AND.D.GT.Z) GO TO 313
310 ANGLE=R
GO TO 20
311 ANGLE=PI-R
GO TO 20
312 ANGLE=PI+R
```

PROGRAM PRINCST

```
*****  
GO TO 20  
313 ANGLE=2.*PI-R  
      GO TO 20  
314 IF(C)315,316,317  
315 ANGLE=3.*PI/2.  
      GO TO 20  
316 ANGLE=8.*PI  
      GO TO 20  
317 ANGLE=PI/2.  
20 OMEGA(I,J)=90.*ANGLE/PI  
303 CONTINUE  
      KO=7  
      CALL SHOW(INDEX,OMEGA)  
      STOP  
      END
```

§10.- Έφαρμογή της μεθοδολογίας.

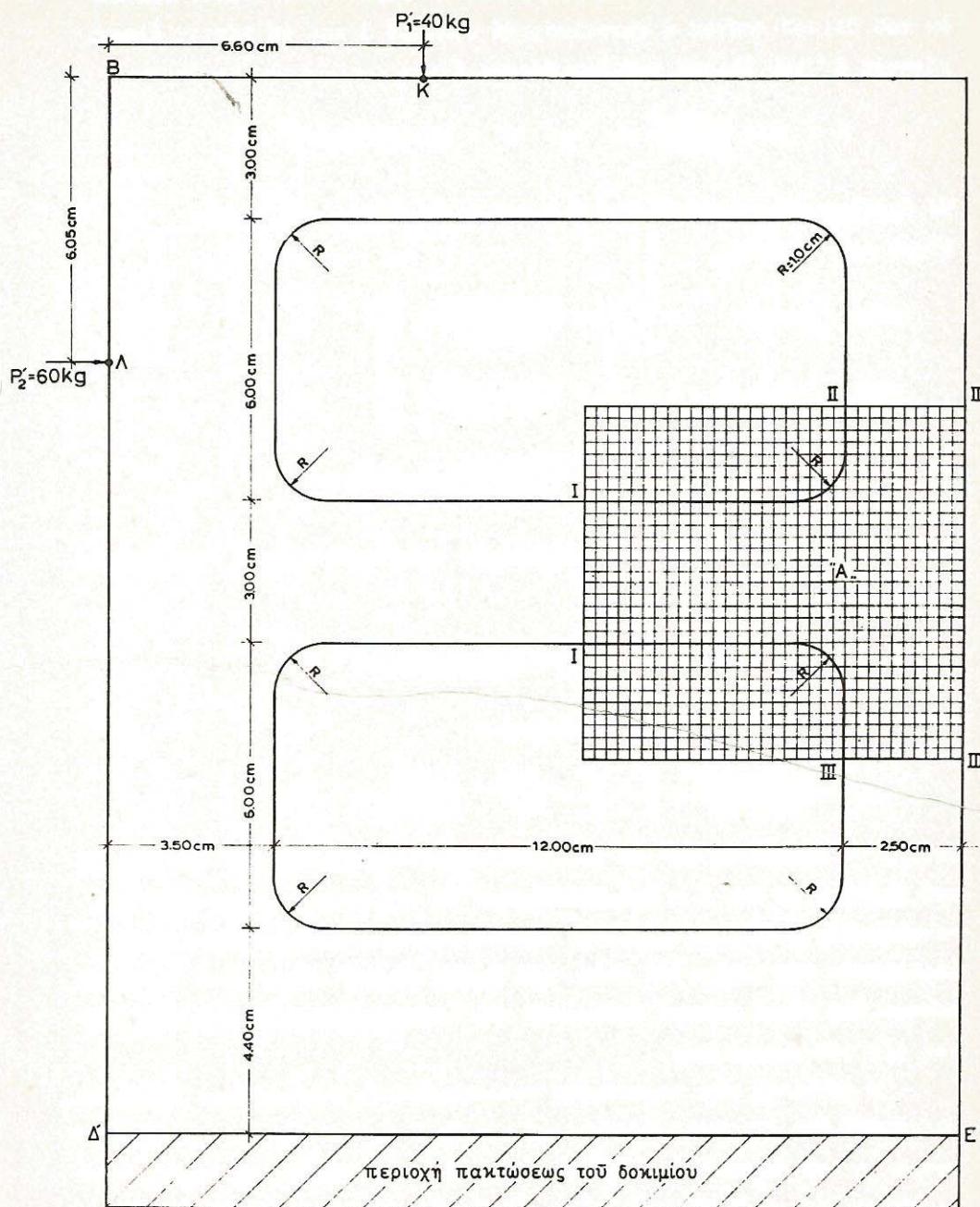


Σχ.17

'Ως παράδειγμα έφαρμογής της μεθοδολογίας θά μελετηθῇ ἡ ἔντασις του κόμβου "Α" τοῦ ἐν Σχ.17 ἐπιπέδου πλαισίου ἐξ ὀπλισμένου σκυροδέματος πάχους $d = 0.30\text{m}$. 'Ως γνωστόν, εἰς τὴν περιοχήν τοῦ κόμβου δέν ίσχουν αἱ παραδοχαὶ τῆς στατικῆς τῶν ραβδωτῶν φορέων, ἢ δέ εἰς αὐτὸν ἀναπτυσσομένη ἔντασις ὡς καὶ μιᾶς περιοχῆς πέριξ αὐτοῦ, εἴναι ἔντασις ἐπιπέδου δίσκου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἔντάσεως ἐντός τοῦ κόμβου, ἀπομονώται οὗτος ἐκ τοῦ ὑπολοίπου φορέως (Σχ.30) καὶ προσδιορίζονται αἱ παραμέτροι τῆς ἔντάσεως σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} εἰς τὸ σύνορον τοῦ προκύπτοντος δίσκου.

I.- Φωτοελαστικόν πείραμα

'Ο προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τῆς ἔντάσεως εἰς τὸ σύνορον ἐγένετο πειραματικῶς τῇ βοηθείᾳ τῆς φωτοελαστικῆς μεθόδου. Πρός τοῦτο κατεσκευάσθη ὅμοιώματα τῆς ἐν Σχ.17 κατασκευῆς. 'Ως ύλικόν τοῦ ὅμοιώματος προεκρίθη τὸ Araldit B, λόγῳ τῶν καλῶν φωτοελαστικῶν ἴδιοτήτων του, παρεχόμενον εἰς πλάκας περίπου $50 \times 60 \text{ cm}$, πάχους $d' = 1\text{cm}$



Σχ.18. Όμοιώματα. Εντός τοῦ κανυάβου ή έξεταζομένη περιοχή τοῦ κόμβου "Α".

Τῇ βοηθείᾳ είδικής συσκευής έμετρήθη ἐπί προτύπου δοκιμίου 2x11cm ἐκ του ύλικου τούτου ἢ φωτοελαστική σταθερά S καὶ τό μέτρον ἐλαστικότητος E' του ύλικου του διοικώματος, ἵνα:

$$S = 10.0 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{τάξιν}} \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad E' = 32.500 \text{ kg/cm}^2$$

Τό διοίκωμα κατεσκευάσθη ὑπό κλίμακα 1:100 βάσει του Σχ.18.

Εἶναι κατά ταῦτα:

$$\text{Κλῖμαξ μηκῶν: } \lambda = \frac{1}{l} = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{διοίκωμα}} = \frac{100}{1}$$

$$\text{Κλῖμαξ πάχους: } t = \frac{d}{l} = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{διοίκωμα}} = \frac{30}{1}$$

$$\text{Λαμβάνεται κλίμαξ τάσεων: } \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{διοίκωμα}} = 0.30$$

ὅπότε ἡ κλίμαξ δυνάμεων ρ ύπολογίζεται κατά τοὺς νόμους τῆς μηχανικῆς διοίκητος [4]:

$$P = \frac{P'}{P'} = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{διοίκωμα}} = \frac{\sigma}{\sigma'} \lambda t = 0.30 \cdot 100 \cdot 30 = 900$$

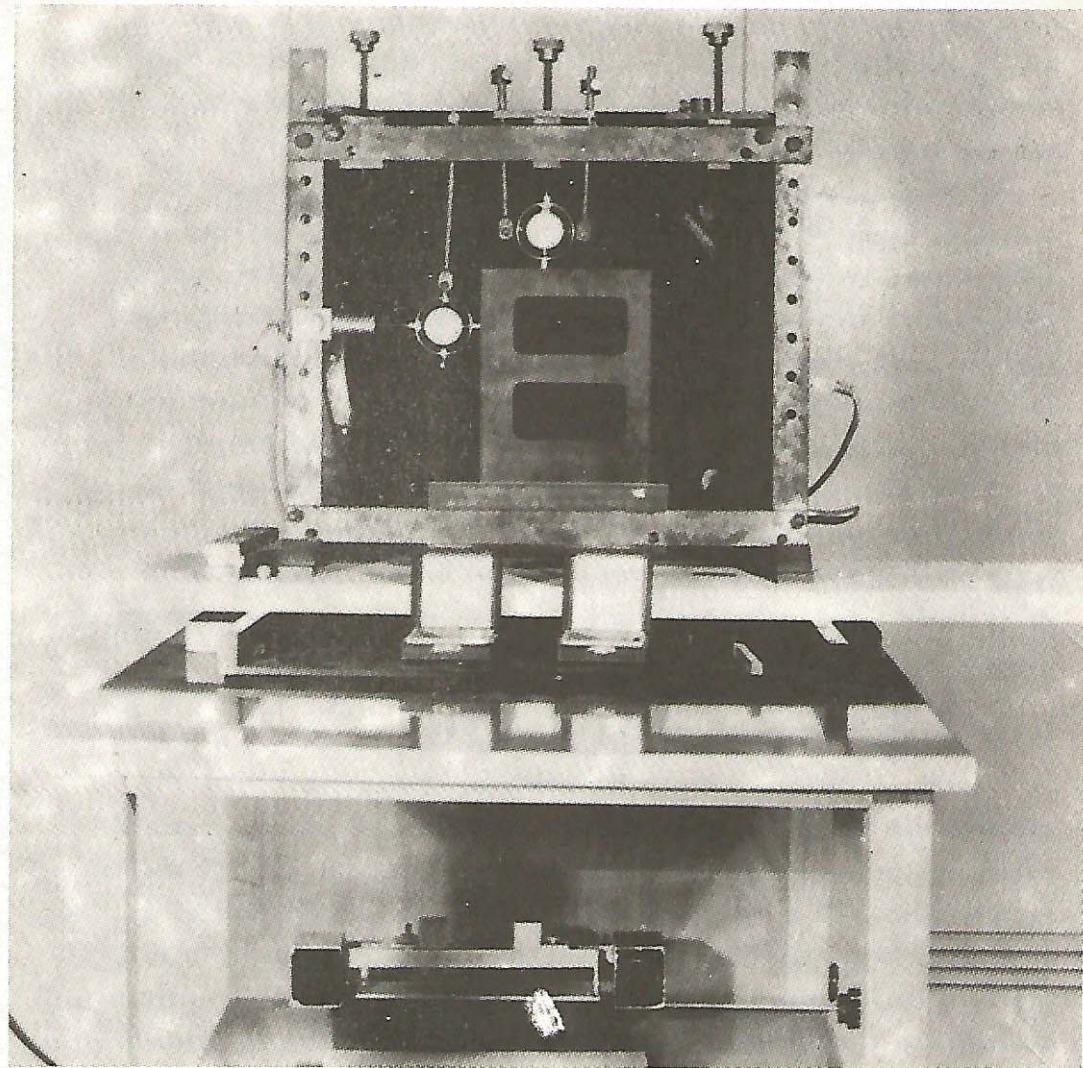
καὶ περαιτέρω ἡ κλίμαξ παραμορφώσεων:

$$\lambda_1 = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{διοίκωμα}} = \frac{P}{t} \cdot \frac{E'}{E} = \frac{900}{30} \cdot \frac{32500}{210000} = 4.647$$

Ἐνθα E' = 32.500 kg/cm² τό μετρηθέν μέτρον ἐλαστικότητος του ύλικου του διοίκωματος καὶ E = 210.000 kg/cm² τό του σκυροδέματος B225 τῆς κατασκευῆς, τό ὅποῖον θεωρεῖται ὡς ύλικόν διοίκησης, ἴσστροπον καὶ ἀκολουθοῦν τόν γραμμικόν νόμον του Hooke μεταξύ τάσεων καὶ παραμορφώσεων, ἵνα εἶναι δυνατή ἡ ἀναγωγή τῶν ἀποτελεσμάτων ἐκ του πειράματος εἰς τὴν κατασκευήν.

'Η φόρτισις τῆς κατασκευῆς συνισταμένη ἐκ δύο φορτίων P₁=36.0t καὶ P₂=54.0t. Ἐφαρμοζομένων εἰς τά σημεῖα K καὶ L τῆς κατασκευῆς ἀπέχοντα ἐκ του σημείου B ἀποστάσεις 6.60m καὶ 6.05m ἀντιστοίχως, μεταφράζεται, βάσει τῆς ἀνωτέρω κλίμακος δυνάμεων, ἐν τῷ διοίκωματι εἰς δύο φορτία:

$$P'_1 = 36.000:900 = 40kg, \quad P'_2 = 54.000:900 = 60kg. \quad (\beta\lambda.\Sigma\chi.18)$$



Σχ.19. Η πειραματική διάταξις.

Διά τήν ἐπιβολήν τοῦ ὡς αὖτε ἔξωτερικοῦ συστήματος δυνάμεων ἐπί τοῦ ὁμοιώματος ἐφηρμόσθη ἢ εἰς τήν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.19 εἰκονιζόμενη πειραματική διάταξις. Τό δοκίμιον στερεοῦται κατά τήν διατομήν Δ' Ε' ἐντός τοῦ αὐλακού τοῦ κοχλιωτοῦ συσφιγκτῆρος προσηρμοσμένου ἐπί τοῦ πλαισίου φορτίσεως, ὥστε νά πραγματοποιήται ἡ συνθήκη στηρίξεως τοῦ δοκιμίου (πάκτωσις κατά τήν διατομήν Δ' Ε'). Τά φορτία P_1 καί P_2 ἐπιβάλλονται ἐπί τοῦ δοκιμίου ὑπό τῶν ἀκίδων τῶν δύο δυναμομέτρων ἀνηρημένων εἰς τό στερεόν πλαίσιον, διά καταλήλου ρυθμίσεως τοῦ περικοχλίου.

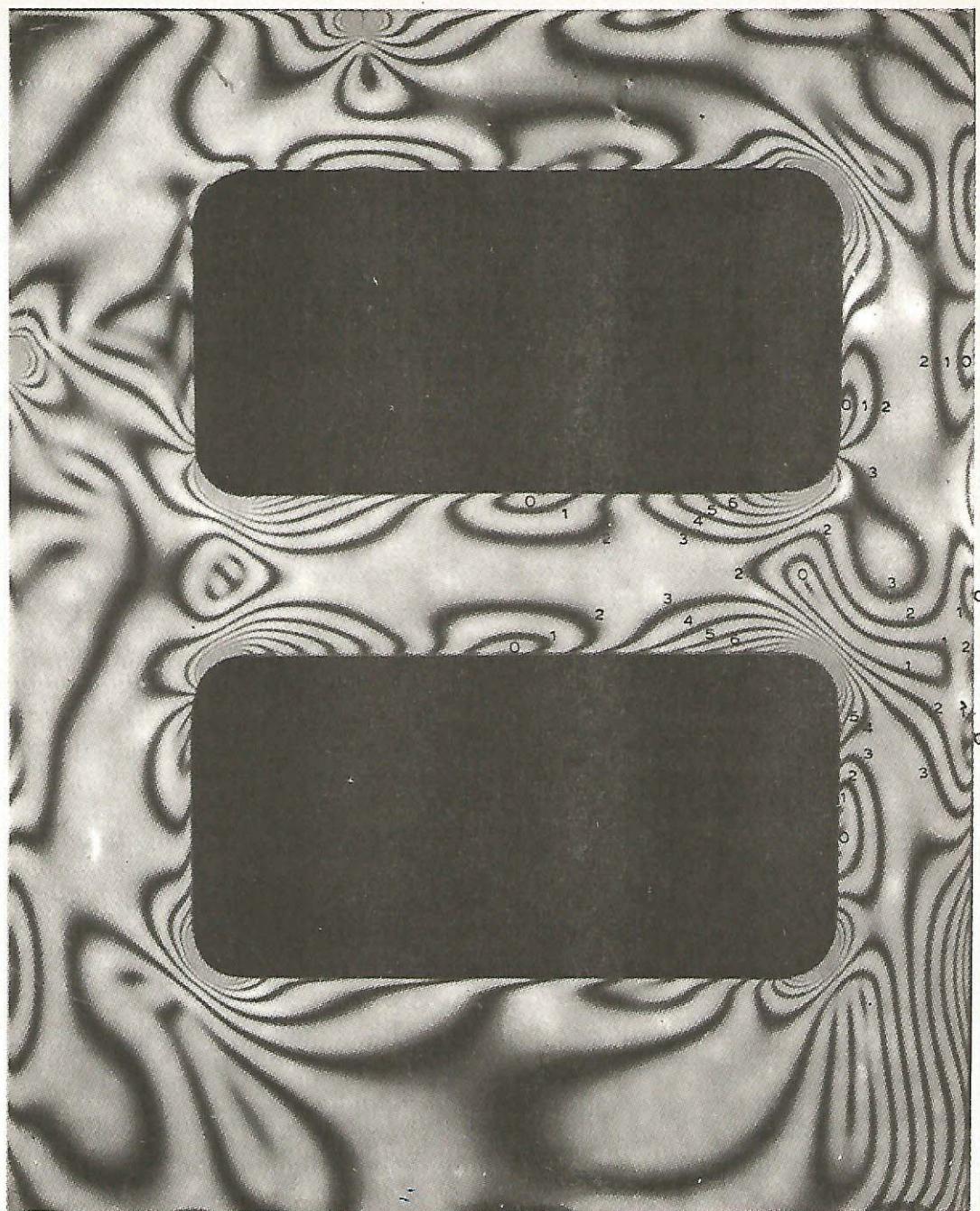
Τό φορτίσμενον ὁμοίωμα ἐτοποθετήθη μεταξύ τῶν ἐν διασταυρώσει πολωτικῶν ἡθμῶν τῆς φωτοελαστικῆς συσκευῆς. Μέχρισιν ἀρχικῶς λευκοῦ καί κατόπιν κιτρίνου φωτός καί μέ παρεμβολήν ἡθμῶν 1/4 μήκους κύματος πρός ἐπίτευξιν κυκλικῆς πολάσεως τοῦ ἐπί τοῦ ὁμοιώματος προσπίπτοντος φωτός (ἀπαλοιφή τῶν ἰσοκλινῶν), ἐλήφθη τό δίκτυον τῶν ἰσοχρώμων ἀκεραίας τάξεως (σκοτεινόν πεδίον) ὡς εἰς τήν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.20. Αἱ μετρηθεῖσαι προσεκτικῶς τάξεις τῆς περιοχῆς τοῦ κόμβου Α ἀνεγράφησαν ἐπί τῆς φωτογραφίας. Ἐν συνεχείᾳ ἐλήφθη τό δίκτυον τῶν ἰσοχρώμων ἡμιακεραίας τάξεως (φωτεινόν πεδίον), ἐμφαινόμενον μετ' ἀναγραφῆς τῶν τάξεων, εἰς τήν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.21. Τό δίκτυον τοῦτο παρήχθη διά χρησιμοποιήσεως ἐνός 3ου ἡθμοῦ 1/4 μήκους κύματος, παρεμβληθέντος μεταξύ ὁμοιώματος καί ἀναλότου.

II.- 'Αξιοποίησις τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος.

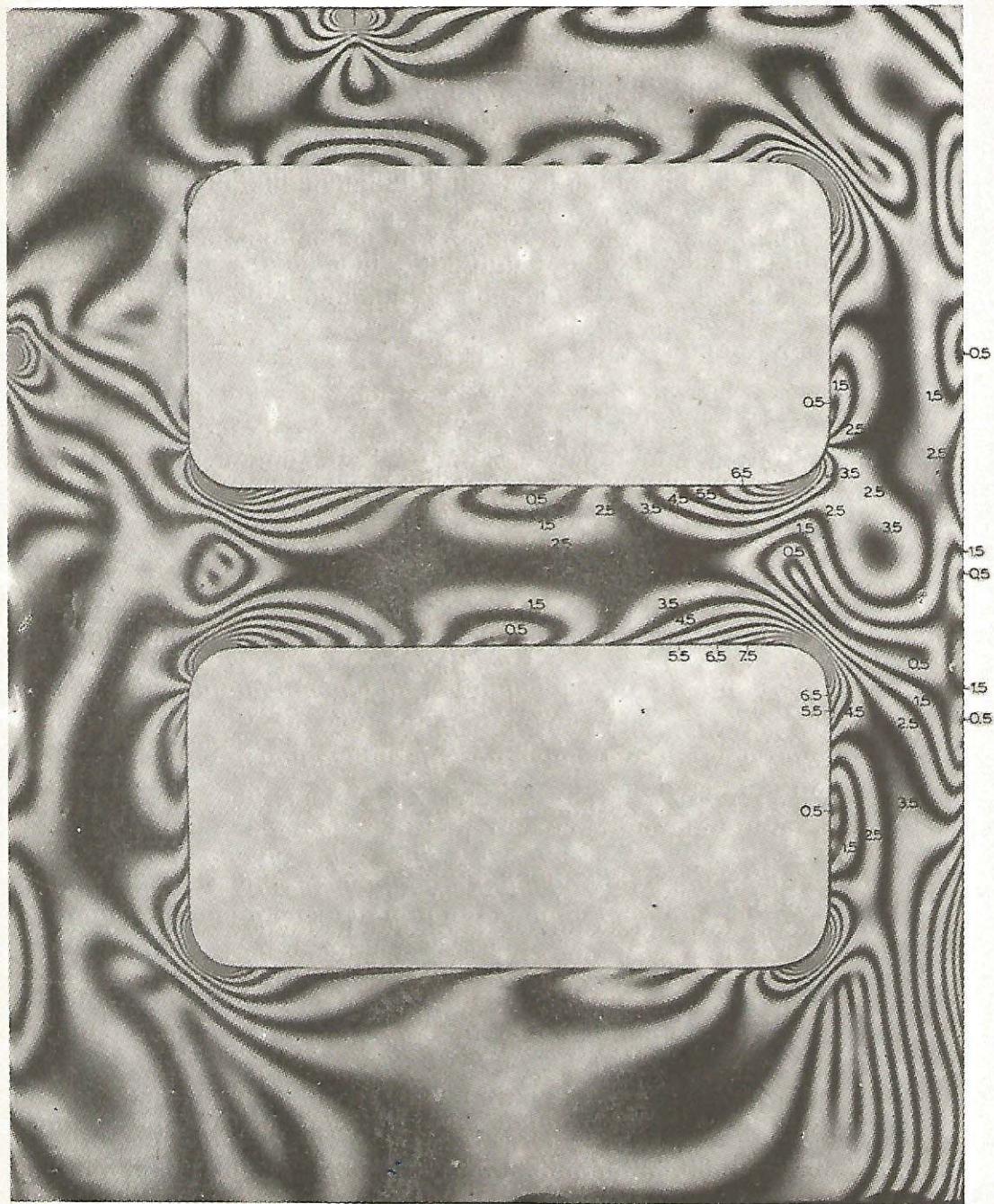
Ἐν τοῖς ἐπομένοις διά τοῦ ὅρου "δίσκος" θά ἐννοεῖται ἡ ἐντός τοῦ καννάβου τοῦ Σχ.18 περιοχή τοῦ κόμβου "A", ἕτοι τό τμῆμα τοῦ πλαισίου τό περιοριζόμενον μεταξύ τῶν διατομῶν I-I, II-II, III-III καί τοῦ συνόρου αύτοῦ. Ο προσδιορισμός τῶν τάξεων εἰς τό ἐλεύθερον σύνθρον τοῦ δίσκου εἶναι λίαν εὔκολος ἐκ τῆς τάξεως τῶν ἰσοχρώμων τῶν καταληγούσῶν εἰς τό σύνυρον. Συμφώνως πρός τόν φωτοτασεομετρικόν νόμον, ἡ διαφορά τῶν κυρίων τάξεων $|\sigma_1 - \sigma_2|$ εἰς τό τυχόν σημεῖον τοῦ ὁμοιώματος δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{S}{d} \cdot \delta$$

ἔνθα S ἡ φωτοελαστική σταθερά, ἵστη ἐν προκειμένῳ πρός $10.0 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \text{cm}$, d τό πάχος τοῦ δοκιμίου, ἵσον πρός 1.0cm , καί δ ἡ τάξης τῆς διά τοῦ



Σχ.20. Όμοιωμα ARALDIT. Δίκτυον ισοχρώμων. Τάξεις ἀκέραιατ.



Σχ.21. Όμοιά Araldit. Δίκτυον ισοχρώμων. Τάξεις ήμιτακέραται.

σημείου διερχομένης ίσοχρώμου. Διά τά σημεῖα τοῦ ἐλευθέρου συνόρου τοῦ δίσκου ἡ διατμητική τάσις παραλλήλως πρός αὐτό εἶναι μηδενική, ἀρα αἱ κύριαι τάσεις εἰς τά σημεῖα τοῦ συνόρου ἔχουν διευθύνσεις τὴν παράλληλον καὶ τὴν καθετὸν πρός τό σύνορον. Πλήν δὲ μηδενική καθετος πρός τό σύνορον τάσις εἶναι μηδενική καὶ μόνον ἡ παράλληλος πρός τό σύνορον ὁρθή τάσις ἔχει μέγεθος διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τά σημεῖα ἀρα τοῦ ἀφορτίστου συνόρου ἡ διαφορά τῶν τιμῶν τῶν κυρίων τάσεων ίσοπται πρός τὴν τιμήν τῆς ὁρθῆς τάσεως παραλλήλως πρός τό σύνορον, ἥτοι :

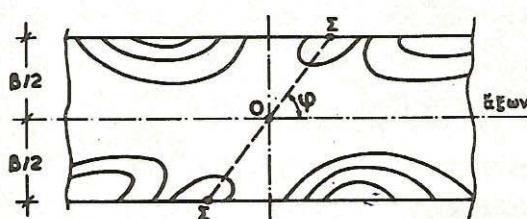
$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma_1| = \frac{S}{d} \cdot \delta$$

'Η ἀνωτέρω σχέσις δίδει τὴν ἀπόλυτον τιμήν τῆς ὁρθῆς τάσεως εἰς τό σύνορον τοῦ δίσκου. 'Η διαπίστωσις τοῦ προσήμου τῆς ὁρθῆς τάσεως εἰς τό περίγραμμα γίνεται διά τῆς "Δοκιμῆς τῆς Βελόνης". 'Επιφέροντες διά μιᾶς βελόνης ἑλαφράν πίεσιν καθέτως πρός τό σύνορον, προσδιορίζομεν εύκολως τό πρόσημον τῆς ὁρθῆς τάσεως εἰς τό σύνορον ἐκ τοῦ εἴδους τῆς ἀλοιώσεως τῶν ίσοχρώμων εἰς τὴν περιοχήν τοῦ ἔξεταζομένου σημείου. 'Εκ τῶν ὁρθῶν τάσεων εἰς τό ἐλεύθερον σύνορον θά προσδιορίσθοιν αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ εἰς τοῦτο κατά τρόπον ἐκτιθέμενον εἰς τό ἐδάφιον (III).

Διά τόν προσδιορισμόν τῶν τάσεων εἰς τάς διατομάς I-I, II-II καὶ III-III (σύνορα τοῦ δίσκου) ἐφαρμόζεται ἐτέρα μεθοδολογία βασιζομένη ἐπί παρατηρήσεων τῆς φωτοδιαγνωστικῆς μεθόδου. Αἱ διατομαὶ I-I, II-II καὶ III-III ἐπελέγησαν σκοπίμως πλησίον περιοχῶν, ὅπου τό δίκτυον ίσοχρώμων παρουσιάζει μέλαν χαρακτηριστικήν ἀντιμετρίαν (βλ. Σχ.

20) τῆς μορφῆς τοῦ Σχ.22.

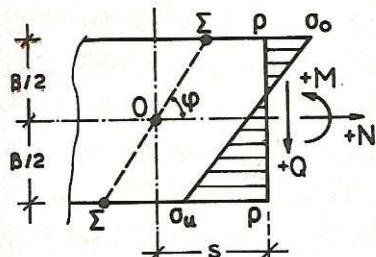
Τοῦτο σημαίνει [4], ὅτι εἰς τάς περιοχάς αὐτάς ίσχυει ἡ γραμμική κατανομή τῶν ὁρθῶν τάσεων καὶ ἡ παραβολική κατανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων, αἱ δέ ὁρθαὶ τάσεις καθέτως πρός τόν ἄξονα τῆς ράβδου ἔχουν μηδενικήν τιμήν.



Σχ.22. 'Αντιμετρία τοῦ δικτύου ίσοχρώμων. Ο τό σημεῖον μηδενινισμοῦ τῆς ροπῆς.

Είς τήν διά τοῦ Ο διερχομένην διατομήν τῆς ράβδου ἡ ροπή κάμφεως εἶναι ἵση πρός μηδέν. Εἶναι δέ τό Ο ἡ τομή τοῦ ἄξονος τῆς ράβδου μετά τῆς εύθειας τῆς συνδεούσης τά σημεῖα Σ, εἰς τά δύο οὖτα ἡ τάξις τῆς ίσοχρώμου εἶναι μηδενική. Τά σημεῖα ταῦτα προσδιορίζονται εύκολως, καθ' ὃσον ἐμφανίζονται μελανά εἰς τό δίκτυον τῶν ίσοχρώμων ἀκεραίας τάξεως τό παραγόμενον διά λευκοῦ φωτός.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, ἐάν σ₀ καί σ_u εἶναι αἱ ὄρθαι τάσεις εἰς τό ἄνω καί κάτω σύνορον τῆς ράβδου εἰς τήν θέσιν μιᾶς διατομῆς (π.χ. τῆς ρ-ρ τοῦ Σχ. 23), τότε ἡ κατανομή τῶν ὄρθων τάσεων θά εἶναι ὡς ἐν Σχ. 23.



Σχ.23. Κατανομή τῶν ὄρθων καί διατομητικῶν τάσεων εἰς διατομήν πλησίον τοῦ σημείου μηδενισμοῦ τῆς ροπῆς κάμφεως.

Ἡ ροπή κάμφεως καί ἡ ὄρθη δύναμις τῆς διατομῆς πάχους d' (= 1) ὑπολογίζονται ὀμέσως ἐκ τῶν σχέσεων:

$$N = \frac{\sigma_0 + \sigma_u}{2} F \quad (26\alpha, \beta)$$

$$M = \frac{\sigma_u - \sigma_0}{2} W$$

Ἐνθα $F = \beta d'$ ἡ διατομή τῆς ράβδου καί $W = \frac{d\beta^2}{6}$ ἡ ροπή ἀντιστάσεως τῆς διατομῆς.

Ἡ τέμνουσα δύναμις Q τῆς διατομῆς ρ-ρ κατόπιν τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν N καί M δύναται νά ὑπολογισθῇ κατά δύο τρόπους. Εἴτε ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως [4]:

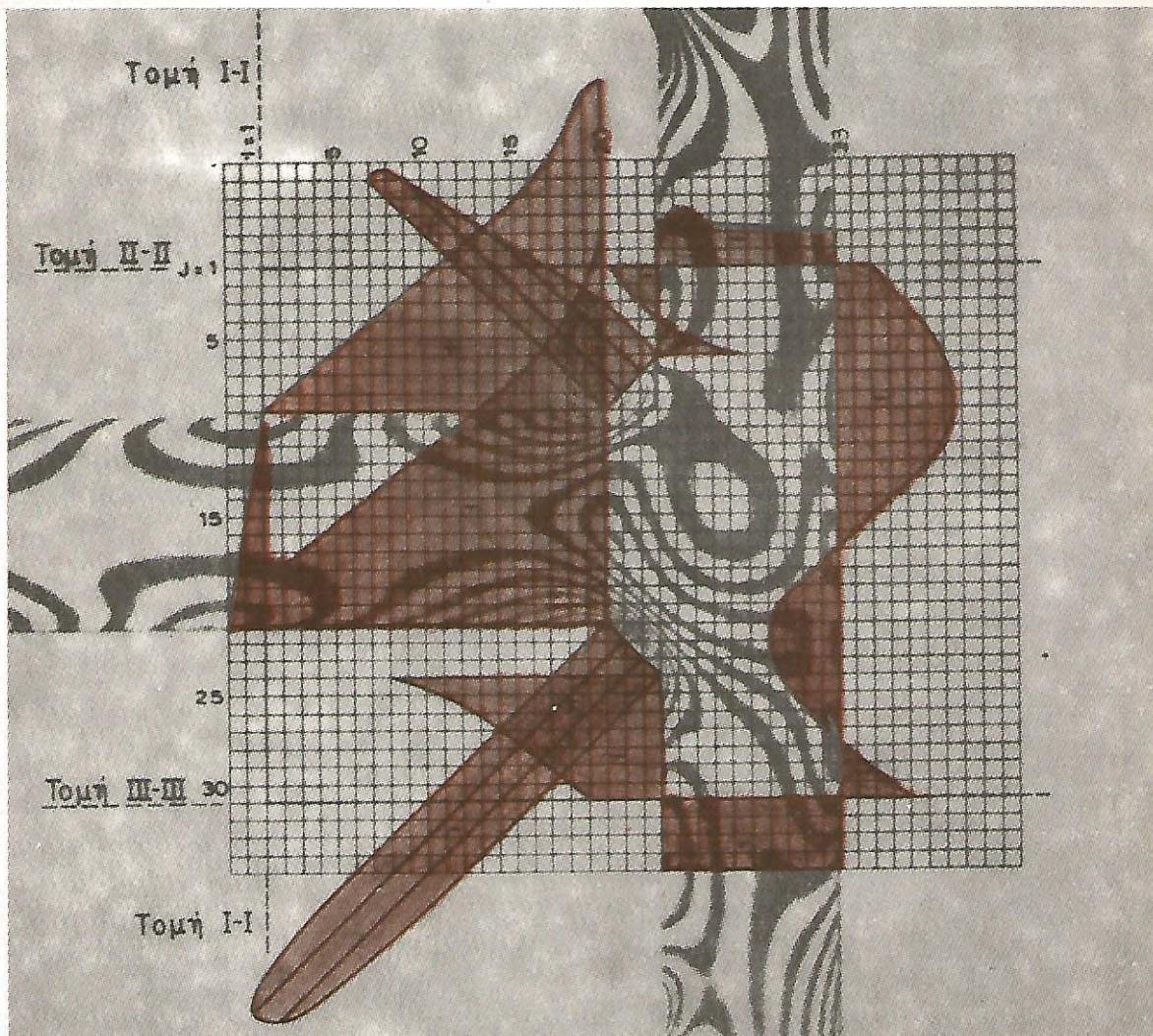
$$\operatorname{ctg}\phi = \frac{N}{3Q} \quad (27)$$

Ἐνθα ϕ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπό τῆς ΣΣ καί τοῦ ἄξονος τῆς ράβδου, εἴτε ἐκ τῆς σχέσεως:

$$Q = \frac{M}{S} \quad (28)$$

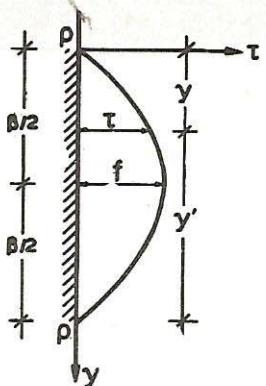
Ἐνθα S ἡ ἀπόστασις τῆς διατομῆς ρ-ρ ἀπό τό σημεῖον O .

Ἡ σχέσις (28) εἶναι προφανής, ἐάν ληφθῇ ὑπὸδψιν ὅτι ἡ ροπή κάμφεως εἰς τήν διατομήν τήν διά τοῦ Ο διερχομένην ἔχει μηδενική τιμήν. Ἐπειδὴ αἱ σχέσις (27) & (28) προκύπτουν ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, ὑπολογίζεται ἡ Q ἐκ τῆς μιᾶς τῶν σχέσεων τούτων, τῆς ἐτέρας χρησιμοποιουμένης διά τόν ἔλεγχον τοῦ ὑπολογισμοῦ. Γνωστής οὖσης πλέον τῆς Q ,



Σχ. 24. Διαγράμματα κυρίων τάσεων ἐπὶ τοῦ
έλευθέρου συνόρου καὶ ὁρθῶν τάσεων
ἐπὶ τῶν τομῶν I-I, II-II, III-III.

ύπολογίζονται αἱ διατατικαὶ τάσεις τῆς διατομῆς, βάσει τῆς παραβολικῆς κατανομῆς.



$$Q = \text{έμβαδόν της παραβολῆς}$$

$$Q = \frac{2}{3} f \beta \Rightarrow f = \frac{3}{2} \frac{Q}{\beta}$$

$$\tau = \frac{4f}{\beta^2} yy'$$

$$\text{ή } \tau = 6 \frac{Q}{\beta^3} yy' \quad (29)$$

Σχ.25

Δι ἑφαρμογῆς πλέον τῶν σχέσεων (26α,β),(27) καὶ (28) ύπολογίζονται τὰ ἐντατικά μεγέθη τῶν διατομῶν I-I, II-II καὶ III-III. Αἱ σ_u καὶ σ_o λαμβάνονται ἐκ τῶν διαγραμμάτων τοῦ Σχ.24.

Διατομὴ I-I:

$$\sigma_u = -1.035 \times 10 = -5.17 \times \frac{10.0}{5} = -10.35 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = -0.02 \times 10 = +0.10 \times \frac{10.0}{5} = +0.20 \quad "$$

$$\operatorname{ctg} = \frac{0.34}{1.5} = 0.227$$

$$F = 1.0 \times 3.0 = 3.0 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{1.0 \times 3.0^2}{6} = 1.5 \text{ cm}^3$$

$$N = \frac{-10.35 + 0.20}{2} \times 3 = -15.2 \text{ kg}$$

$$M = \frac{-10.35 - 0.20}{2} \times 1.5 = -7.6 \text{ kg cm}$$

$$Q = \frac{-15.2}{3 \times 0.227} = -22.3 \text{ kg}$$

$$s = \frac{-7.6}{-22.3} = 0.34 \text{ cm} \quad (\text{έλεγχος})$$

Διατομή II-II:

$$\sigma_u = -1.3 \times 10 = -6.50 \times \frac{10.0}{5} = -13.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = -1.0 \times 10 = -5.00 \times \frac{10.0}{5} = -10.0 \text{ "}$$

$$\operatorname{ctg} = -\frac{0.75}{1.25} = 0.60$$

$$F = 1.0 \times 2.5 = 2.5 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{1.0 \times 2.5^2}{6} = 1.04 \text{ cm}^3$$

$$N = \frac{-13.00 - 10.00}{2} \times 2.5 = -28.7 \text{ kg}$$

$$M = \frac{-13.00 - (-10.00)}{2} \times 1.04 = -1.63 \text{ kg cm}$$

$$Q = \frac{-28.7}{-3 \times 0.60} = 15.9 \text{ kg}$$

$$s = \frac{-1.63}{15.9} = -0.10 \text{ cm} \quad (\text{ελεγχος})$$

Διατομή III-III:

$$\sigma_u = -2.0 \times 10 = -10.00 \times \frac{10.0}{5} = -20.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = -1.9 \times 10 = -9.50 \times \frac{10.0}{5} = -19.0 \text{ "}$$

$$\operatorname{ctg} = -\frac{0.70}{1.25} = -0.56$$

$$F = 1.0 \times 2.5 = 2.5 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{1.0 \times 2.5^2}{6} = 1.04 \text{ cm}^3$$

$$N = \frac{-20.0 - 19.0}{2} \times 2.5 = -48.8 \text{ kg}$$

$$M = \frac{-20.0 - (-19.0)}{2} \times 1.04 = -0.52 \text{ kg cm}$$

$$Q = \frac{-48.8}{-3 \times 0.56} = 29.0 \text{ kg}$$

$$s = \frac{-0.52}{29.0} \approx -0.0 \text{ cm} \quad (\text{ελεγχος})$$

Τά ουτώς ύπολογισθέντα έντατικά μεγέθη τῶν διατομῶν I-I, II-II και' III-III ἀποτελοῦν τήν ἐξωτερικήν φόρτισιν του δίσκου του κόνιμου,

καί ώς ἐκ τούτου δέον ταῦτα νά ἀποτελοῦν ἴσορροπον σύστημα δυνάμεων. Πρός εἰλεγχον ἐλέγχεται κατωτέρω ἢ ἴσορροπία τῶν δυνάμεων τούτων.

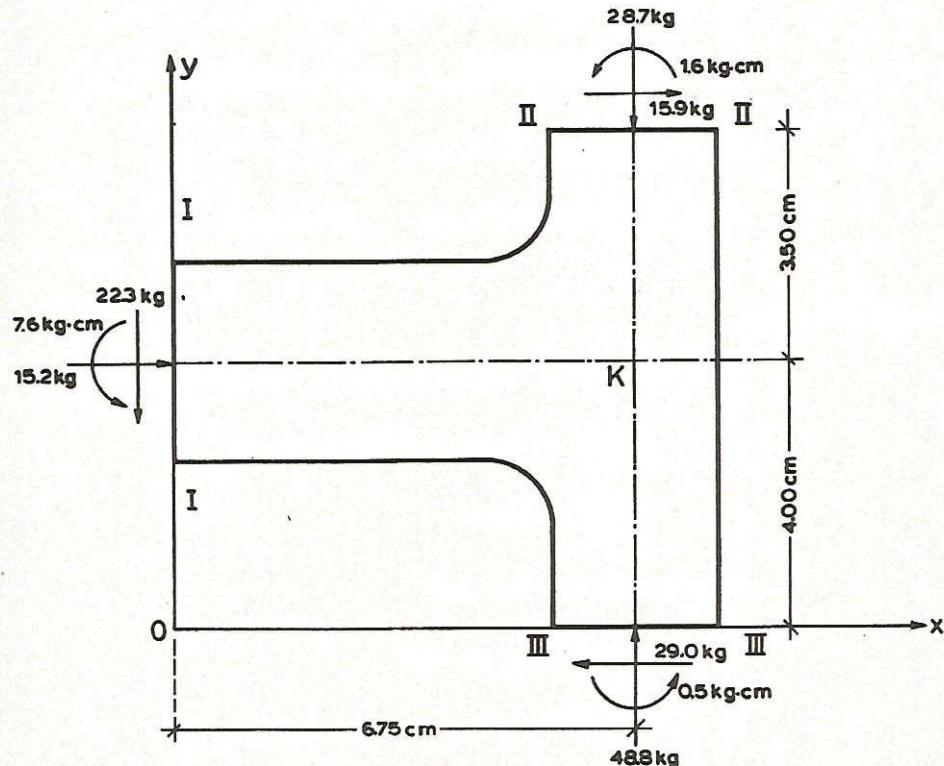
'Εκ τοῦ Σχ.26 ἔχομεν:

$$\text{προβολαὶ ἐπὶ τοῦ οχ} \quad \Sigma X = 15.2 + 15.9 - 29.0 = +2.1 \text{ kg} \approx 0$$

$$\text{προβολαὶ ἐπὶ τοῦ ογ} \quad \Sigma Y = -22.3 - 28.7 + 48.8 = -2.2 \text{ kg} \approx 0$$

$$\text{ροικαὶ ώς πρός K} \quad \Sigma M = -7.6 - 22.3 \times 6.75 - 1.6 + 15.9 \times 3.5 +$$

$$+ 29.0 \times 4.0 - 0.5 = +11.4 \text{ kg cm} \approx 0$$



Σχ.26

'Η ἀνωτέρω ἴσορροπία τοῦ κόμβου δέον νά θεωρηθῇ ώς ἵκανοποιητική, ἀν ληφθῆ ὑπὸδψιν, δτι αἱ τιμαὶ ἐλήφθησαν πειραματικῶς καί δή το ἡ : 10.0 αὐτῶν (ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὴν φωτοελαστικήν σταθεράν $S = 10.0 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ τάξιν).

III.- Υπολογισμός τῶν τάσεων εἰς τὸ σύνορον.

Αἱ εἰς τὸν ύπολογισμόν εἰσαγόμεναι παράμετροι τῆς ἐντάσεως προσημαίνονται βάσει τῆς ιλασσικῆς σημάνσεως τῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος (παραδοχὴ 4,§1).

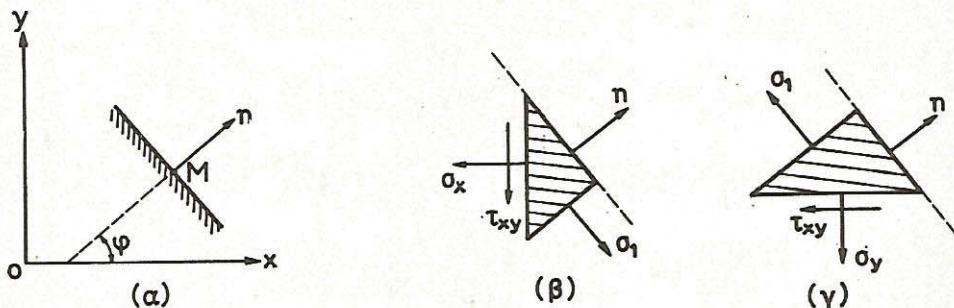
Οὕτω βάσει τῆς ἀνωτέρω σημάνσεως αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐντάσεως τῶν διατομῶν I-I, II-II καὶ III-III προσημαίνονται ἀναλόγως πρὸς τὸν προσανατολισμόν τῶν διατομῶν τοῦτων ὡς πρὸς τὸ ἐπιλεγόμενον σύστημα ἀξόνων οὐκ. Διὰ τὰς ὅρθας τάσεις ἐπὶ ἐλευθέρων συνόρων παραλλήλων ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων θά εἶναι:

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad \text{ὅταν τὸ σύνορον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν } x$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \quad \text{ὅταν τὸ σύνορον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν } y$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις.}$$

Όταν δῆμος τὸ σύνορον εἶναι κεκλιμένον ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων ($\Sigma\chi.27\alpha$), τότε αἱ σ_x , σ_y , τ_{xy} εἰς τὸ σύνορον ύπολογίζονται ὡς κατωτέρω:



Σχ.27

Ἐστω π τὸ κάθετον διάνυσμα ἐπὶ τοῦ συνόρου καὶ μὲν φοράν πρὸς τὸ ἐξωτερικόν τοῦ δίσκου καὶ $\phi = (\hat{x}\hat{y})$ ἡ γωνία που σχηματίζει ὁ θετικός ἥμισος ὀχ μὲ τὸ π. Ἐπὶ τοῦ συνόρου ὑπάρχει μόνον ἡ κυρία τάσις σ₁ παραλλήλως πρὸς αὐτό. Ἐκ τῆς ἴσορροπίας τῶν στοιχείων ($\Sigma\chi.27\beta$ καὶ 27γ) περιλαμβανόντων τὸ σημεῖον M λαμβάνομεν:

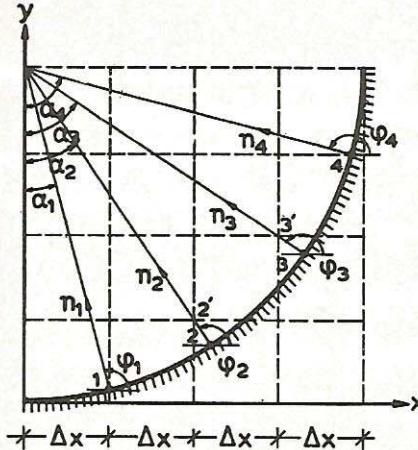
$$\sigma_x = \sigma_1 \sin^2 \phi$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2 \phi$$

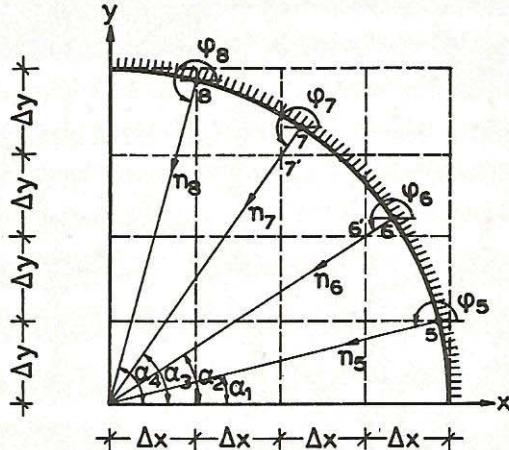
$$\tau_{xy} = -\sigma_1 \sin \phi \cos \phi$$

(30)

Διά τόν ύπολογισμόν τῶν σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} εἰς τά καμπύλα τμῆματα τοῦ συνδρού θά ἐφαρμοσθοῦν αἱ σχέσεις (30). Αρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὑπογισθοῦν τὰ $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ τῶν σημείων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 τῶν κυκλικῶν τόξων.



$\Sigma X.28$



$\Sigma X.29$

Οὕτω ἐκ τῶν 28 καὶ 29 ἔχομεν:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{0.25}{1.00} = 0.250 \quad \alpha_1 = 14.1^\circ$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{0.50}{0.75} = 0.667 \quad \alpha_2 = 33.7^\circ$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{0.75}{0.50} = 1.500 \quad \alpha_3 = 56.3^\circ$$

$$\operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{1.00}{0.25} = 4.000 \quad \alpha_4 = 75.9^\circ$$

καὶ

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \quad \sin\varphi_1 = 0.970 \quad \cos\varphi_1 = -0.242$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \quad \sin\varphi_2 = 0.833 \quad \cos\varphi_2 = -0.555$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_3 \quad \sin\varphi_3 = 0.555 \quad \cos\varphi_3 = -0.833$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{2} + \alpha_4 \quad \sin\varphi_4 = 0.243 \quad \cos\varphi_4 = -0.970$$

$$\varphi_5 = \pi + \alpha_1 \quad \sin\varphi_5 = -0.242 \quad \cos\varphi_5 = -0.970$$

$$\begin{array}{lll}
 \varphi_6 = \pi + \alpha_2 & \sin\varphi_6 = -0.555 & \cos\varphi_6 = -0.833 \\
 \varphi_7 = \pi + \alpha_3 & \sin\varphi_7 = -0.833 & \cos\varphi_7 = -0.555 \\
 \varphi_8 = \pi + \alpha_4 & \sin\varphi_8 = -0.970 & \cos\varphi_8 = -0.243
 \end{array}$$

Βάσει τοῦ Σχ.24 καὶ τῶν μέχρι τοῦδε ἀναπτυχθέντων ὑπελογίσθησαν εἰς τόν πίνακα τῶν σελ. 87 - 90 αἱ τιμαὶ τῶν σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} τῶν σημείων τοῦ συνόρου τοῦ δίσκου δριζομένων ὑπὸ τοῦ καννάβου τοῦ Σχ.30.

IV.- 'Εφαρμογή τοῦ προγράμματος SOLAPEQ.

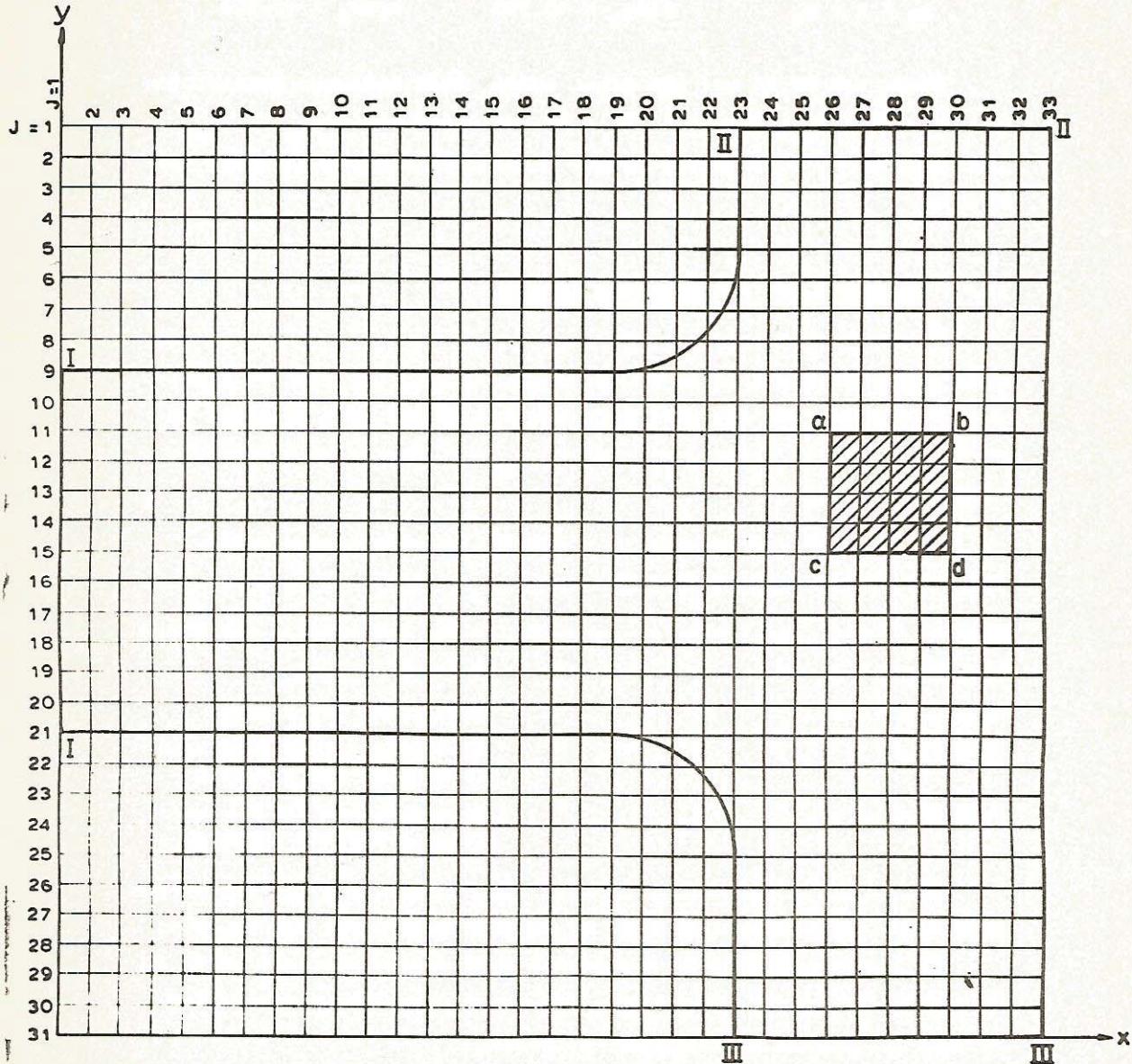
Μετά τόν προσδιορισμόν τῶν παραμέτρων τῆς ἐντάσεως εἰς τό σύνορον χρησιμοποιεῖται πλέον τό πρόγραμμα SOLAPEQ (§7), δι'οῦ ἀποτελλάται ἡ ἐντασίς καὶ εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ δίσκου, ἵτοι αἱ δριζαὶ τάσεις σ_x, σ_y καὶ αἱ αἱ διατμητικαὶ τάσεις τ_{xy} εἰς ἀπαντα τά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ καννάβου.

Κατ' ἐπιταγὴν τοῦ προγράμματος SOLAPEQ, μορφοῦται τό μητρῶον INDEX (I,J) τῶν καδικῶν ἀριθμῶν τῶν σημείων (I,J) τοῦ καννάβου, ἵτοι:
INDEX(I,J) = 3 διὰ σημεῖα τοῦ καννάβου ἐκτός τοῦ συνόρου τοῦ δίσκου
INDEX(I,J) = 1 " " " " ἐπὶ τοῦ συνόρου
INDEX(I,J) = 0 " " " " ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου
INDEX(I,J) = 4 " " " " γειτνιάζονται πρός τά καμπύλα τημάτα τοῦ συνόρου.
INDEX(I,J) = 2 " " " " παρουσιάζονται διπλῆν ἀπεικόνισιν ἐπὶ τοῦ συνόρου.

Εἰς τό Σχ.31 δεικνύεται περιοχὴ τοῦ καννάβου, εἰς τήν ὅποιαν ἐμφανίζονται χαρακτηριστικῶς δλαι αἱ ἀνωτέρω κατηγορίαι τῶν σημείων.

Τό μητρῶον INDEX(I,J) διαστάσεων 31X33 ἐμφαίνεται εἰς τό Σχ.32 Τά σημεῖα (20,9) καὶ (23,6) λόγῳ τῆς μικρᾶς των ἀποστάσεων ἀπό τό σύνορον θεωροῦνται εύρισκόμενα ἐπ' αὐτοῦ.

Αἱ συντεταγμέναι X(I,J), Y(I,J) ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων (a) τῆς §6, σελ. 21 πλήν τῶν σημείων τῶν καμπύλων τημάτων τοῦ συνόρου, τῶν ὅποιων αἱ συντεταγμέναι ὑπολογίζονται γεωμετρικῶς ἐκ τῶν Σχ.28 καὶ 29, σελ. 84.



Σχ.30. Έμφανον τὸν κάνναβον τοῦ δέσκου, εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ὀποίου ὑπρογέζονται αἱ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_1, \sigma_2, \omega$. Τὸ σύνορον τοῦ δέσκου δηλοῦται δι' ἐντὸνού γραμμῆς. $\Delta_x = \Delta_y = h = 0.25$

Π Ι Ν Α Σ (Ι). Τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ είς τό σύνορον του δίσκου.

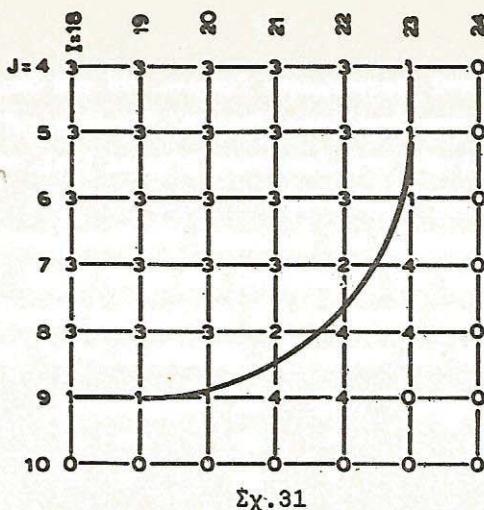
K	Σημεῖον		$\sigma_1 : \frac{10.0}{5} \text{ είς mm}$	σ_1	$\sin^2\phi$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$\cos^2\phi$			
					$-\sin\phi\cos\phi$			
1	1	9	0.10	+ 0.20		+ 0.20		
2	2	9	2.04	+ 4.08		+ 4.08		
3	3	9	4.08	+ 8.16		+ 8.16		
4	4	9	6.14	+12.28		+12.28		
5	5	9	8.18	+16.36		+16.36		
6	6	9	10.04	+20.08		+20.08		
7	7	9	12.28	+24.56		+24.56		
8	8	9	14.30	+28.60		+28.60		
9	9	9	16.40	+32.80		+32.80		
10	10	9	18.40	+36.80		+36.80		
11	11	9	20.42	+40.84		+40.84		
12	12	9	22.50	+45.00		+45.00		
13	13	9	24.55	+49.10		+49.10		
14	14	9	26.60	+53.20		+53.20		
15	15	9	29.00	+58.00		+58.00		
16	16	9	31.40	+62.80		+62.80		
17	17	9	34.80	+69.60		+69.60		
18	18	9	38.50	+77.00		+77.00		
19	19	9	44.00	+88.00		+88.00		
20	20	9	46.00	+92.00	0.941 0.693 0.306 0.235	+86.58	+ 5.42	+21.62
21	21	8	43.70	+87.40	0.693 0.306 0.482	+60.56	+26.91	+40.37
22	22	7	25.00	+50.00	0.306 0.693 0.482	+15.40	+34.65	+23.10
23	23	6	12.00	+24.00	0.941 0.235	+ 1.42	+22.58	+ 5.64
24	23	5	4.20	+ 8.40			+ 8.40	
25	23	4	0.10	+ 0.20			+ 0.20	
26	23	3	- 2.20	- 4.40			- 4.40	
27	23	2	- 4.40	- 8.80			- 8.80	
28	23	1	- 6.50	-13.00			-13.00	+ 0.00
29	24	1	- 6.35	-12.70			-12.70	+ 3.44
30	25	1	- 6.20	-12.40			-12.40	+ 6.12

K	Σημεῖον		$\sigma_1 : \frac{10.0}{5}$ eis mm	σ_1	$\sin^2\varphi$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$\cos^2\varphi$			
					$-\sin\varphi\cos\varphi$			
31	26	1	- 6.05	-12.10			-12.10	+ 8.02
32	27	1	- 5.90	-11.80			-11.80	+ 9.17
33	28	1	- 5.75	-11.50			-11.50	+ 9.55
34	29	1	- 5.60	-11.20			-11.20	+ 9.17
35	30	1	- 5.45	-10.90			-10.90	+ 8.02
36	31	1	- 5.30	-10.60			-10.60	+ 6.12
37	32	1	- 5.15	-10.30			-10.30	+ 3.44
38	33	1	- 5.00	-10.00			-10.00	0.00
39	33	2	- 6.50	-13.00			-13.00	
40	33	3	- 8.60	-17.20			-17.20	
41	33	4	-11.00	-22.00			-22.00	
42	33	5	-13.20	-26.40			-26.40	
43	33	6	-14.80	-29.60			-29.60	
44	33	7	-15.50	-31.00			-31.00	
45	33	8	-16.00	-32.00			-32.00	
46	33	9	-16.20	-32.40			-32.40	
47	33	10	-15.70	-31.40			-31.40	
48	33	11	-14.90	-29.80			-29.80	
49	33	12	-12.60	-25.20			-25.20	
50	33	13	-10.60	-21.20			-21.20	
51	33	14	- 8.00	-16.00			-16.00	
52	33	15	- 5.00	-10.00			-10.00	
53	33	16	- 2.50	- 5.00			- 5.00	
54	33	17	+ 0.05	+ 0.10			+ 0.10	
55	33	18	+ 3.20	+ 6.40			+ 6.40	
56	33	19	+ 5.90	+11.80			+11.80	
57	33	20	+ 8.10	+16.20			+16.20	
58	33	21	+ 9.50	+19.00			+19.00	
59	33	22	+ 9.80	+19.60			+19.60	
60	33	23	+ 9.50	+19.00			+19.00	
61	33	24	+ 7.90	+15.80			+15.80	
62	33	25	+ 6.00	+12.00			+12.00	

K	Σημεῖον		$\sigma_1 : \frac{10.0}{5}$ εἰς mm	σ_1	$\sin^2\phi$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
					$\cos^2\phi$			
					-sinφcosφ			
63	33	26	+ 3.90	+ 7.80			+ 7.80	
64	33	27	+ 1.00	+ 2.00			+ 2.00	
65	33	28	- 0.90	- 1.80			- 1.80	
66	33	29	- 3.80	- 7.60			- 7.60	
67	33	30	- 7.20	-14.40			-14.40	
68	33	31	-10.00	-20.00			-20.00	0.00
69	32	31	- 9.95	-19.90			-19.90	+ 6.26
70	31	31	- 9.90	-19.80			-19.80	+11.15
71	30	31	- 9.85	-19.70			-19.70	+14.64
72	29	31	- 9.80	-19.60			-19.60	+16.73
73	28	31	- 9.75	-19.50			-19.50	+17.42
74	27	31	- 9.70	-19.40			-19.40	+16.73
75	26	31	- 9.65	-19.30			-19.30	+14.64
76	25	31	- 9.60	-19.20			-19.20	+11.15
77	24	31	- 9.55	-19.10			-19.10	+ 6.26
78	23	31	- 9.50	-19.00			-19.00	+ 0.00
79	23	30	-12.80	-25.60			-25.60	
80	23	29	-16.10	-32.20			-32.20	
81	23	28	-19.20	-38.40			-38.40	
82	23	27	-22.60	-45.20			-45.20	
83	23	26	-25.80	-51.60			-51.60	
84	23	25	-30.60	-61.20			-61.20	
85	23	24	-40.00	-80.00	0.059 0.941 0.941 - 0.235	- 4.72	-75.28	+18.72
86	22	23	-72.00	-144.00	0.059 0.941 0.941 - 0.235	-44.36	-99.93	+66.52
87	21	22	-74.00	-148.00	0.059 0.941 0.941 - 0.235	-102.71	-45.58	+68.37
88	20	21	-55.00	-110.00	0.059 0.941 0.941 - 0.235	-103.51	- 6.49	+25.74
89	19	21	-46.80	-93.60		- 93.60		
90	18	21	-42.80	-85.60		- 85.60		
91	17	21	-39.50	-79.00		- 79.00		
92	16	21	-37.00	-74.00		- 74.00		
93	15	21	-34.50	-69.00		- 69.00		
94	14	21	-32.46	-64.92		- 64.92		

K	Σημεῖον		$\sigma_1 : \frac{10.0}{5}$ εἰς mm	σ_1	$\sin^2\phi$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$\sin^2\phi$			
					$-\sin\phi\cos\phi$			
95	13	21	-30.30	-60.60		-60.60		
96	12	21	-28.25	-56.50		-56.50		
97	11	21	-26.15	-52.30		-52.30		
98	10	21	-24.08	-48.15		-48.15		
99	9	21	-21.95	-43.90		-43.90		
100	8	21	-19.88	-39.75		-39.75		
101	7	21	-17.75	-35.50		-35.50		
102	6	21	-15.65	-31.30		-31.30		
103	5	21	-13.55	-27.10		-27.10		
104	4	21	-11.46	-22.92		-22.92		
105	3	21	- 9.34	-18.68		-18.68		
106	2	21	- 7.25	-14.51		-14.51		
107	1	21	- 5.17	-10.35		-10.35	0.00	
108	1	20	- 4.87	- 9.74		- 9.74	+ 3.41	
109	1	19	- 4.29	- 8.59		- 8.59	+ 6.22	
110	1	18	- 3.85	- 7.71		- 7.71	+ 8.36	
111	1	17	- 3.41	- 6.83		- 6.83	+ 9.92	
112	1	16	- 2.98	- 5.95		- 5.95	+10.86	
113	1	15	- 2.54	- 5.08		- 5.08	+11.15	
114	1	14	- 2.10	- 4.20		- 4.20	+10.86	
115	1	13	- 1.66	- 3.32		- 3.32	+ 9.92	
116	1	12	- 1.22	- 2.44		- 2.44	+ 8.36	
117	1	11	- 0.78	- 1.56		- 1.56	+ 6.22	
118	1	10	- 0.34	- 0.68		- 0.68	+ 3.41	

Παρατήρησις: Είς τήν διατομήν I-I άναπτυσσεται τάσις συ καὶ είς τάς διατομάς II-II καὶ III-III σ_x . Πλήν ὅμως αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἶναι πολὺ μικραὶ ($= 0$), διὸ καὶ παρελείφθησαν.



Τόπος πρόσγραμμα έφαρμόζεται διαίρεση: $\epsilon=0.0005$, $\beta=1.5$, $v_x = 33$, $v_y = 31$, $\kappa=118$ (συνοριακά σημεῖα), $h=0.25\text{cm}$.

	I=1	J=1
J=1	33333333333333333333333333331111111111111 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333240000000001 33333333333333333333333333332440000000001 11111111111111111111111114400000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 100000000000000000000000000000000000001 11111111111111111111111114400000000001 33333333333333333333333333332440000000001 3333333333333333333333333333240000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 3333333333333333333333333333100000000001 J=31 33333333333333333333333333331111111111111	

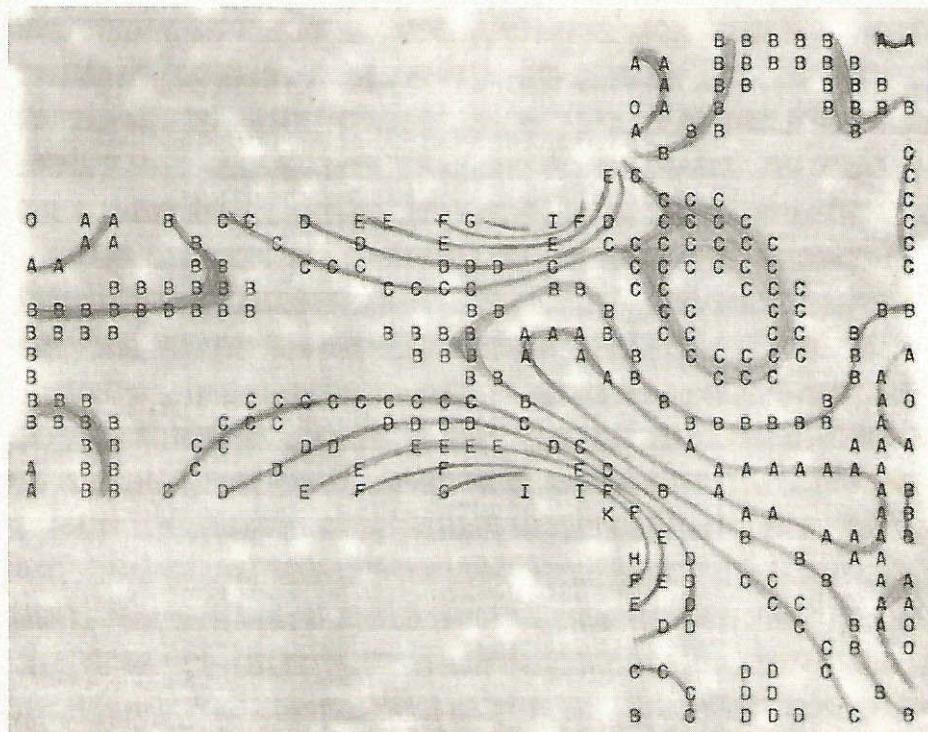
Σχ.32. Τόπος μητρώων INDEX(I,J)

Η έκτελεσις του προγράμματος έγένετο ύπό του υπολογιστού CDC 3300-1700 του Κέντρου Πυρηνικῶν Έρευνῶν "Δημόκριτός". Τα άποτελέσματα παρατίθενται εἰς τοὺς ἐπομένους πίνακας (σελ. 94-113) ὡς ταῦτα ἔξετυπωθησαν ύπό του υπολογιστού.

Διὰ τὸν υπολογισμὸν καὶ ἔκτυπωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἀποτήθη χρόνος ἀπασχολήσεως τοῦ υπολογιστοῦ 3.5 πρῶτα λεπτά.

Ἡ σύγκλισις τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου διὰ ἀπειποθεῖσαν ἀκρίβειαν $\epsilon=0.0005$ καὶ διὰ παράμετρον χαλαρώσεως $\beta=1.5$ ἐπετεύχθη:

διὰ τὴν $U = \sigma_x + \sigma_y$	εἰς	96	ἐπαναλήφεις
" " σ_x	"	87	"
" " σ_y	"	90	"
" " τ_{xy}	"	86	"



Σχ. 33. - Δίκτυον ἴσοχρώμων ἀκεραίας τάξεως

Είς τό Σχ.33 έμφανεται τό δίκτυον τῶν ίσοχρώμων ἀκεραίας τάξεως τοῦ δίσκου, τό όποῖον παριστᾶ τάς ίσοσταθμικάς καμπύλας

$$|\sigma_1 - \sigma_2|/S = n = \text{σταθερά}$$

ἔνθα $n = 1, 2, 3, \dots$ ή τάξις τῆς ίσοχρώμου καὶ S ή φωτοελαστική σταθερά τοῦ ύλικοῦ τοῦ δοκιμέου. Τό δίκτυον τοῦτο παρήχθη ἐκ τῶν ύπολογισθεισῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Διά συγκρίσεως τοῦ Σχ.33 πρὸς τὴν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.24 διαπιστοῦμεν ὅτι ταῦτα ταυτίζονται. Τό γεγονός τοῦτο μαρτυρεῖ τὴν ὄρθδητητα τῶν ληφθέντων ἀποτελεσμάτων ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐν τῇ παρούσῃ ἔργασίᾳ ἀναπτυσσομένης μεθοδολογίας. Ἡ μικρά παραμόρφωσις τοῦ σχήματος τῶν ίσοχρώμων δφείλεται εἰς τὴν διαφορετικήν κλίμακα ἐκτυπώσεως τῶν στοιχείων ύπό τῆς ἐκτυπωτικῆς μονάδος (PRINTER) τοῦ ἡλεκτρονικοῦ ύπολογιστοῦ.

Αἱ ύπολογισθεῖσαι παράμετροι τῆς ἐντάσεως σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} ἀνάγονται εἰς τὴν κατασκευήν τῆς βοηθείας τῆς ἐκλεγείσης κλίμακος τάσεων

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{δμούωμα}} = 0.30$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΥ+ΣΥ
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 1

PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*		1	2	3	4	5	6	7				
*	J	*	*	*	*	*	*	*				
*	1	*	*	*	*	*	*	*				
*	2	*	*	*	*	*	*	*				
*	3	*	*	*	*	*	*	*				
*	4	*	*	*	*	*	*	*				
*	5	*	*	*	*	*	*	*				
*	6	*	*	*	*	*	*	*				
*	7	*	*	*	*	*	*	*				
*	8	*	*	*	*	*	*	*				
*	9	0.20	4.08	8.16	12.28	16.36	20.08	24.56				
*	10	-0.68	2.61	5.95	9.32	12.68	15.98	19.45				
*	11	-1.56	1.07	3.72	6.38	9.05	11.70	14.41				
*	12	-2.44	-0.48	1.48	3.45	5.42	7.39	9.37				
*	13	-3.32	-2.05	-0.77	0.51	1.79	3.06	4.34				
*	14	-4.20	-3.61	-3.02	-2.43	-1.85	-1.26	-0.68				
*	15	-5.08	-5.18	-5.27	-5.37	-5.47	-5.58	-5.70				
*	16	-5.95	-6.74	-7.52	-8.31	-9.10	-9.89	-10.70				
*	17	-6.83	-8.30	-9.77	-11.24	-12.71	-14.19	-15.69				
*	18	-7.71	-9.87	-12.02	-14.17	-16.32	-18.49	-20.66				
*	19	-8.59	-11.44	-14.26	-17.09	-19.92	-22.77	-25.62				
*	20	-9.74	-13.05	-16.50	-20.01	-23.52	-27.04	-30.57				
*	21	-10.35	-14.51	-18.68	-22.92	-27.10	-31.30	-35.50				
*	22	*	*	*	*	*	*	*				
*	23	*	*	*	*	*	*	*				
*	24	*	*	*	*	*	*	*				
*	25	*	*	*	*	*	*	*				
*	26	*	*	*	*	*	*	*				
*	27	*	*	*	*	*	*	*				
*	28	*	*	*	*	*	*	*				
*	29	*	*	*	*	*	*	*				
*	30	*	*	*	*	*	*	*				
*	31	*	*	*	*	*	*	*				

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΧ+ΣΥ

SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ $\Sigma X + \Sigma Y$
 SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 4
 PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	22	*	23	*	24	*	25	*	26	*	27	*	28
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	-13.00	*	-12.70	*	-12.40	*	-12.10	*	-11.80	*	-11.50	*
*	2	*	-8.80	*	-8.72	*	-8.91	*	-9.32	*	-9.85	*	-10.45	*
*	3	*	-4.40	*	-4.46	*	-5.20	*	-6.41	*	-7.85	*	-9.38	*
*	4	*	0.20	*	0.47	*	-1.03	*	-3.26	*	-5.74	*	-8.27	*
*	5	*	8.40	*	7.18	*	3.88	*	0.12	*	-3.59	*	-7.15	*
*	6	*	24.00	*	15.99	*	9.23	*	3.46	*	-1.58	*	-6.13	*
*	7	*	50.05	*	38.17	*	23.54	*	13.60	*	6.07	*	-0.07	*
*	8	*	53.32	*	41.50	*	26.41	*	15.55	*	7.29	*	0.62	*
*	9	*	54.93	*	38.12	*	25.03	*	14.91	*	6.91	*	0.35	*
*	10	*	42.89	*	31.00	*	20.70	*	12.15	*	5.08	*	-0.85	*
*	11	*	30.53	*	22.29	*	14.62	*	7.89	*	2.13	*	-2.82	*
*	12	*	18.64	*	13.03	*	7.59	*	2.67	*	-1.63	*	-5.37	*
*	13	*	7.25	*	3.59	*	0.04	*	-3.17	*	-5.96	*	-8.36	*
*	14	*	-3.86	*	-5.95	*	-7.85	*	-9.44	*	-10.70	*	-11.65	*
*	15	*	-14.97	*	-15.68	*	-16.04	*	-16.04	*	-15.73	*	-15.18	*
*	16	*	-26.39	*	-25.78	*	-24.58	*	-22.94	*	-21.00	*	-18.88	*
*	17	*	-38.50	*	-36.47	*	-33.57	*	-30.14	*	-26.46	*	-22.69	*
*	18	*	-51.82	*	-48.04	*	-43.07	*	-37.58	*	-32.00	*	-26.52	*
*	19	*	-67.10	*	-60.81	*	-53.10	*	-45.12	*	-37.44	*	-30.20	*
*	20	*	-85.47	*	-74.98	*	-63.39	*	-52.38	*	-42.43	*	-33.49	*
*	21	*	-108.40	*	-90.27	*	-73.10	*	-58.56	*	-46.42	*	-36.04	*
*	22	*	-135.76	*	-104.60	*	-80.19	*	-62.34	*	-48.65	*	-37.45	*
*	23	*	-144.29	*	-112.20	*	-80.71	*	-61.96	*	-48.40	*	-37.42	*
*	24	*	-80.00	*	-68.50	*	-56.39	*	-45.58	*	-35.99	*	-27.25	*
*	25	*	-61.20	*	-56.91	*	-49.52	*	-41.54	*	-33.72	*	-26.21	*
*	26	*	-51.60	*	-48.39	*	-43.26	*	-37.32	*	-31.15	*	-24.97	*
*	27	*	-45.20	*	-41.81	*	-37.81	*	-33.32	*	-28.58	*	-23.71	*
*	28	*	-38.40	*	-35.82	*	-32.86	*	-29.59	*	-26.12	*	-22.53	*
*	29	*	-32.20	*	-30.22	*	-28.20	*	-26.06	*	-23.80	*	-21.45	*
*	30	*	-25.60	*	-24.65	*	-23.68	*	-22.65	*	-21.58	*	-20.45	*
*	31	*	-19.00	*	-19.10	*	-19.20	*	-19.30	*	-19.40	*	-19.50	*

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΣX+ΣY
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	*
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	-11.20	*	-10.90	*	-10.60	*	-10.30	*	-10.00	*
*	2	*	-11.08	*	-11.72	*	-12.34	*	-12.85	*	-13.00	*
*	3	*	-10.95	*	-12.55	*	-14.18	*	-15.78	*	-17.20	*
*	4	*	-10.80	*	-13.37	*	-16.04	*	-18.88	*	-22.00	*
*	5	*	-10.61	*	-14.08	*	-17.72	*	-21.72	*	-26.40	*
*	6	*	-10.41	*	-14.64	*	-19.03	*	-23.88	*	-29.60	*
*	7	*	-10.27	*	-15.01	*	-19.90	*	-25.17	*	-31.00	*
*	8	*	-10.25	*	-15.25	*	-20.38	*	-25.90	*	-32.00	*
*	9	*	-10.41	*	-15.37	*	-20.48	*	-26.04	*	-32.40	*
*	10	*	-10.74	*	-15.34	*	-20.11	*	-25.37	*	-31.40	*
*	11	*	-11.19	*	-15.13	*	-19.26	*	-23.95	*	-29.80	*
*	12	*	-11.73	*	-14.72	*	-17.87	*	-21.35	*	-25.20	*
*	13	*	-12.32	*	-14.17	*	-16.13	*	-18.39	*	-21.20	*
*	14	*	-12.96	*	-13.50	*	-14.10	*	-14.88	*	-16.00	*
*	15	*	-13.64	*	-12.77	*	-11.89	*	-11.02	*	-10.00	*
*	16	*	-14.37	*	-12.04	*	-9.68	*	-7.32	*	-5.00	*
*	17	*	-15.14	*	-11.33	*	-7.48	*	-3.59	*	0.10	*
*	18	*	-15.93	*	-10.68	*	-5.30	*	0.34	*	6.40	*
*	19	*	-16.73	*	-10.15	*	-3.38	*	3.85	*	11.80	*
*	20	*	-17.50	*	-9.82	*	-1.90	*	6.62	*	16.20	*
*	21	*	-18.17	*	-9.73	*	-1.04	*	8.35	*	19.00	*
*	22	*	-18.67	*	-9.88	*	-0.87	*	8.82	*	19.60	*
*	23	*	-18.93	*	-10.26	*	-1.37	*	8.18	*	19.00	*
*	24	*	-18.99	*	-10.85	*	-2.53	*	6.28	*	15.80	*
*	25	*	-18.91	*	-11.63	*	-4.17	*	3.66	*	12.00	*
*	26	*	-18.81	*	-12.59	*	-6.19	*	0.52	*	7.80	*
*	27	*	-18.77	*	-13.72	*	-8.53	*	-3.18	*	2.00	*
*	28	*	-18.83	*	-15.01	*	-11.01	*	-6.72	*	-1.80	*
*	29	*	-19.00	*	-16.46	*	-13.79	*	-10.90	*	-7.60	*
*	30	*	-19.28	*	-18.06	*	-16.79	*	-15.50	*	-14.40	*
*	31	*	-19.60	*	-19.70	*	-19.80	*	-19.90	*	-20.00	*

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 1
PAGE

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

ΟΡΘΑΙ ΙΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5

PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	*
*	2	*	0.86	*	0.67	*	0.49	*	0.33	*	0.00
*	3	*	1.79	*	1.31	*	0.85	*	0.44	*	0.00
*	4	*	2.84	*	1.96	*	1.12	*	0.43	*	0.00
*	5	*	4.06	*	2.68	*	1.41	*	0.42	*	0.00
*	6	*	5.37	*	3.46	*	1.78	*	0.52	*	0.00
*	7	*	6.56	*	4.18	*	2.19	*	0.75	*	0.00
*	8	*	7.36	*	4.65	*	2.43	*	0.85	*	0.00
*	9	*	7.59	*	4.75	*	2.44	*	0.79	*	0.00
*	10	*	7.20	*	4.46	*	2.24	*	0.68	*	0.00
*	11	*	5.27	*	3.85	*	1.86	*	0.45	*	0.00
*	12	*	4.91	*	2.99	*	1.45	*	0.43	*	0.00
*	13	*	3.24	*	1.92	*	0.86	*	0.17	*	0.00
*	14	*	1.35	*	0.69	*	0.20	*	-0.06	*	0.00
*	15	*	-0.69	*	-0.64	*	-0.51	*	-0.27	*	0.00
*	16	*	-2.82	*	-2.05	*	-1.34	*	-0.67	*	0.00
*	17	*	-4.94	*	-3.44	*	-2.12	*	-1.03	*	0.00
*	18	*	-5.96	*	-4.68	*	-2.71	*	-1.13	*	0.00
*	19	*	-8.75	*	-5.74	*	-3.17	*	-1.20	*	0.00
*	20	*	-10.16	*	-6.54	*	-3.49	*	-1.21	*	0.00
*	21	*	-10.99	*	-6.99	*	-3.67	*	-1.21	*	0.00
*	22	*	-11.04	*	-7.00	*	-3.67	*	-1.23	*	0.00
*	23	*	-10.23	*	-6.54	*	-3.44	*	-1.13	*	0.00
*	24	*	-8.73	*	-5.70	*	-3.10	*	-1.13	*	0.00
*	25	*	-5.90	*	-4.64	*	-2.59	*	-1.00	*	0.00
*	26	*	-5.10	*	-3.52	*	-2.01	*	-0.78	*	0.00
*	27	*	-3.54	*	-2.50	*	-1.48	*	-0.67	*	0.00
*	28	*	-2.29	*	-1.61	*	-0.89	*	-0.26	*	0.00
*	29	*	-1.34	*	-0.94	*	-0.50	*	-0.12	*	0.00
*	30	*	-0.62	*	-0.44	*	-0.27	*	-0.15	*	0.00
*	31	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 2
PAGE

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 4
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
*	*	22	*	23	*	24	*	25	*	26	*	27	*	28	*	
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
*	1	*	*	-13.00	*	-12.70	*	-12.40	*	-12.10	*	-11.80	*	-11.50	*	
*	2	*	*	-8.80	*	-8.94	*	-9.49	*	-10.20	*	-10.89	*	-11.46	*	
*	3	*	*	-4.40	*	-5.04	*	-6.63	*	-8.47	*	-10.14	*	-11.54	*	
*	4	*	*	3.20	*	-0.86	*	-3.99	*	-7.14	*	-9.76	*	-11.86	*	
*	5	*	*	8.40	*	3.62	*	-2.06	*	-6.58	*	-9.94	*	-12.52	*	
*	6	*	*	22.58	*	6.90	*	-1.75	*	-7.13	*	-10.77	*	-13.48	*	
*	7	*	34.65	*	19.46	*	4.40	*	-3.71	*	-8.68	*	-12.04	*	-14.58	*
*	8	*	19.11	*	8.52	*	-6.37	*	-6.40	*	-10.45	*	-13.31	*	-15.55	*
*	9	*	10.13	*	2.62	*	-3.76	*	-8.47	*	-11.81	*	-14.23	*	-16.16	*
*	10	*	5.20	*	-0.69	*	-5.85	*	-9.79	*	-12.64	*	-14.72	*	-16.36	*
*	11	*	1.56	*	-3.16	*	-7.40	*	-10.72	*	-13.13	*	-14.86	*	-16.20	*
*	12	*	-1.81	*	-5.54	*	-8.92	*	-11.58	*	-13.49	*	-14.81	*	-15.77	*
*	13	*	-5.23	*	-8.11	*	-10.64	*	-12.57	*	-13.88	*	-14.68	*	-15.17	*
*	14	*	-8.76	*	-13.91	*	-12.62	*	-13.76	*	-14.37	*	-14.56	*	-14.49	*
*	15	*	-12.47	*	-13.98	*	-14.86	*	-15.15	*	-14.98	*	-14.47	*	-13.76	*
*	16	*	-15.39	*	-17.31	*	-17.33	*	-16.70	*	-15.67	*	-14.42	*	-13.03	*
*	17	*	-20.64	*	-20.95	*	-20.00	*	-18.35	*	-16.42	*	-14.40	*	-12.33	*
*	18	*	-25.38	*	-24.96	*	-22.84	*	-20.15	*	-17.17	*	-14.40	*	-11.71	*
*	19	*	-30.92	*	-29.47	*	-25.84	*	-21.75	*	-17.91	*	-14.45	*	-11.23	*
*	20	*	-37.89	*	-34.75	*	-29.05	*	-23.47	*	-18.71	*	-14.67	*	-11.00	*
*	21	*	-47.73	*	-41.47	*	-32.72	*	-25.44	*	-19.80	*	-15.24	*	-11.20	*
*	22	*	-56.16	*	-51.64	*	-37.56	*	-28.16	*	-21.57	*	-16.45	*	-11.99	*
*	23	*	-69.93	*	-68.12	*	-44.27	*	-32.24	*	-24.36	*	-18.43	*	-13.43	*
*	24	*	*	-75.28	*	-51.89	*	-37.35	*	-27.79	*	-20.87	*	-15.29	*	
*	25	*	*	-61.20	*	-50.05	*	-38.77	*	-29.79	*	-22.80	*	-17.09	*	
*	26	*	*	-51.60	*	-45.24	*	-37.30	*	-29.98	*	-23.77	*	-18.47	*	
*	27	*	*	-45.20	*	-40.07	*	-34.40	*	-28.84	*	-23.81	*	-19.33	*	
*	28	*	*	-38.40	*	-34.85	*	-30.89	*	-26.92	*	-23.18	*	-19.75	*	
*	29	*	*	-32.20	*	-29.64	*	-27.10	*	-24.56	*	-22.12	*	-19.83	*	
*	30	*	*	-25.60	*	-24.38	*	-23.18	*	-21.98	*	-20.82	*	-19.71	*	
*	31	*	*	-19.00	*	-19.10	*	-19.20	*	-19.30	*	-19.40	*	-19.50	*	

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	*	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	1	*	-11.20	*	-10.90	*	-10.60	*	-10.30	*	-10.00	*
*	2	*	-11.95	*	-12.39	*	-12.82	*	-13.18	*	-13.00	*
*	3	*	-12.74	*	-13.87	*	-15.02	*	-16.22	*	-17.20	*
*	4	*	-13.65	*	-15.33	*	-17.15	*	-19.31	*	-22.00	*
*	5	*	-14.68	*	-16.77	*	-19.13	*	-22.14	*	-26.40	*
*	6	*	-15.78	*	-18.10	*	-20.82	*	-24.40	*	-29.60	*
*	7	*	-16.83	*	-19.20	*	-22.09	*	-25.92	*	-31.00	*
*	8	*	-17.61	*	-19.90	*	-22.82	*	-26.74	*	-32.00	*
*	9	*	-18.00	*	-20.12	*	-22.91	*	-26.83	*	-32.40	*
*	10	*	-17.94	*	-19.80	*	-22.35	*	-26.05	*	-31.40	*
*	11	*	-17.46	*	-18.98	*	-21.12	*	-24.46	*	-29.80	*
*	12	*	-16.64	*	-17.72	*	-19.32	*	-21.78	*	-25.20	*
*	13	*	-15.56	*	-16.59	*	-16.99	*	-18.56	*	-21.20	*
*	14	*	-14.31	*	-14.19	*	-14.30	*	-14.82	*	-16.00	*
*	15	*	-12.95	*	-12.13	*	-11.38	*	-10.75	*	-10.00	*
*	16	*	-11.55	*	-9.99	*	-8.35	*	-6.66	*	-5.00	*
*	17	*	-10.20	*	-7.90	*	-5.36	*	-2.56	*	0.10	*
*	18	*	-8.97	*	-6.00	*	-2.59	*	1.47	*	6.40	*
*	19	*	-7.98	*	-4.42	*	-0.20	*	5.04	*	11.80	*
*	20	*	-7.34	*	-3.29	*	1.59	*	7.84	*	16.20	*
*	21	*	-7.18	*	-2.74	*	2.63	*	9.56	*	19.00	*
*	22	*	-7.63	*	-2.88	*	2.80	*	10.04	*	19.60	*
*	23	*	-8.71	*	-3.72	*	2.07	*	9.31	*	19.00	*
*	24	*	-10.26	*	-5.15	*	0.57	*	7.40	*	15.80	*
*	25	*	-12.01	*	-7.00	*	-1.58	*	4.65	*	12.00	*
*	26	*	-13.71	*	-9.07	*	-4.18	*	1.30	*	7.80	*
*	27	*	-15.23	*	-11.22	*	-7.05	*	-2.51	*	2.00	*
*	28	*	-16.54	*	-13.39	*	-10.12	*	-6.46	*	-1.80	*
*	29	*	-17.66	*	-15.52	*	-13.29	*	-10.78	*	-7.60	*
*	30	*	-18.66	*	-17.61	*	-16.52	*	-15.35	*	-14.40	*
*	31	*	-19.60	*	-19.70	*	-19.80	*	-19.90	*	-20.00	*

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ TXY SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ TXY SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 2
PAGE

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ TXY SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 3
PAGE

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ TXY
SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 4
PAGE

*	I *	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	*	22	*	23	*	24	*	25	*	26	*	27	*	
*	J *	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	28	
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	1 *	*	0.00	*	3.44	*	6.12	*	8.02	*	9.17	*	9.55	
*	2 *	*	0.00	*	3.51	*	6.38	*	8.35	*	9.43	*	9.71	
*	3 *	*	0.00	*	3.88	*	6.89	*	8.74	*	9.61	*	9.69	
*	4 *	*	0.00	*	4.82	*	7.78	*	9.19	*	9.59	*	9.35	
*	5 *	*	0.00	*	6.69	*	8.95	*	9.44	*	9.16	*	8.51	
*	6 *	*	5.64	*	9.60	*	9.71	*	8.91	*	7.95	*	6.99	
*	7 *	23.10	*	16.11	*	11.36	*	8.77	*	7.00	*	5.70	*	4.68
*	8 *	25.29	*	13.67	*	8.18	*	5.34	*	3.61	*	2.47	*	1.68
*	9 *	13.14	*	6.37	*	2.68	*	0.63	*	-0.58	*	-1.31	*	-1.70
*	10 *	3.34	*	-0.34	*	-2.67	*	-4.03	*	-4.78	*	-5.12	*	-5.12
*	11 *	-2.07	*	-4.91	*	-6.80	*	-7.90	*	-8.43	*	-8.53	*	-8.25
*	12 *	-4.88	*	-7.66	*	-9.58	*	-10.74	*	-11.28	*	-11.30	*	-10.86
*	13 *	-6.15	*	-9.07	*	-11.22	*	-12.59	*	-13.26	*	-13.32	*	-12.83
*	14 *	-5.36	*	-9.50	*	-11.91	*	-13.53	*	-14.39	*	-14.56	*	-14.08
*	15 *	-5.73	*	-9.10	*	-11.79	*	-13.66	*	-14.71	*	-15.00	*	-14.58
*	16 *	-4.29	*	-7.93	*	-10.91	*	-13.01	*	-14.23	*	-14.63	*	-14.31
*	17 *	-1.92	*	-5.94	*	-9.23	*	-11.55	*	-12.90	*	-13.42	*	-13.22
*	18 *	1.66	*	-2.93	*	-6.63	*	-9.17	*	-10.66	*	-11.31	*	-11.29
*	19 *	7.04	*	1.47	*	-2.86	*	-5.71	*	-7.39	*	-8.24	*	-8.47
*	20 *	15.53	*	7.95	*	2.47	*	-0.94	*	-3.00	*	-4.20	*	-4.82
*	21 *	30.31	*	17.64	*	9.76	*	5.22	*	2.44	*	0.64	*	-0.54
*	22 *	56.02	*	30.91	*	18.61	*	12.28	*	8.40	*	5.81	*	3.98
*	23 *	66.52	*	41.44	*	26.11	*	18.29	*	13.59	*	10.45	*	8.15
*	24 *	*	18.72	*	21.46	*	19.00	*	16.11	*	13.58	*	11.40	
*	25 *	*	0.00	*	12.38	*	15.91	*	16.09	*	15.05	*	13.51	
*	26 *	*	0.00	*	8.33	*	13.20	*	15.22	*	15.51	*	14.75	
*	27 *	*	0.00	*	6.67	*	11.60	*	14.45	*	15.51	*	15.46	
*	28 *	*	0.00	*	6.07	*	10.86	*	14.04	*	15.68	*	15.95	
*	29 *	*	0.00	*	5.90	*	10.64	*	13.97	*	15.87	*	16.39	
*	30 *	*	0.00	*	5.99	*	10.76	*	14.18	*	16.21	*	16.86	
*	31 *	*	0.00	*	6.26	*	11.15	*	14.64	*	16.73	*	17.42	

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΣΕΙΣ ΤXY
SHEAR STRESSES

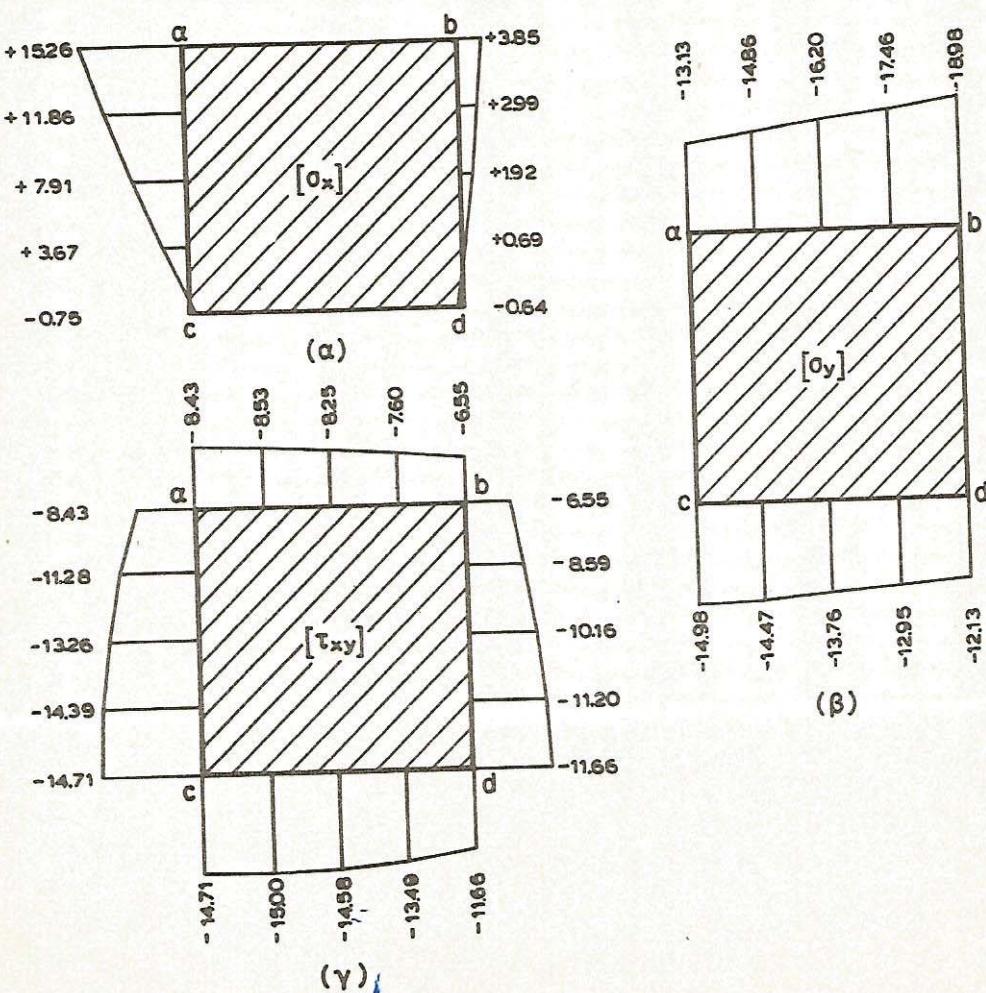
ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	*	*
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	1	*	9.17	*	8.02	*	6.12	*	3.44	*	0.00	*
*	2	*	9.26	*	8.10	*	6.22	*	3.55	*	0.00	*
*	3	*	9.12	*	7.96	*	6.17	*	3.62	*	0.00	*
*	4	*	8.62	*	7.44	*	5.77	*	3.43	*	0.00	*
*	5	*	7.61	*	6.45	*	4.95	*	2.91	*	0.00	*
*	6	*	6.02	*	4.97	*	3.72	*	2.12	*	0.00	*
*	7	*	3.83	*	3.05	*	2.22	*	1.23	*	0.00	*
*	8	*	1.15	*	0.79	*	0.54	*	0.32	*	0.00	*
*	9	*	-1.81	*	-1.67	*	-1.30	*	-0.71	*	0.00	*
*	10	*	-4.81	*	-4.18	*	-3.19	*	-1.79	*	0.00	*
*	11	*	-7.60	*	-6.55	*	-5.03	*	-2.91	*	0.00	*
*	12	*	-9.98	*	-8.59	*	-6.60	*	-3.85	*	0.00	*
*	13	*	-11.79	*	-10.16	*	-7.80	*	-4.50	*	0.00	*
*	14	*	-12.98	*	-11.20	*	-8.62	*	-5.01	*	0.00	*
*	15	*	-13.49	*	-11.66	*	-8.96	*	-5.18	*	0.00	*
*	16	*	-13.29	*	-11.53	*	-8.87	*	-5.10	*	0.00	*
*	17	*	-12.36	*	-10.80	*	-8.41	*	-4.93	*	0.00	*
*	18	*	-10.67	*	-9.43	*	-7.45	*	-4.47	*	0.00	*
*	19	*	-8.18	*	-7.37	*	-5.92	*	-3.61	*	0.00	*
*	20	*	-4.98	*	-4.70	*	-3.90	*	-2.44	*	0.00	*
*	21	*	-1.26	*	-1.59	*	-1.53	*	-1.03	*	0.00	*
*	22	*	2.66	*	1.68	*	0.96	*	0.43	*	0.00	*
*	23	*	6.35	*	4.81	*	3.37	*	1.86	*	0.00	*
*	24	*	9.42	*	7.50	*	5.46	*	3.09	*	0.00	*
*	25	*	11.69	*	9.59	*	7.09	*	4.00	*	0.00	*
*	26	*	13.25	*	11.12	*	8.32	*	4.72	*	0.00	*
*	27	*	14.28	*	12.19	*	9.17	*	5.15	*	0.00	*
*	28	*	15.02	*	12.98	*	9.83	*	5.50	*	0.00	*
*	29	*	15.62	*	13.62	*	10.41	*	5.94	*	0.00	*
*	30	*	16.16	*	14.15	*	10.83	*	6.16	*	0.00	*
*	31	*	16.73	*	14.64	*	11.15	*	6.26	*	0.00	*

V.- Μελέτη τῶν ἀποτελεσμάτων.

Πρός διασταύρωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἀποκόπτομεν ἐν τυχόν τμῆμα τοῦ δίσκου, ἐπιβάλλομεν ἐπὶ τοῦ συνόρου του τὰς ὑπολογισθεῖσας τάσεις καὶ ἔξετάζομεν τὴν ἴσορροπίαν.

Οὕτω, ἐν προκειμένῳ, ἀποκόπτομεν τὸ τετραγωνικὸν στοιχεῖον abcd (Σχ.30) σελ. 86, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διατομῶν $I=26, I=30, J=11, J=15$. Εἰς τὰ Σχ.34 (α, β, γ) ἐμφαίνεται τὸ ἐν λόγῳ τμῆμα μέ τὰς ἐπὶ τοῦ συνόρου του ἀναπτυσσομένας τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.



Σχ.34. Τμῆμα τοῦ δίσκου abcd διαστάσεων 1cmx1cm μέ τὰς ἐπὶ τοῦ συνόρου του τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Υπολογισμός τῶν συνισταμένων ἐπί τῶν ἔδρῶν τοῦ abcd.

$$S_X|_c^a = 0.25X\left(\frac{15.26}{2} + 11.86 + 7.91 + 3.67 - \frac{0.75}{2}\right) = +7.67$$

$$S_X|_d^b = 0.25X\left(\frac{3.85}{2} + 2.99 + 1.92 + 0.69 - \frac{0.64}{2}\right) = +1.80$$

$$S_Y|_a^b = 0.25X\left(-\frac{13.13}{2} - 14.86 - 16.20 - 17.46 - \frac{18.98}{2}\right) = -16.15$$

$$S_Y|_c^d = 0.25X\left(-\frac{14.98}{2} - 14.47 - 13.76 - 12.95 - \frac{12.13}{2}\right) = -13.68$$

$$T|_c^a = 0.25X\left(-\frac{8.43}{2} - 11.28 - 13.26 - 14.39 - \frac{14.71}{2}\right) = -12.62$$

$$T|_d^b = 0.25X\left(-\frac{6.55}{2} - 8.59 - 10.16 - 11.20 - \frac{11.66}{2}\right) = -9.77$$

$$T|_a^b = 0.25X\left(-\frac{8.43}{2} - 8.53 - 8.25 - 7.60 - \frac{6.55}{2}\right) = -7.97$$

$$T|_c^d = 0.25X\left(-\frac{14.71}{2} - 15.00 - 14.58 - 13.49 - \frac{11.66}{2}\right) = -14.06$$

Υπολογισμός τῆς θέσεως τῶν συνισταμένων ἐπί τῶν ἔδρῶν.

$h = 0.25$ os_i = ἀπόστασις K.B. ἀπό τὴν ἄνω ἢ τὴν ἀριστεράν πλευράν τῶν στοιχειώδῶν τραπεζίων.

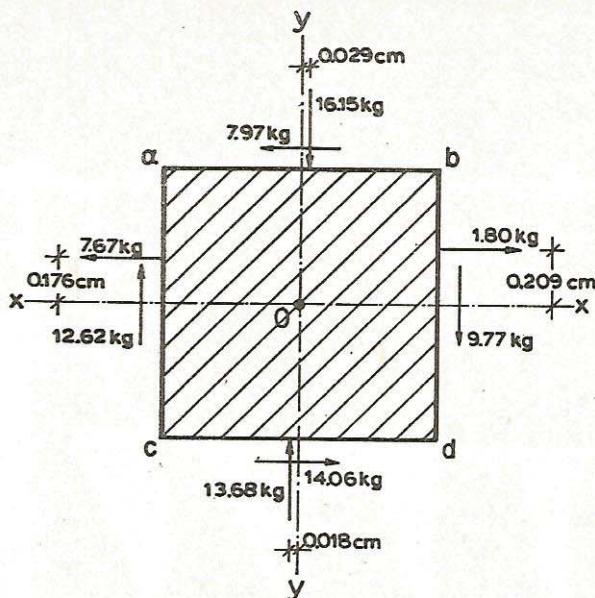
f_i = ἐμβαδόν στοιχειώδῶν τραπεζίων

	os_i	Απόστασις K.B ἀπό α	f_i	Ροη Μ; ως προς α
$S_X _c^a$	$\frac{15.26+2 \times 11.86}{15.26+11.86} \times \frac{h}{3} = 0.479 h$	0.479 h	13.56 h	6.49 h ²
	$\frac{11.86+2 \times 7.91}{11.86+7.91} \times \frac{h}{3} = 0.466 h$	1.466 h	9.88 h	14.49 h ²
	$\frac{7.91+2 \times 3.67}{7.91+3.67} \times \frac{h}{3} = 0.438 h$	2.438 h	5.79 h	14.12 h ²
	$\frac{3.67+2 \times 0.75}{3.67-0.75} \times \frac{h}{3} = 0.247 h$	3.247 h	1.46 h	4.74 h ²
$os = \frac{39.84}{30.69} \times 0.25 = 0.324 cm$		$\sum f_i = 30.69 h$	$\sum M_i = 39.84 h^2$	

	OS_i	Αποστασις Κ.Β. άπό α	f_i	Ροτη Μ; ως προς α
$S_x _d^b$	$\frac{3.85+2 \times 2.99}{3.85+2.99} \times \frac{h}{3} = 0.479h$	0.479 h	3.42 h	1.64 h ²
	$\frac{2.99+2 \times 1.92}{2.99+1.92} \times \frac{h}{3} = 0.463h$	1.463 h	2.45 h	3.58 h ²
	$\frac{1.92+2 \times 0.69}{1.92+0.69} \times \frac{h}{3} = 0.421h$	2.421 h	1.31 h	3.17 h ²
	$\frac{0.69-2 \times 0.64}{0.69-0.64} \times \frac{h}{3} = -0.933h$	-0.933 h	0.02 h	-0.02 h ²
$OS = \frac{0.87}{7.20} \times 0.25 = 0.291 \text{ cm}$			$\sum f_i = 7.20h$	$\sum M_i = 8.37 h^2$

	OS_i	Αποστασις Κ.Β. άπό α	f_i	Ροτη Μ; ως προς α
$S_y _d^b$	$\frac{-13.13-2 \times 14.86}{-13.13-14.86} \times \frac{h}{3} = 0.510h$	0.510 h	13.99 h	7.13 h ²
	$\frac{-14.86-2 \times 16.20}{-14.86-16.20} \times \frac{h}{3} = 0.507h$	1.507 h	15.53 h	23.40 h ²
	$\frac{-16.20-2 \times 17.46}{-16.20-17.46} \times \frac{h}{3} = 0.507h$	2.507 h	16.83 h	42.19 h ²
	$\frac{-17.46-2 \times 18.98}{-17.46-18.98} \times \frac{h}{3} = 0.508h$	3.508 h	18.22 h	63.92 h ²
$OS = \frac{136.64}{64.57} \times 0.25 = 0.529 \text{ cm}$			$\sum f_i = 64.57h$	$\sum M_i = 136.64 h^2$

	OS_i	Αποστασις Κ.Β. άπό α	f_i	Ροτη Μ; ως προς α
$S_y _c^d$	$\frac{-14.98-2 \times 14.47}{-14.98-14.47} \times \frac{h}{3} = 0.497h$	0.497 h	14.72 h	7.32 h ²
	$\frac{-14.47-2 \times 13.76}{-14.47-13.76} \times \frac{h}{3} = 0.496h$	1.496 h	14.11 h	21.11 h ²
	$\frac{-13.76-2 \times 12.95}{-13.76-12.95} \times \frac{h}{3} = 0.495h$	2.495 h	13.35 h	33.31 h ²
	$\frac{-12.95-2 \times 12.13}{-12.95-12.13} \times \frac{h}{3} = 0.495h$	3.495 h	12.54 h	43.83 h ²
$OS = \frac{105.57}{54.72} \times 0.25 = 0.482 \text{ cm}$			$\sum f_i = 54.72h$	$\sum M_i = 105.57$



Σχ.35

"Ελεγχος Ισορροπίας.

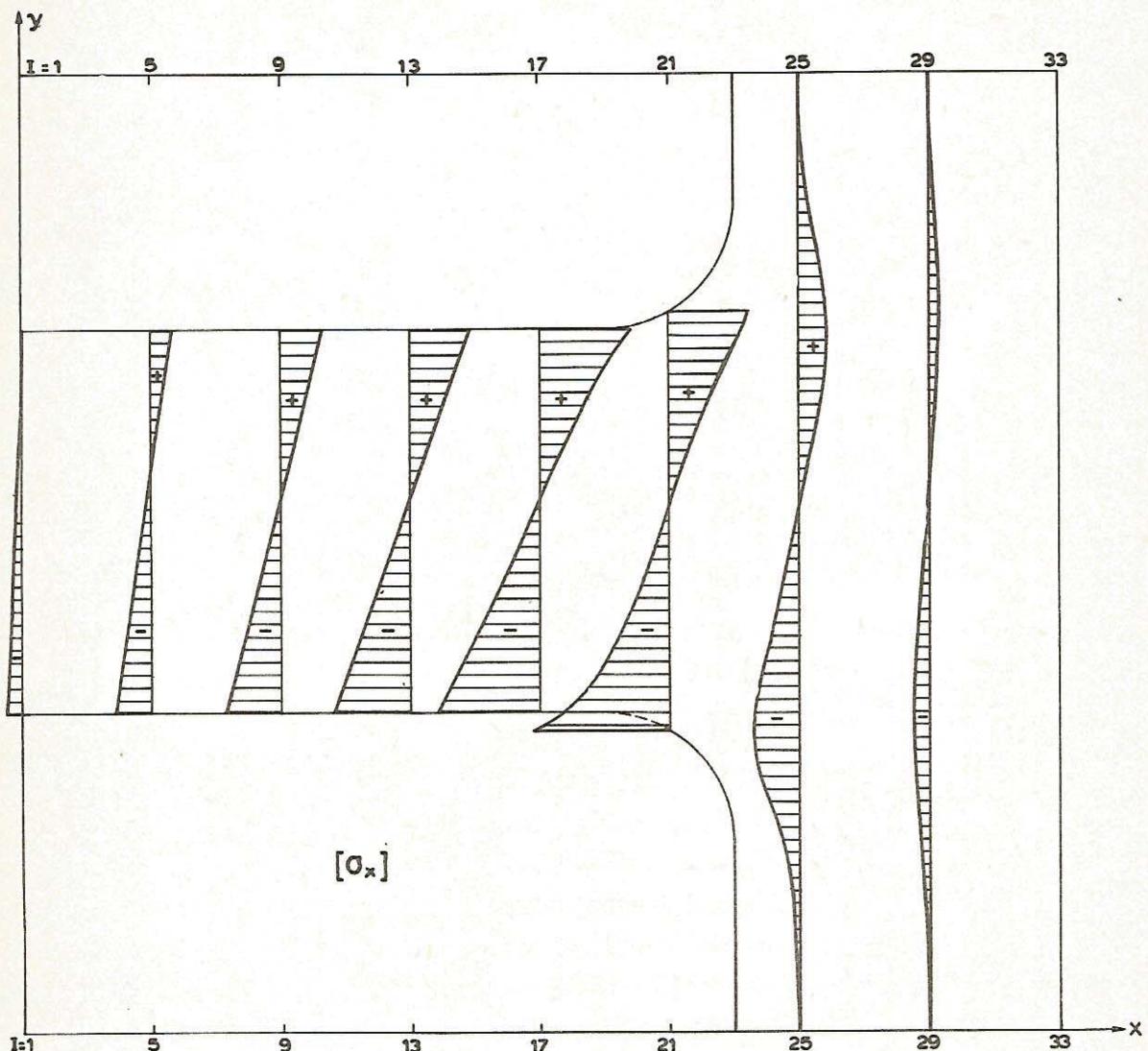
$$\text{Προβολαίς έπι τοῦ } x-x \quad \Sigma x = -7.67 + 1.80 - 7.97 + 14.06 = +0.22 \text{ kg} \approx 0$$

$$\text{" " " " } y-y \quad \Sigma y = -16.15 + 13.68 + 12.62 - 9.77 = +0.38 \text{ kg} \approx 0$$

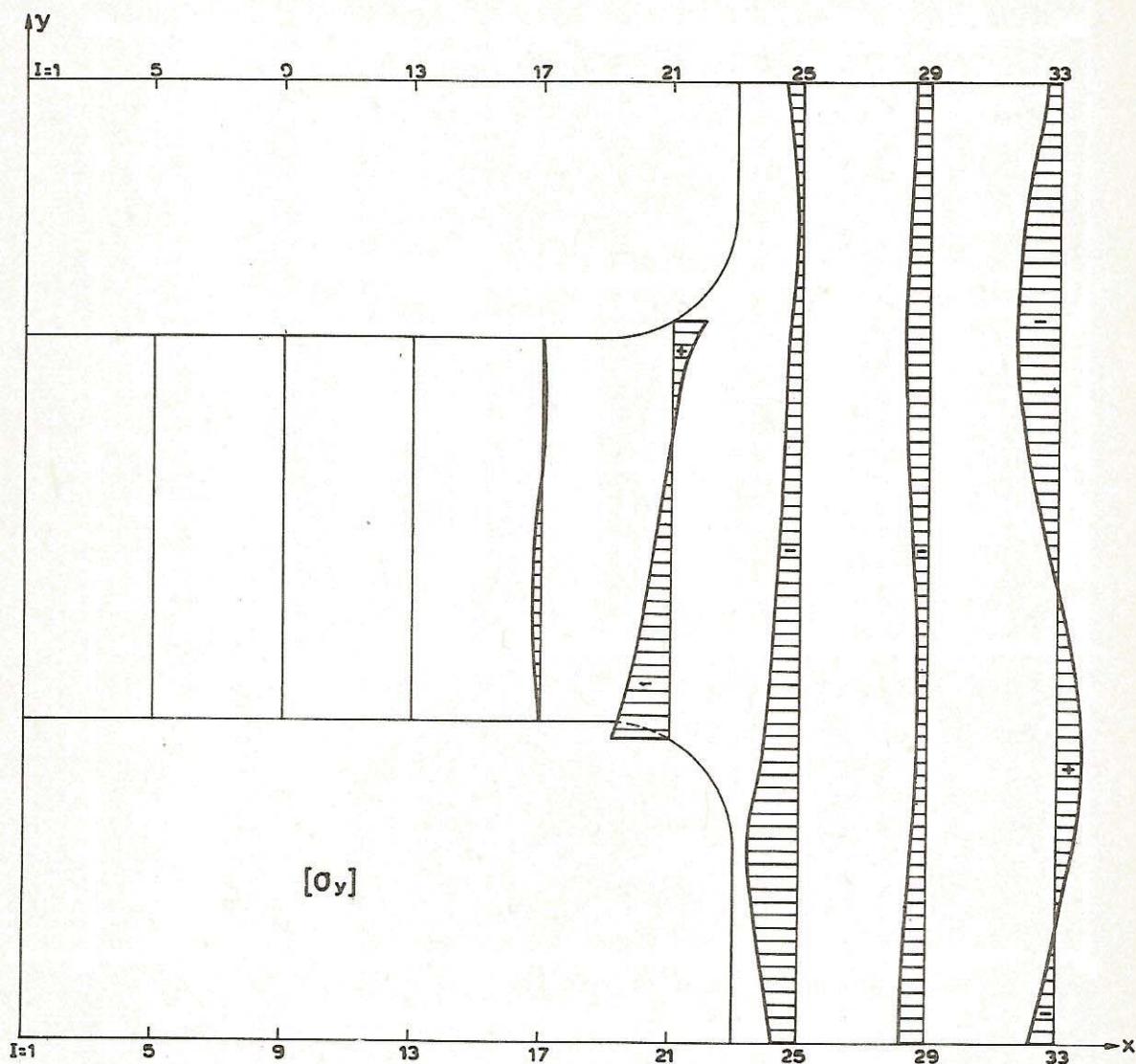
Ροταίως πυρός O.

$$\begin{aligned}
 & -7.67 \times 0.176 = -1.350 \\
 & +1.80 \times 0.209 = +0.376 \\
 & +16.15 \times 0.029 = +0.468 \\
 & +13.68 \times 0.018 = +0.246 \\
 & +12.62 \times 0.500 = +6.310 \\
 & -7.97 \times 0.500 = -3.985 \\
 & +9.77 \times 0.500 = +4.885 \\
 & -14.06 \times 0.500 = \underline{-7.030} \quad \Sigma M_O = -0.08 \text{ kgcm} \approx 0
 \end{aligned}$$

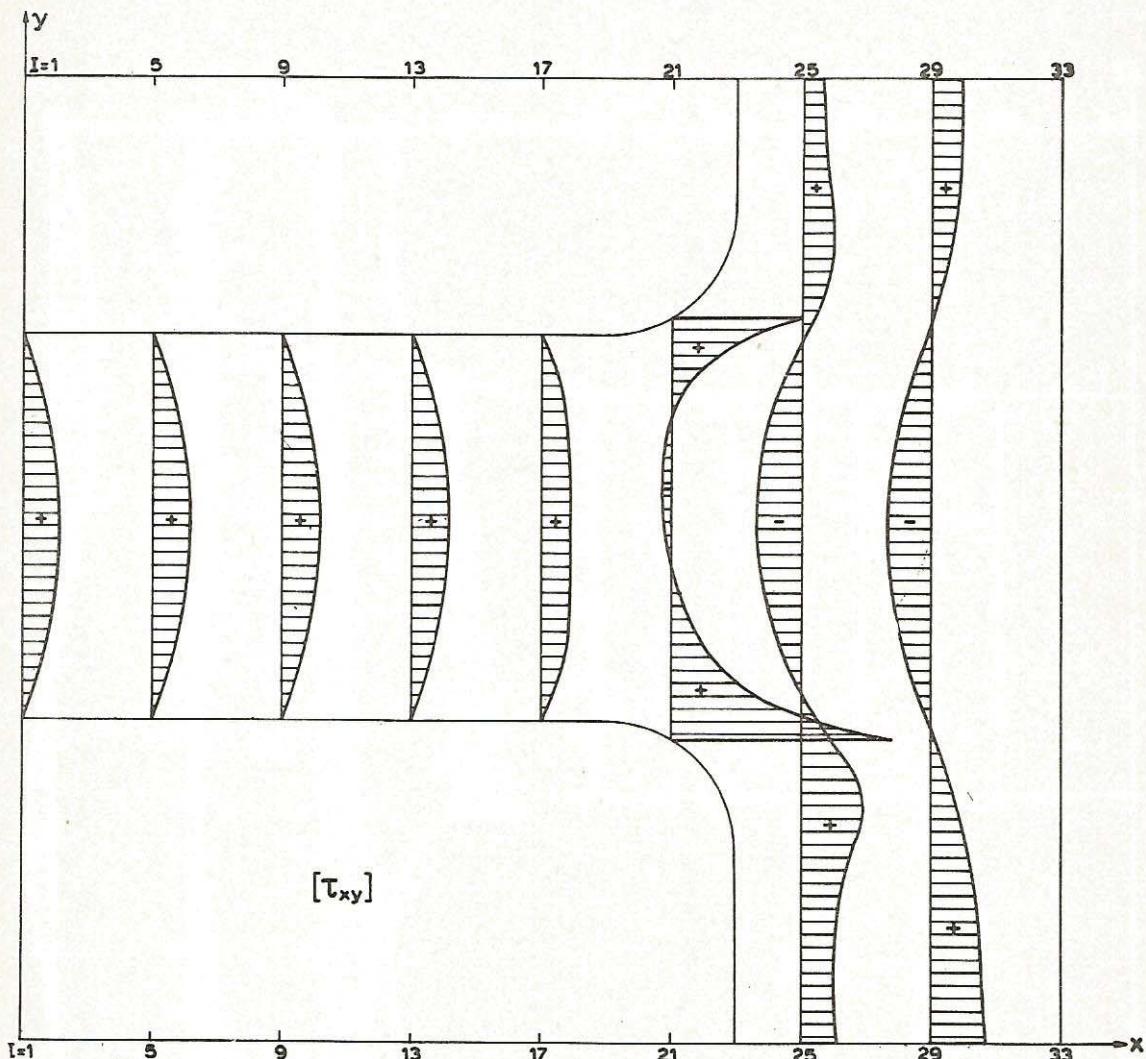
"Εκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν ὅτι ή ίσορροπία εἶναι λίαν ικανοποιητική δεδομένου ὅτι τά σφάλματα εἶναι:



Σχ. 36α Κατανομή της σ_x είς διατομάς καθέτους πρός τόν αξόνα x.

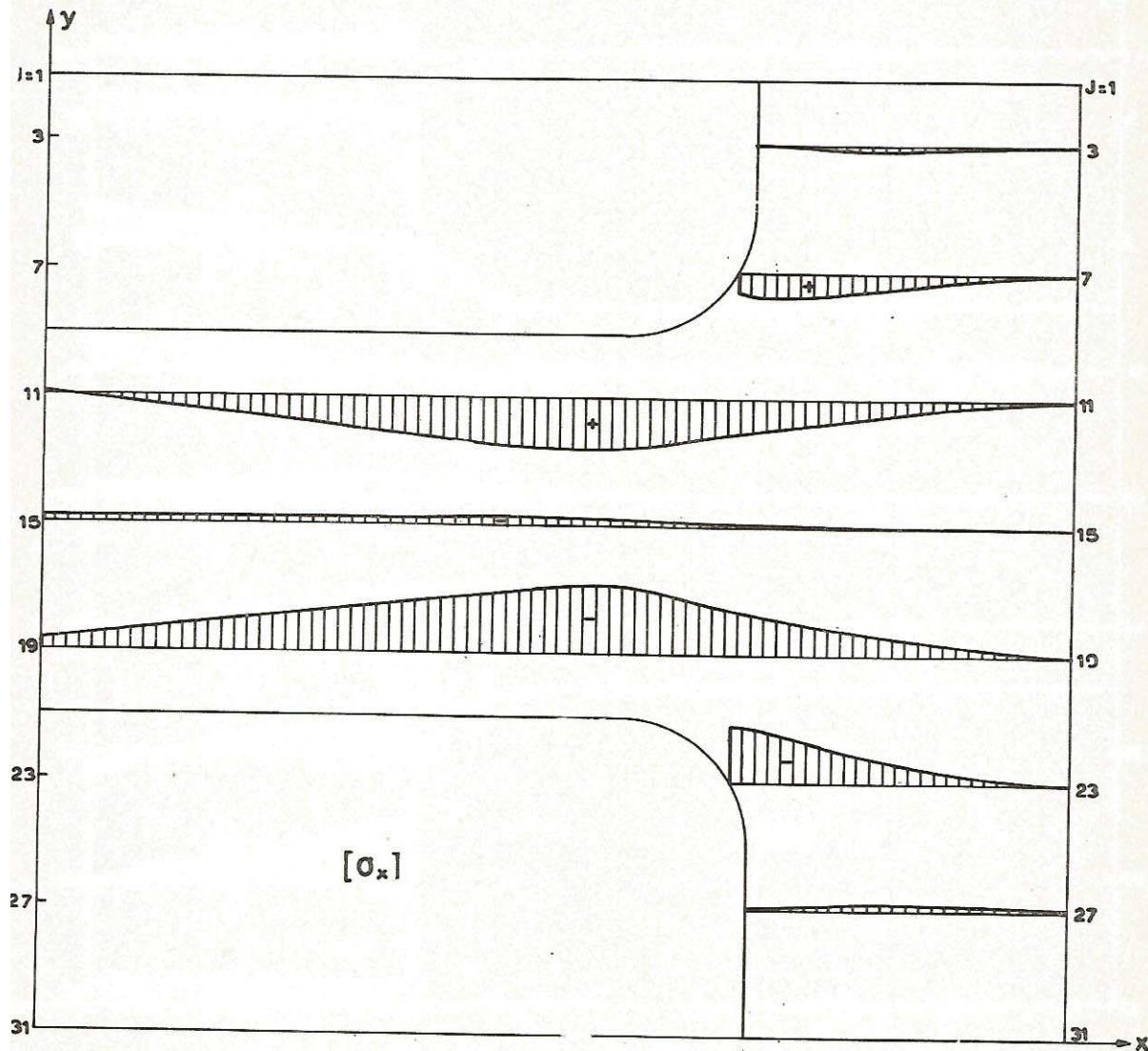


Σχ. 36β Κατανομή της σ_y εἰς διατομάς καθέτους πρός τὸν ἄξονα x.

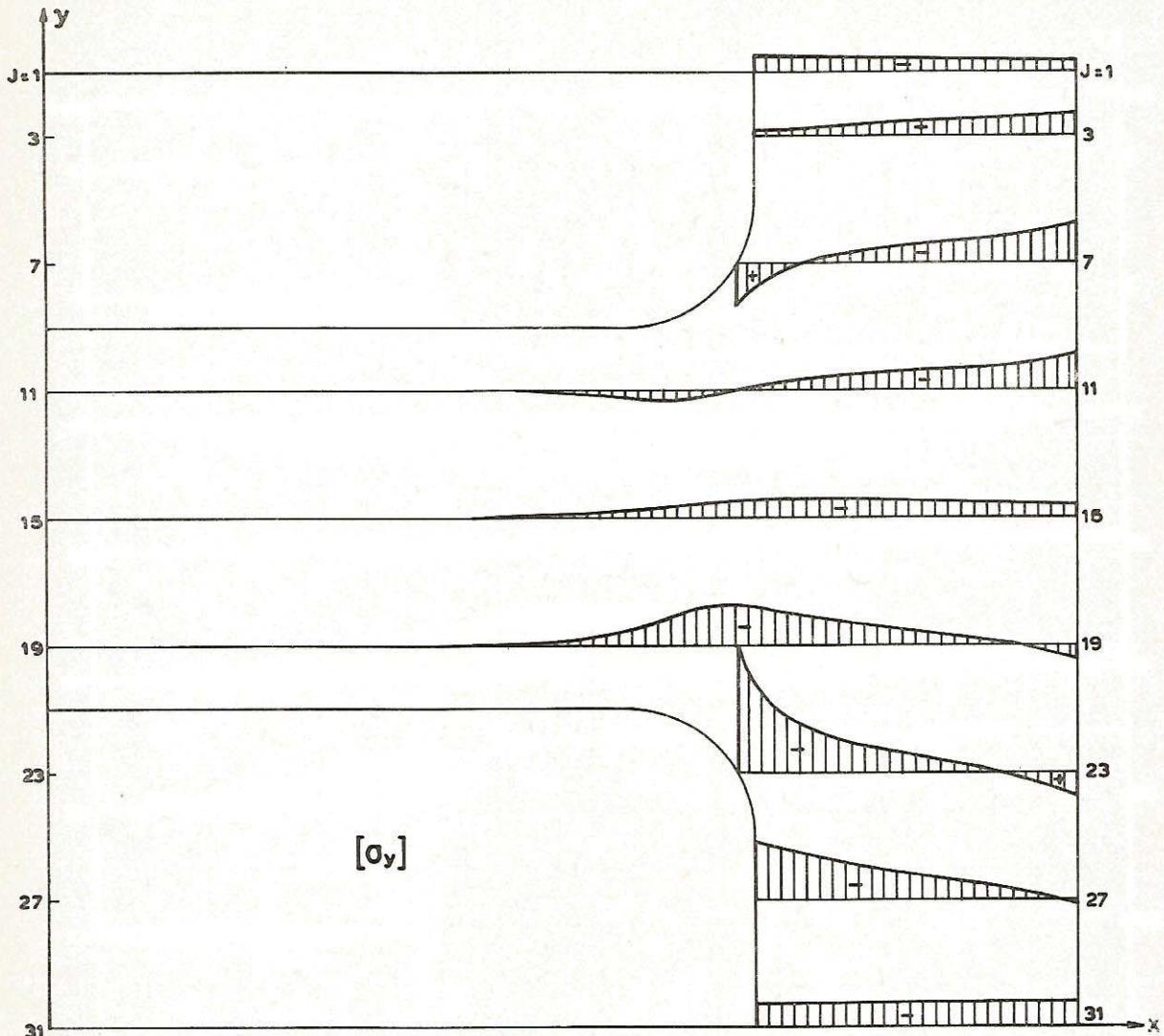


$$[\tau_{xy}]$$

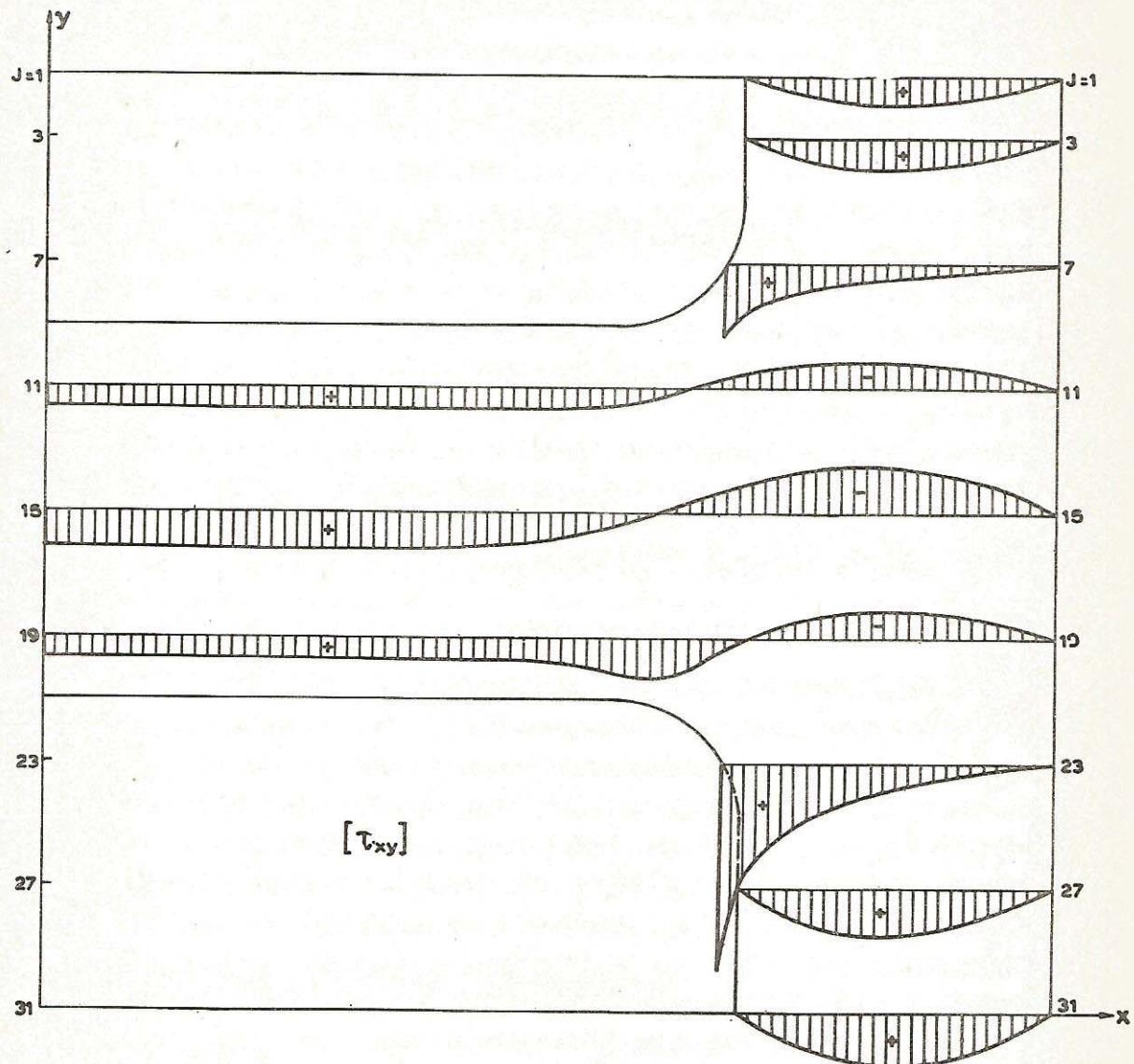
Σχ. 36γ Κατανομή τῆς τ_{xy} εἰς διατομάς καθέτους πρός τὸν ἄξονα x.



Σχ 37α Κατανομή τῆς " σ_x " εἰς διατομάς καθέτους πρός τὸν ἄξονα y .



Σχ. 37β Κατανομή τῆς σ_y εἰς διατομάς καθέτους πρός τὸν ἄξονα y .



Σχ. 37γ Κατανομή της τ_{xy} . εις διατομάς καθέτους πρός τόν ξένονα.

$$0.22/(7.67+1.80+7.97+14.06) = 0.7 \%$$

$$0.38/(16.15+13.68+12.62+9.77) = 0.73\%$$

$$0.08/(1.35+0.376+0.468+0.246)$$

$$+6.310+3.985+4.855+7.030) = 0.3 \%$$

Είς τά Σχ.36 καί 37 έσχεδιάσθησαν αἱ κατανομαὶ τῶν ύπολογισθει-
σῶν ἐντατικῶν παραμέτρων εἰς διατομὰς καθέτους πρός τοὺς ἄξονας x
καὶ y ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ Σχ.36 διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ παραδοχὴ τῆς στατικῆς τῶν ραβ-
δωτῶν φορέων, ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανομὴν τῶν τάσεων, παύει ἴσχυονσα ὅσον
πλησιάζομεν εἰς τὸν κόμβον, ἥτοι ἡ κατανομὴ τῶν σ_x παύει νά εἶναι
πλέον γραμμική καὶ ἡ τῆς τ_{xy} παραβολική, ἡ δέ σ_y λαμβάνει μέγεθος
διάφορον τοῦ μηδενός. Τά αὐτά διαπιστοῦμεν καὶ ἐκ τοῦ Σχ.37 μέ τὴν
διαφοράν ὅτι τά ἴσχυοντα διά τὰς σ_x ἴσχυουν διά τὰς σ_y καὶ ἀντιστρό-
φως.

VI.- 'Υπολογισμὸς τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καὶ τῆς γωνίας $w = (\widehat{n_1, x})$.

Κατασκευὴ τοῦ δικτύου τροχιῶν τῶν κυρίων τάσεων.

Μέ δεδομένα τάς τιμάς τῶν ἐντατικῶν παραμέτρων τῶν ύπολογισθει-
σῶν ἐκ τοῦ προγράμματος SOLAPEQ, ύπολογίζομεν τάς κυρίας τάσεις σ_1 ,
 σ_2 καὶ τὴν γωνίαν διευθύνσεως $w = (\widehat{n_1, x})$ τῆς κυρίας τάσεως σ_1 ὡς
πρός τὸν ἄξονα x εἰς ἅπαντα τά σημεῖα τοῦ καννάβου μέ INDEX(i,j)
 $\neq 3$. 'Ο ύπολογισμὸς γίνεται δι' ἔφαρμογῆς τοῦ προγράμματος PRINCST
Ἔπις §9, σελ. 64. Εἰς τούς πίνακας τῶν σελίδων 125-139 ἐμφαίνονται
αἱ τιμαὶ τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καὶ τῆς γωνίας w , ὡς αὗται ἐξετυπώ-
θησαν ὑπό τοῦ ύπολογιστοῦ.

Τέλος ἐκ τῶν ύπολογισθεισῶν γωνιῶν w κατεσκευάσθησαν τά πεδία
διευθύνσεων τῶν κυρίων τάσεων σ_1 (Σχ.38) καὶ σ_2 (Σχ.39).

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 1

PAGE

*	I	1	2	3	4	5	6	7
*	J							
*	1							
*	2							
*	3							
*	4							
*	5							
*	6							
*	7							
*	8							
*	9	0.20	4.08	8.16	12.28	16.36	20.08	24.56
*	10	3.09	5.06	7.66	10.58	13.66	16.84	20.14
*	11	5.49	6.94	8.63	10.52	12.58	14.79	17.10
*	12	7.23	8.35	9.53	10.78	12.09	13.49	14.95
*	13	8.40	9.20	9.98	10.77	11.57	12.36	13.18
*	14	8.96	9.45	9.91	10.33	10.73	11.10	11.44
*	15	8.90	9.12	9.29	9.42	9.50	9.57	9.58
*	16	8.29	8.23	8.16	8.04	7.90	7.74	7.57
*	17	7.08	6.82	6.55	6.29	6.01	5.74	5.46
*	18	5.35	4.95	4.59	4.26	3.95	3.68	3.43
*	19	3.26	2.82	2.51	2.25	2.02	1.84	1.68
*	20	1.08	0.92	0.77	0.66	0.58	0.52	0.46
*	21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
*	22							
*	23							
*	24							
*	25							
*	26							
*	27							
*	28							
*	29							
*	30							
*	31							

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΔ ΝΟ 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	28.60	32.80	36.80	40.84	45.00	49.10	53.20
10	23.44	26.76	30.09	33.43	36.81	40.22	43.71
11	19.47	21.89	24.35	26.86	29.40	31.96	34.53
12	15.46	18.00	19.59	21.21	22.86	24.51	26.10
13	14.00	14.83	15.66	16.49	17.32	18.09	18.76
14	11.77	12.08	12.35	12.59	12.77	12.86	12.81
15	9.59	9.53	9.46	9.32	9.13	8.80	8.31
16	7.37	7.14	6.88	6.59	6.21	5.73	5.06
17	5.20	4.91	4.62	4.29	3.90	3.42	2.77
18	3.18	2.94	2.71	2.44	2.15	1.76	1.21
19	1.52	1.39	1.25	1.10	0.91	0.67	0.31
20	0.41	0.37	0.32	0.27	0.19	0.11	-0.07
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 4

PAGE

I	22	23	24	25	26	27	28
J	*	*	*	*	*	*	*
1	*	0.30	0.87	2.51	4.00	5.00	5.40
2	*	0.00	1.41	3.67	5.37	6.23	6.31
3	*	0.00	2.56	5.38	7.00	7.52	7.18
4	*	0.20	5.18	8.01	9.08	8.94	8.00
5	*	8.40	10.29	11.74	11.60	10.47	8.77
6	*	23.99	17.66	16.23	14.30	11.97	9.48
7	*	50.05	35.20	25.31	20.49	16.68	13.25
8	*	60.79	39.09	29.04	22.92	18.19	14.15
9	*	49.22	36.69	29.01	23.39	18.72	14.64
10	*	38.03	31.69	26.77	22.44	18.46	14.76
11	*	29.13	26.27	23.52	20.60	17.57	14.52
12	*	21.48	20.80	19.72	18.13	16.15	13.89
13	*	14.41	15.23	15.50	15.12	14.18	12.79
14	*	7.40	9.40	10.82	11.55	11.63	11.15
15	*	0.11	3.13	5.61	7.39	8.48	8.91
16	*	-7.84	-3.81	-0.28	2.55	4.64	6.01
17	*	-15.88	-11.71	-7.01	-3.06	0.06	2.41
18	*	-24.17	-20.95	-14.78	-9.53	-5.28	-1.89
19	*	-25.03	-28.66	-23.60	-16.80	-11.29	-6.83
20	*	-25.47	-29.08	-28.08	-23.31	-17.31	-12.06
21	*	-23.21	-27.12	-26.07	-22.80	-19.02	-15.17
22	*	-11.83	-21.38	-21.31	-18.53	-15.48	-12.49
23	*	-0.06	-12.35	-13.96	-12.65	-10.61	-8.26
24	*	-0.06	-6.47	-7.11	-5.93	-4.12	-2.10
25	*	0.00	-3.56	-3.56	-2.32	-0.68	0.98
26	*	0.00	-1.57	-1.14	0.32	1.97	3.43
27	*	0.00	-0.61	0.45	2.24	4.00	5.32
28	*	0.00	0.08	1.65	3.76	5.60	6.80
29	*	0.00	0.57	2.70	5.08	6.98	8.03
30	*	0.00	1.15	3.79	6.40	8.27	9.12
31	*	0.00	1.87	5.11	7.88	9.64	10.21

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΤΣ

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
PAGE

PRINCIPAL STRESSES S1

	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
J	29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	
*	1	*	5.14	*	4.25	*	2.80	*	1.04	*	0.00
*	2	*	5.71	*	4.54	*	2.94	*	1.21	*	0.00
*	3	*	5.18	*	4.72	*	2.97	*	1.19	*	0.00
*	4	*	6.52	*	4.72	*	2.79	*	1.01	*	0.00
*	5	*	6.76	*	4.62	*	2.54	*	0.79	*	0.00
*	6	*	6.96	*	4.55	*	2.38	*	0.70	*	0.00
*	7	*	7.17	*	4.57	*	2.39	*	0.81	*	0.00
*	8	*	7.41	*	4.68	*	2.44	*	0.85	*	0.00
*	9	*	7.72	*	4.86	*	2.51	*	0.81	*	0.00
*	10	*	8.09	*	5.16	*	2.65	*	0.80	*	0.00
*	11	*	8.50	*	5.60	*	2.91	*	0.79	*	0.00
*	12	*	8.82	*	6.09	*	3.37	*	1.08	*	0.00
*	13	*	8.92	*	6.49	*	3.79	*	1.20	*	0.00
*	14	*	8.68	*	6.70	*	4.21	*	1.48	*	0.00
*	15	*	8.00	*	6.61	*	4.53	*	1.86	*	0.00
*	16	*	6.80	*	6.17	*	4.69	*	2.25	*	0.00
*	17	*	5.07	*	5.36	*	4.82	*	3.19	*	0.10
*	18	*	2.75	*	4.11	*	4.80	*	4.83	*	6.40
*	19	*	-0.18	*	2.32	*	4.42	*	6.69	*	11.80
*	20	*	-3.57	*	0.06	*	3.70	*	8.46	*	16.20
*	21	*	-5.80	*	-2.21	*	2.98	*	9.66	*	19.00
*	22	*	-6.18	*	-2.28	*	2.94	*	10.06	*	19.60
*	23	*	-3.07	*	-0.12	*	3.67	*	9.63	*	19.00
*	24	*	-0.04	*	2.08	*	4.50	*	8.40	*	15.80
*	25	*	2.51	*	3.84	*	5.02	*	6.72	*	12.00
*	26	*	4.53	*	5.17	*	5.30	*	5.09	*	7.80
*	27	*	5.04	*	6.09	*	5.32	*	3.64	*	2.00
*	28	*	7.21	*	6.75	*	5.35	*	2.95	*	0.00
*	29	*	8.12	*	7.22	*	5.32	*	2.53	*	0.00
*	30	*	8.87	*	7.53	*	5.14	*	2.03	*	0.00
*	31	*	9.59	*	7.80	*	5.01	*	1.81	*	0.00

ΚΨΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 1

PAGE

	I									
	1	2	3	4	5	6	7			
J	*	*	*	*	*	*	*			
1	*	*	*	*	*	*	*			
2	*	*	*	*	*	*	*			
3	*	*	*	*	*	*	*			
4	*	*	*	*	*	*	*			
5	*	*	*	*	*	*	*			
6	*	*	*	*	*	*	*			
7	*	*	*	*	*	*	*			
8	*	*	*	*	*	*	*			
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00
10	-3.77	-2.45	-1.70	-1.26	-0.99	-0.86	-0.69			
11	-7.05	-5.87	-4.91	-4.14	-3.54	-3.09	-2.70			
12	-9.67	-8.83	-8.05	-7.33	-6.68	-6.10	-5.58			
13	-11.72	-11.25	-10.75	-10.26	-9.78	-9.30	-8.84			
14	-13.16	-13.06	-12.93	-12.76	-12.58	-12.36	-12.13			
15	-13.98	-14.30	-14.57	-14.79	-14.98	-15.15	-15.28			
16	-14.24	-14.97	-15.68	-16.35	-17.00	-17.64	-18.27			
17	-13.91	-15.12	-16.32	-17.52	-18.72	-19.94	-21.14			
18	-13.06	-14.82	-16.51	-18.43	-20.28	-22.17	-24.09			
19	-11.85	-14.26	-16.78	-19.34	-21.95	-24.60	-27.30			
20	-10.82	-13.97	-17.27	-20.66	-24.09	-27.56	-31.02			
21	-10.35	-14.51	-18.68	-22.92	-27.10	-31.30	-35.50			
22	*	*	*	*	*	*	*			
23	*	*	*	*	*	*	*			
24	*	*	*	*	*	*	*			
25	*	*	*	*	*	*	*			
26	*	*	*	*	*	*	*			
27	*	*	*	*	*	*	*			
28	*	*	*	*	*	*	*			
29	*	*	*	*	*	*	*			
30	*	*	*	*	*	*	*			
31	*	*	*	*	*	*	*			

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

ΚΥΡΙΑΙ ΙΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 4

PAGE

I *	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
J *	*	22	*	23	*	24	*	25	*	26	*	27	
1 *	*	-13.00	*	-13.57	*	-14.91	*	-16.10	*	-16.80	*	-16.90	
2 *	*	-8.80	*	-10.13	*	-12.58	*	-14.68	*	-16.09	*	-16.76	
3 *	*	-4.40	*	-7.02	*	-10.58	*	-13.41	*	-15.37	*	-16.56	
4 *	*	0.00	*	-4.71	*	-9.04	*	-12.35	*	-14.68	*	-16.26	
5 *	*	0.00	*	-3.10	*	-7.86	*	-11.48	*	-14.05	*	-15.92	
6 *	*	0.01	*	-1.67	*	-7.00	*	-10.84	*	-13.55	*	-15.61	
7 *	0.00	*	2.97	*	-1.77	*	-6.89	*	-10.61	*	-13.32	*	-15.47
8 *	2.53	*	2.41	*	-2.64	*	-7.37	*	-10.91	*	-13.53	*	-15.66
9 *	5.71	*	1.43	*	-3.98	*	-8.48	*	-11.82	*	-14.29	*	-16.27
10 *	4.86	*	-0.69	*	-6.07	*	-10.29	*	-13.37	*	-15.61	*	-17.31
11 *	1.40	*	-3.98	*	-8.90	*	-12.71	*	-15.44	*	-17.34	*	-18.66
12 *	-2.83	*	-7.77	*	-12.13	*	-15.46	*	-17.78	*	-19.26	*	-20.11
13 *	-7.16	*	-11.64	*	-15.46	*	-18.29	*	-20.15	*	-21.14	*	-21.45
14 *	-11.26	*	-15.35	*	-18.67	*	-20.99	*	-22.33	*	-22.80	*	-22.53
15 *	-15.08	*	-18.82	*	-21.65	*	-23.43	*	-24.21	*	-24.09	*	-23.21
16 *	-18.54	*	-21.97	*	-24.31	*	-25.49	*	-25.64	*	-24.89	*	-23.39
17 *	-21.62	*	-24.77	*	-26.56	*	-27.07	*	-26.52	*	-25.11	*	-22.98
18 *	-27.65	*	-27.10	*	-28.29	*	-28.05	*	-26.72	*	-24.63	*	-21.94
19 *	-41.06	*	-32.14	*	-29.49	*	-28.33	*	-26.15	*	-23.37	*	-20.16
20 *	-59.00	*	-45.91	*	-35.31	*	-29.07	*	-25.12	*	-21.43	*	-17.73
21 *	-85.19	*	-63.15	*	-47.03	*	-35.76	*	-27.40	*	-20.86	*	-15.66
22 *	-123.92	*	-83.22	*	-58.88	*	-43.81	*	-33.17	*	-24.96	*	-18.23
23 *	-144.23	*	-99.24	*	-66.76	*	-49.32	*	-37.79	*	-29.16	*	-22.08
24 *	*	-79.94	*	-62.03	*	-49.29	*	-39.66	*	-31.88	*	-25.15	
25 *	*	-61.20	*	-53.35	*	-45.96	*	-39.21	*	-33.04	*	-27.19	
26 *	*	-51.60	*	-46.83	*	-42.12	*	-37.63	*	-33.12	*	-28.40	
27 *	*	-45.20	*	-41.20	*	-38.26	*	-35.56	*	-32.57	*	-29.03	
28 *	*	-38.40	*	-35.90	*	-34.51	*	-33.35	*	-31.72	*	-29.33	
29 *	*	-32.20	*	-30.79	*	-30.90	*	-31.14	*	-30.78	*	-29.47	
30 *	*	-25.60	*	-25.79	*	-27.47	*	-29.06	*	-29.85	*	-29.57	
31 *	*	-19.00	*	-20.97	*	-24.31	*	-27.18	*	-29.04	*	-29.71	

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 5
ΒΑΣΕ

PRINCIPAL STRESSES 52

ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

ΓΩΝΙΑ $\Omega = (N_1, x)$

ANGLE

ΣΕΛΙΣ ΝΟ 3
PAGE

ANGLE

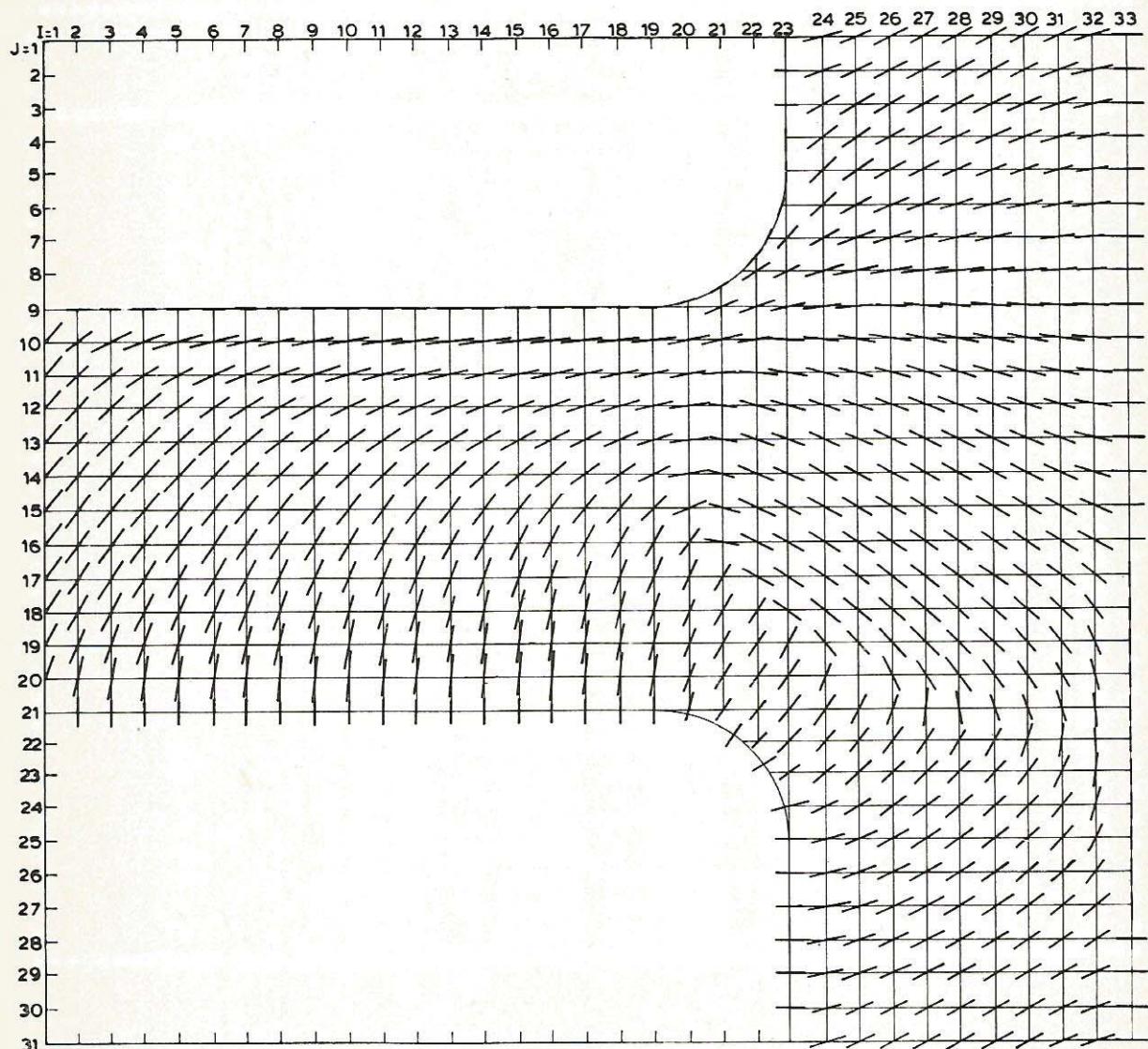
ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

I	22	23	24	25	26	27	28
J	*	*	*	*	*	*	*
1	*	0.00	14.23	22.33	26.50	28.64	29.49
2	*	0.00	18.74	25.87	28.22	28.87	28.66
3	*	0.00	27.06	29.85	29.48	28.57	27.39
4	*	90.00	38.62	32.98	29.55	27.17	25.22
5	*	90.00	45.08	32.98	27.45	24.18	21.80
6	*	75.96	41.77	28.39	22.59	19.28	16.94
7	*	56.29	45.64	28.53	19.93	15.44	12.71
8	*	32.26	24.10	15.55	10.33	7.19	5.14
9	*	18.59	10.60	4.68	1.13	178.91	177.40
10	*	5.81	179.40	175.32	172.87	171.26	170.14
11	*	175.70	170.52	167.59	165.84	164.64	163.80
12	*	168.16	163.78	161.49	160.12	159.16	158.50
13	*	152.60	158.75	156.76	155.54	154.69	154.12
14	*	158.51	154.92	153.05	151.86	151.03	150.47
15	*	155.50	151.98	150.04	148.77	147.89	147.30
16	*	153.35	149.55	147.37	145.93	144.97	144.38
17	*	152.94	147.25	144.58	142.92	141.93	141.38
18	*	53.84	143.83	140.55	138.89	138.11	137.86
19	*	55.21	61.15	128.10	130.96	131.89	132.77
20	*	53.64	54.51	68.47	99.54	115.08	121.87
21	*	51.01	50.85	55.70	63.16	72.20	83.50
22	*	45.85	45.59	48.86	51.87	54.06	55.67
23	*	33.68	36.93	40.76	43.06	44.69	45.74
24	*		13.98	25.30	32.16	36.41	39.05
25	*		0.00	14.92	24.33	30.37	34.25
26	*		0.00	10.81	20.07	26.69	31.09
27	*		0.00	9.60	18.42	24.95	29.32
28	*		0.00	9.86	18.46	24.61	28.60
29	*		0.00	11.06	19.66	25.25	28.62
30	*		0.00	13.21	21.76	26.56	29.14
31	*		0.00	16.63	24.65	28.32	29.96

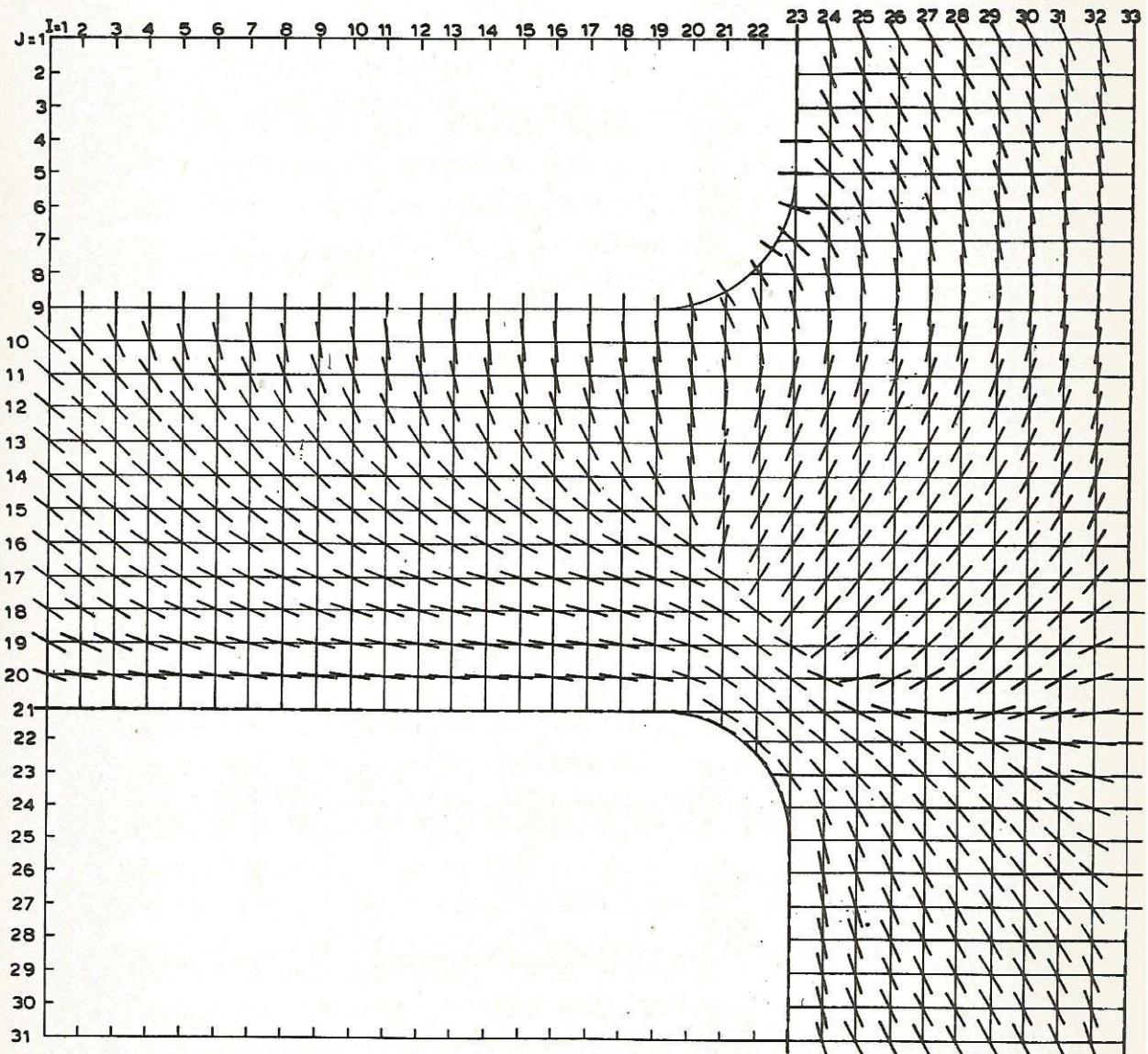
ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

*	I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*		29	*	30	*	31	*	32	*	33	*	
*	J	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	1	*	29.31	*	27.92	*	24.57	*	16.88	*	0.00	*
*	2	*	27.68	*	25.58	*	21.54	*	13.87	*	0.00	*
*	3	*	25.74	*	23.19	*	18.94	*	11.75	*	0.00	*
*	4	*	23.15	*	20.37	*	16.15	*	9.59	*	0.00	*
*	5	*	19.55	*	16.79	*	12.87	*	7.24	*	0.00	*
*	6	*	14.83	*	12.38	*	9.12	*	4.83	*	0.00	*
*	7	*	9.07	*	7.32	*	5.18	*	2.64	*	0.00	*
*	8	*	2.63	*	1.84	*	1.23	*	0.66	*	0.00	*
*	9	*	175.97	*	176.17	*	177.07	*	178.53	*	0.00	*
*	10	*	169.52	*	170.49	*	172.72	*	176.18	*	0.00	*
*	11	*	163.67	*	165.07	*	168.17	*	173.41	*	0.00	*
*	12	*	158.59	*	160.15	*	163.77	*	170.43	*	0.00	*
*	13	*	154.27	*	155.76	*	159.41	*	167.16	*	0.00	*
*	14	*	150.54	*	151.78	*	155.02	*	162.91	*	0.00	*
*	15	*	147.28	*	148.10	*	150.61	*	157.65	*	0.00	*
*	16	*	144.07	*	144.48	*	145.76	*	150.20	*	0.00	*
*	17	*	140.99	*	140.81	*	140.43	*	139.39	*	90.00	*
*	18	*	137.67	*	136.98	*	134.79	*	126.91	*	90.00	*
*	19	*	133.67	*	132.46	*	127.98	*	114.59	*	90.00	*
*	20	*	127.11	*	125.48	*	118.48	*	104.17	*	90.00	*
*	21	*	106.75	*	108.41	*	102.96	*	95.42	*	90.00	*
*	22	*	61.31	*	70.39	*	81.73	*	87.82	*	90.00	*
*	23	*	48.39	*	53.15	*	64.62	*	80.19	*	90.00	*
*	24	*	42.70	*	46.03	*	54.27	*	72.03	*	90.00	*
*	25	*	38.86	*	41.51	*	47.02	*	62.60	*	90.00	*
*	26	*	36.02	*	38.01	*	41.31	*	51.19	*	90.00	*
*	27	*	33.89	*	35.18	*	36.57	*	39.96	*	90.00	*
*	28	*	32.33	*	32.81	*	32.44	*	30.31	*	0.00	*
*	29	*	31.22	*	30.94	*	29.23	*	24.06	*	0.00	*
*	30	*	30.43	*	29.39	*	26.57	*	19.52	*	0.00	*
*	31	*	29.83	*	28.05	*	24.21	*	16.10	*	0.00	*



Σχ.38. Πεδίον διευθύνσεων κυρίας τάσεως σ_1



Σχ.39. Πεδίον διευθύνσεων κυρίας τάσεως σ_2

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. E.Kοκκινοπούλου : Φωτοδιαγνωστική "Ερευνα Δίσκου ώπλισμένου σκυροδέματος είς Κτίριον Συμπιεστῶν 'Εργοστασίου Λιπασμάτων Πτολεμαΐδος, Τεχνικά Χρονικά, 5, 1961.
2. E.Kοκκινοπούλου : Φωτοδιαγνωστική "Ερευνα 'Ιδιαζούσης Δοκού ώπλισμένου σκυροδέματος είς Κτίριον "Σιλό" 2ας Μονάδος 'Εργοστασίου Πτολεμαΐδος, Τεχνικά Χρονικά, 6, 1961.
3. M.M.Frocht : Photoelasticity, Vol.I, Vol.II, John Wiley and Sons, Inc.
4. Föppl/Mönch : Praktische Spannungsoptik, Springer-Verlag 1959.
5. J.W.Dally,W.F.Riley : Experimental Stress Analysis, Int.St. Edition, Mc Graw Hill Co.
6. M.Hetenyi : Handbook of Experimental Stress Analysis, John Wiley and Sons, Inc. 1957.
7. Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity, Int.St.Edition, 2nd ed., McGraw Hill Co.
8. F.W.Niedenfuhr and J.R.M.Randok (Editors): The collected Mathematical Works of J.H. and A.G.M. Michell, P.Noordhoff Ltd, Groningen - The Netherlands.
9. N.I.Muskhelishvili : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P.Noordhoff Ltd, Groningen - The Netherlands, 1963.
10. D.D.Mc Cracken and W.S.Dorn: Numerical Methods and FORTRAN Programming, John Wiley and Sons, Inc., Int. Edition.

11. Arnold Sommerfeld : Partial Differential Equations in Physics, Lectures on Theoretical Physics, Vol. VI, Academic Press, 4th Printing, 1967.
12. R.V.Churchil : Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill 2nd Edition.
13. D.R.Bland : Solutions of Laplace's Equation, Library of Mathematics, Dover Publications Inc.
14. R.V.Churchil : Complex Variables and Applications, McGraw-Hill, Int. Stud. Ed.
15. M.R.Spiegel : Theory and Problems of Complex Variables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.
16. H.P.Hsu : Fourier Analysis, Tech Outlines, Simon and Schuster.
17. V.N.Faddeeva : Computational Methods of Linear Algebra, Dover Publications, Inc.
18. N.Θ. Αποστολάτου: 'Αριθμητική 'Ανάλυσις, 'Αθῆναι 1971.
19. N.Θ. Αποστολάτου: 'Αριθμητικοί 'Υπολογισταί, 'Αθῆναι 1972.
20. D.D.McCracken : A Guide to FORTRAN Programming, John Wiley and Sons, Inc. 16th ed., 1967
21. D.D.McCracken : A Guide to FORTRAN IV Programming, John Wiley and Sons, Inc., 1965.
22. A.E.H.Love : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, 4th ed., 1944
23. J.Prescott : Applied Elasticity, Dover Publications, 1961.
24. A.Föppl-L.Föppl: Drang und Zwang, Band I, Verlag von R.Oldenbourg, 3te Aufl. 1941.

25. I.S.Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, Inc., 2nd ed., 1956.
26. K.Girkmann : Flächentragwerke, Springer-Verlag, 6ste Aufl., 1963.
27. K.Γεωργικοπούλου-Λ.Μπιτσάκου: Αντοχή τῶν 'Υλικῶν, Αθῆναι 1967.
28. S.Timoshenko : Strength of Materials, Part. I, D. Van Nostrand Co., Inc., 3d ed., 1965.
29. W.I.Smirnow : Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil I, II III_1 , III_2 , IV, V, 6te Aufl., VEB-Verlag, 1963.
- 30.- R.Sauer-I.Szabó: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil I, II, III, IV, Springer-Verlag, 1969
31. F.Scheid : Numerical Analysis, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill Book Co.
32. D.Moskowitz : The numerical Solution of Laplace's and Poisson's Equations. Quarterly of Applied Mathematics, Vol.II, July, 1944.
33. F.S.Shaw : Relaxation Methods, Dover Publications, Inc.

Π ΑΡ ΑΡ Τ Η Μ Α

§π1.- Πρόβλημα Dirichlet. Μέθοδοι δλοκληρώσεως της έξισώσεως Laplace.

'Η όλοκλήρωσις της έξισώσεως Laplace (2α, §2) άναγεται είς τήν έ-πίλυσιν τοῦ κατωτέρω προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν, γνωστοῦ ὡς "προ-βλήματος Dirichlet".

Νά προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $U(x,y)$, ἵνανοποιοῦσα τήν έξισωσιν

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

ἐπί μιᾶς περιοχῆς R τοῦ έπιπεδού, δταν δέδεται ἡ $U(\Gamma)$, ἵτοι αἱ τιμαὶ τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ἐπί τοῦ κλειστοῦ συνόρου Γ τοῦ περικλεί-οντος τήν R .

Τό πρόβλημα τοῦτο ἔμφαντεται, πλὴν τῆς παρούσης περιπτώσεως, καὶ εἰς πολλοὺς ἄλλους κλάδους τῆς φυσικῆς καὶ τῆς ἐπιστήμης τοῦ μηχανικοῦ. 'Επί παραδείγματι, εἰς τήν περίπτωσιν ἡλεκτροστατικοῦ πεδίου περιοχῶν περικλειομένων ὑπό συνόρων γνωστοῦ δυναμικοῦ, εἰς τό πρόβλημα τῆς διαδόσεως τῆς θερμότητος, εἰς τήν ὑδραυλικήν, εἰς τό πεδίον βα-ρυτητος, εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ σχήματος μεμβρανῶν κλπ. "Ενεκα τούτου, ἀπό τότε ποὺ ἀνεψη τό πρόβλημα, ἐγένετο προσπάθεια ἐπιλμσεώς του καὶ ἡσχολήθησαν μέ αὐτό πολλοί καὶ διακεκριμένοι μαθηματικοί. "Έχουν δέ διοθῆ μέχρι σήμερον ἀρκεταὶ μέθοδοι αὐστηρᾶς μαθηματικῆς λμσεώς τοῦ προβλήματος, γνωστότεραι τῶν δποίων εἶναι:

α.- Δι' ἀναλυτικῶν συναρτήσεων [14], [15]

β.- Διά τῆς μεθόδου τῶν χωριζομένων μεταβλητῶν [12], [13], [16]

'Η αύστηρά μαθηματική λμσις εἶναι δυνατή εἰς περιπτώσεις, κατά τάς δποίας τό σμνορον Γ εἶναι ἀπλῆς μορφῆς. "Οταν δμως τό σμνορον ἔχη πολυπλοκον μορφήν, ὡς συμβαίνει εἰς τάς περιπτώσεις τῶν δσκων, ἡ ἐφαρμογή τῶν προαναφερθεισῶν μεθόδων διά τήν ἐπίτευξιν λμσεώς ὑπό ἀναλυτικήν ἔκφρασιν εἶναι ἢ ἀδύνατος ἢ τόσον δμσκολος, ώστε διά τάς ἐφαρμογάς νά θεωρηται πρακτικῶς ἀδύνατος.

Τουναντίον εἶναι πάντοτε ἐφικτόν νά ἐπιτμχωμεν προσεγγιστικήν λμσιν τοῦ προβλήματος δι' ἀριθμητικῆς όλοκληρώσεως τῆς έξισώσεως Laplace μέ ἀκρίβειαν λίαν ἵνανοποιητικήν διά τάς ἐφαρμογάς μας. Μάλιστα δέ διά τάς ἐφαρμογάς τῆς παρούσης ἐργασίας, ὅπου αἱ τιμαὶ τῆς

συναρτήσεως U είς τό σύμνορον δέν δίδονται ύπόρ αναλυτικής έκφράσεως, άλλα ύπόρ ένός πεπερασμένου συνόλου τιμῶν πειραματικῶς λαμβανομένων, ή άριθμητική μέθοδος ένδεικνυται κατ'έξοχήν.

Η άριθμητική όλοκλήρωσις βασίζεται έπει τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων διαφορῶν, διά τῆς όποιας προσδιορίζονται πεπερασμένους πλήθους τιμαί τῆς συναρτήσεως είς τό έσωτερικόν τῆς περιοχής R . Χάρις δέ είς τήν τεραστίαν ανάπτυξιν τῶν φυφιακῶν ύπολογιστῶν, τό πλήθος τῶν προσδιοριζομένων τιμῶν είναι πολύ μεγάλον ($\pi \cdot \chi \cdot 15.000$), ώστε νά δυνάμεθα νά ίσχυρισθῶμεν, δτι ή όλοκλήρωσις τῆς έξισώσεως Laplace έπιτυγχάνεται διά τήν έκάστοτε έπιχυμητήν άκριβειαν.

Είς τάς §§4-7 τῆς έργασίας έκτιθεται ή μέθοδος τῶν πεπερασμένων διαφοριῶν διά τήν όλοκλήρωσιν τῶν έξισώσεων Laplace καί Poisson ώς καί προσαρμογή τῆς μεθόδου διά τήν σύνταξιν προγράμματος ήλεκτρονικοῦ ύπολογιστοῦ είς γλώσσαν FORTRAN διά τήν όλοκλήρωσιν τῶν έξ. $2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

§π2.- Έμφαρμογή τῆς έξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων. Η μέθοδος Gauss-Seidel διά τήν έπιλυσιν τοῦ συστήματος.

Δι έφαρμογής τῆς έξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων (11) είς δλους τούς κόρμους τοῦ καννάβου κειμένους έσωτερικῶς τοῦ συνόρου Γ , λαμβάνομεν έν γραμμικόν σύστημα ἀλγεβρικῶν έξισώσεων ίσαριθμων πρός τό πλήθος τῶν προσδιοριστέ άγνώστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως U . Δι έπιλυσεως τοῦ συστήματος τούτου εύρισκομεν τήν ζητουμένην συνάρτησιν, διδομένην ύπόρ ένός πεπερασμένου συνόλου τιμῶν αύτῆς.

Είναι προφανές δτι έκάστη έξισωσις δέν δύναται νά περιέχῃ περισσοτέρας τῶν πέντε άγνώστων.

Τό σύστημα ύπόρ συμβολισμόν μητρώων θά εἶχη τήν μορφήν:

$$AU = C \quad (\alpha)$$

ἔνθα:

A: Τό τετραγωνικόν μητρῶον τῶν συντελεστῶν τῶν άγνώστων διαστάσεων $n \times n$.

U: Τό μητρώον τῶν άγνώστων διαστάσεων $n \times 1$.

C: Τό μητρώον τῶν γνωστῶν δρων έπισης $n \times 1$.

Τό η δηλοῖ τό πλήθος τῶν άγνώστων καί ίσοται πρός τό πλήθος τῶν σημείων τοῦ καννάβου έσωτερικῶς τοῦ συνόρου Γ .

Τά περισσότερα στοιχεῖα τοῦ A είναι μηδενικά, πλήν έλαχίστων διαγωνίων (τεσσάρων) παραλλήλων πρός τήν κυρίαν διαγώνιον αύτοῦ. Τό μητρώον τοῦτο άνήκει είς τήν είδικήν κατηγορίαν τῶν καλουμένων λώριδομόρφων μητρώων (Band matrices).

'Η λύσις τοῦ συστήματος (α) δύνεται ύπό τῆς:

$$U = A^{-1}C$$

Ήτοι άνάγεται εἰς τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ μητρώου A . 'Η ἀντιστροφὴ αὗτη ὅμως εἶναι λίαν δύσκολος διὰ μητρῶν μεγάλων διαστάσεων τῆς τάξεως π.χ. 6.000×6.000 , ώς εἶναι δυνατόν νᾶ ἐμφανισθοῦν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως λεπτοτήτου καννάβου πρὸς ἐπίτευξιν μεγάλης ἀκριβείας διὰ τὴν δλοκλήρωσιν τῆς ἔξισώσεως Laplace ή Poisson, διὰ τοῦτο καὶ δέν ἐνδείκνυται.

'Ετέρα μέθοδος ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων εἶναι ἡ τῆς ἀπαιλοιφῆς τοῦ Gauss. Αὕτη συνίσταται εἰς τὸν διὰ διαδοχικῶν ἀπαλοιφῶν μηδενισμόν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων κατωθεν τῆς κυρίας διαγωνίου (τριγωνοποίησις τοῦ μητρώου) καὶ ἀκολουθῶς τὸν ύπολογισμόν τῶν ἀγνώστων ἀναγωγικῶς μὲν ἐκκίνησιν ἐκ τῆς τελευταίας ἔξισώσεως. 'Η μέθοδος αὕτη παρουσιάζει πεπερασμένον καὶ ἐκ τῶν προτέρων καθωρισμένον ἀριθμόν πράξεων*, δίδουσα πάντοτε, θεωρητικῶς τούλαχιστον, λύσιν τοῦ συστήματος ἐφ' ὅσον ἡ δρέζουσα $|A| \neq 0$. Λόγῳ ὅμως τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν πράξεων τὸ σφάλμα στρογγυλεύσεως (round-off error) δυνατόν νᾶ εἶναι σημαντικόν, μέντος ἀποτέλεσμα, ὅταν τὸ σύστημα εἶναι μεγάλο, νᾶ μή εἶναι δυνατόν νᾶ λάβωμεν ἀκριβῆ λύσιν. Προσέτι δέ ὁ μέγιστος ἀριθμός τῶν ἔξισώσεων τοῦ συστήματος δυναμένου νᾶ λυθῇ δι' ἡλεκτρονικοῦ ύπολογιστοῦ εἶναι σημαντικῶς περιωρισμένος, ἀκόμη καὶ διὰ μεγάλους ύπολογιστάς π.χ. διὰ τὸν ύπολογιστήν τοῦ K.P.E. "Δημόκριτος" CDC 3300-1700 διά μέγιστος ἀριθμός ἔξισώσεων ἀνέρχεται εἰς 125 περίπου.

'Η πλέον προσφερομένη μέθοδος διὰ τὴν ἐπίλυσιν πολὺ μεγάλων συστημάτων εἶναι ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος Gauss-Seidel (Gauss - Seidel iteration method). 'Ενδείκνυται δέ κατ' ἔξοχήν, ὅταν τὸ μητρώον τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων περιέχῃ μεγάλου πλήθους μηδενικά στοιχεῖα (λωριδόμορφον μητρώον) καὶ τά μή μηδενικά δημιουργοῦνται ύπό τοῦ ύπολογιστοῦ δι' ἐφαρμογῆς ἐνιαίου τύπου, ώς συμβαίνει διὰ τά συστήματα, εἰς τά διόπτα μετασχηματίζονται αἱ ἔξισώσεις Laplace καὶ Poisson. 'Η ἀρχή ἐπί τῆς ὄποιας βασίζεται ἡ μέθοδος ἐκτίθεται ἀμέσως κατωτέρω.

* [10]

"Εστω τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἔξισώσεων*:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= g_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= g_2 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= g_n
 \end{aligned} \tag{\beta}$$

Διαιροῦντες ἐκάστην ἔξισωσιν διά τοῦ διαγωνίου στοιχείου a_{ii} τοῦ μητρώου $A = [a_{ij}]$ ἔχομεν:

$$\begin{aligned}
 x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{g_1}{a_{11}} \\
 \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n &= \frac{g_2}{a_{22}} \\
 \dots & \\
 \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + \dots + x_n &= \frac{g_n}{a_{nn}}
 \end{aligned} \tag{\gamma}$$

Τό σύστημα τοῦτο ύπό μορφήν μητρώων γράφεται:

$$X = BX + F \tag{\delta}$$

Ἐνθα:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c}
 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{g_1}{a_{11}} \\
 -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} & \frac{g_2}{a_{22}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
 -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 & \frac{g_n}{a_{nn}}
 \end{array} \right]$$

* [17]

Τότε μητρώον X διαστάσεων $n \times 1$ παριστά τότε διάνυσμα $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τού ή διαστάτου χώρου, διαίτη τούτο ἐν τοῖς ἐπομένοις θάτι γίνεται χρήσις τού δρου διάνυσμα αντί της μητρώον στήλη.

Μορφώνομεν τήν άκολουθίαν διανυσμάτων $X^{(k)}$ ως άκολουθως:

'Εκκινοῦμεν ἀπό την γνωστόν διάνυσμα $X^{(0)}$ τελείως αύθαιρέτως λαμβανόμενον πχ. $X^{(0)}(0, 0, \dots, 0)$ καί διάδοξης έφαρμογῆς τῆς σχέσεως (δ) λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= BX^{(0)} + F \\ X^{(2)} &= BX^{(1)} + F \\ X^{(3)} &= BX^{(2)} + F \\ \cdots &\cdots \\ \cdots &\cdots \\ X^{(k)} &= BX^{(k-1)} + F \end{aligned}$$

'Εάν η άκολουθία $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ συγκλίνηεις τότε διάνυσμα X , τότε τόδιον αύτού θάτι είναι η λμσις τού συστήματος (δ) ἐπομένως καί τού (β). 'Η αργαλισις τῆς άκολουθίας είς τότε X δέν συμβαίνει πάντοτε, παρά μόνον διταν ίσχυη η κατωτέρω συνθήκη*:

| Διάτη τήν συγκλισιν τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου, διάτη τυχόν άρχικόν διάνυσμα $X^{(0)}$ καί οίονδήποτε δεδομένον F , είναι άναγκαζον καί ίκανόν διλατ αι ίδιοτιμα τού μητρώου B να είναι άπολυτως μικρότεραι τῆς μονάδος.

'Η ἔξαριθμωσις τῆς ίσχυος τῆς υπερθεν συνθήκης διάτη δεδομένον συστήμα δέν είναι εύκολος ἐργασία. Τούναντίον λίαν εύκόλως διαπιστούται η συγκλισις ἐκ τῆς κατωτέρω προτάσεως, άποτελούσης ταχυτάτου κριτήριον τῆς συγκλίσεως τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου Gauss-Seidel**.

'Η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει είς τήν λμσιν τού συστήματος, έάν:

α.- Τότε συστήμα είναι μή ἐλαττώσιμον (irreducible), ητοι να μή είναι δυνατόν δι' ἀνακατατέξεως τῶν ἔξισώσεων νά προσδιορισθούν μερικοί ἐκ τῶν ἀγνώστων δι' ἐπιλύσεως συστήματος διμάδος ἔξισώσεων ἀριθμοῦ μικροτέρου τού συνολικοῦ.

* [17], §17, σελ.118

** [10], §8.6, σελ.260

8.- Ισχύη

$$|a_{ii}| \geq |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|$$

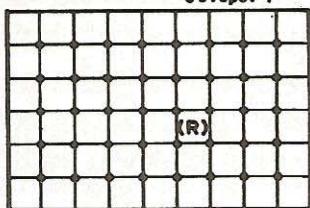
διεύθυνσι τους δείκτας i καὶ διεύνα τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|$$

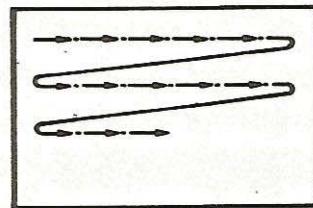
Ἡ συνθήκη εἶναι ἵνανή οὐχέρ őμως καὶ ἀναγκαῖα. Τούτεστιν εἶναι δυνατόν νά σιγκλίνῃ ἢ μέθοδος ἄνευ τῆς ισχύος τῆς μπερθεν συνθήκης. Πάντως, ἐάν αὕτη ισχύη, ἔχομεν δπωσδήποτε σύγκλισιν.

Προϋποτιθεμένης τῆς συγκλίσεως, ἢ ἐφαρμογῆ τῆς μεθόδου Gauss - Seidel διά τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος, εἰς τὸ δικοῖον μετασχηματίζονται ἢ ἐξίσωσις Laplace ἢ Poisson, εἶναι λίαν ἀπλῆ καὶ συστηματοποιεῖται ὡς κατωτέρω.

σύνορον Γ



Σχ.10



Σχ.11

Ἔστω ἐπί παραδείγματι ὅτι πρόκειται νά ἐφαρμοσθῇ ἢ μέθοδος διά τὴν ἐν Σχ.10 περιοχήν τοῦ ἐπιπέδου (χάριν ἀπλότητος ὁρθογωνική).

Δεχόμεθα κατ' ἀρχάς, ὅτι ὅλαι αἱ τιμαὶ εἰς τὸ ἐσωτερικόν τῆς περιοχῆς εἶναι ἴσαι πρός μηδέν, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐκκινοῦμεν μέ διάνυσμα $U^{(0)} = 0$. Ἀκολούθως διατρέχομεν ὅλα τὰ ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ καννάβου κατά κάποιαν σειράν (πχ. Σχ.11) ἐφαρμόζοντες διεύναστον τούτων τὴν ἐξίσωσιν τῶν τεσσάρων σημείων. Μετά τὸ πέρας τῆς πρώτης διαδρομῆς αἱ τιμαὶ U τῶν ἐσωτερικῶν σημείων θά εἶναι ἐν γένει $\neq 0$, ἀλλά θά ἀποκλίνουν ἐκ τῶν ἀληθῶν τιμῶν, θά ἔχωμεν δηλαδή τὸ διάνυσμα $U^{(1)}$. Συνεχίζοντες τὴν ἐπανάληψιν τῶν διαδρομῶν λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ διανύσματα:

$$U^{(2)}, U^{(3)}, \dots, U^{(k)}$$

"Οσον ὁ ἀριθμός τῶν διαδρομῶν καὶ αὐξάνει, τόσον τό διάνυσμα $U^{(k)}$ -
συγκλίνει πρὸς τὰς τιμὰς τῆς U .

Βεβαῖως ἡ ἔργασία αὗτη δύναται νὰ συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον διότι:

$$U = \lim_{k \rightarrow \infty} U^{(k)}$$

Πλήν ὅμως, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἐπιτύχωμεν λύσιν, δεχόμεθα κατὰ προσ-
έγγισιν ὡς τοιαῦτην ἑκεῖνο τό διάνυσμα, διὰ τό δύποτον ἡ ἀπολύτως με-
γίστη διαφορά τῶν συνιστωσῶν του ἀπό τὰς ἀντιστοίχους συνιστώσας τοῦ
ἀμέσως προηγουμένου εἶναι μικροτέρα ἢ ἵση διθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ
 ϵ (π.χ. $\epsilon = 0.001$ ἢ 0.0001), δύποτος χαρακτηρίζει τὴν ἀκρίβειαν τῆς
λύσεως. "Ητοι, ἐάν

$$U^{(k)} \{U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_n^{(k)}\}$$

καὶ

$$U^{(k-1)} \{U_1^{(k-1)}, U_2^{(k-1)}, \dots, U_n^{(k-1)}\}$$

εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως U κατὰ τὰς k καὶ $k-1$ διαδρομὰς ἀντι-
στοίχως, τότε τό $U^{(k)}$ εἶναι λύσις τοῦ συστήματος ἐφ' ὃσον ἴσχυει:

$$d := \max \{|U_1^{(k)} - U_1^{(k-1)}|, |U_2^{(k)} - U_2^{(k-1)}|, \dots, |U_n^{(k)} - U_n^{(k-1)}|\} \leq \epsilon$$

§π3.- Μετασχηματισμός τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐπιπέδου ἐλαστικότητος.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\beta)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (\gamma)$$

Μέ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῶν συν-
αρτήσεων σ_x , σ_y καὶ τ_{xy} καὶ ὅτι ἀνταὶ εἶναι συνεχεῖς, ἐκ τῶν (α) καὶ
(β) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (\delta)$$

ἡ (γ) δυνάμει τῆς (δ) δίδει:

$$0 = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = \Delta\sigma_x + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \Delta\sigma_x + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} \quad (\beta')$$

όμοιως

$$0 = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \Delta\sigma_y = \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} + \Delta\sigma_y \quad (\gamma')$$

Διαί παραγωγίσεως της (α) ως πρός y και της (β) ως πρός x και άθροίσεως κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$0 = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} = \Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x \partial y} \quad (\delta')$$

θέτοντες $\sigma_x + \sigma_y = S$ και διατηρούντες τήν έξισωσιν (γ), προκύπτει έκ τῶν (β'), (γ') και (δ'):

$$\Delta S = 0$$

$$\Delta\sigma_x = - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$$\Delta\sigma_y = - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$\Delta\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$$

Ήτοι αν έξισώσεις 2($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) της §2.

A method of evaluation of the plane stress components
in the interior of thin plates from given boundary
stresses obtained experimentally.

By: J.T.Katsikadelis

Supervised by: F.E.Kokinopoulos

S u m m a r y

The purpose of the present thesis, which was entirely developed at the "Institute of Structural Analysis and Aseismic Research" of the National Technical University of Athens, under the supervision of Professor F.E.Kokinopoulos, is the evaluation of the plane stress components of thin plates of any shape, simply or multiply connected, with given boundary stresses obtained experimentally or by any other way.

The two-dimensional elastic problem of plane stress is considered under the following fundamental assumptions.

- 1.- The plate's material is homogenous, isotropic and elastic obeying to the Hooke's law.
- 2.- The boundary loads are parallel to the middle plane, coinciding with the x-y plane, and are uniformly distributed over the constant thickness of the plate which is considered very small compared with the other two dimensions. The thickness is taken equal to unity.
- 3.- The sign of the stress components is determined according to the classical convention of the theory of elasticity (fig.1)*
- 4.- The body forces are omitted if not constant and hence the stress distribution becomes independent of the material's elastic constants. This also applies in multiply connected plane bodies when the resultant force vanishes on each boundary. If this is not the case the stress distribution for multiply conne-

* The numbers of figures and equations are those used in the greek text.

ceted regions depends on the elastic constants. Nevertheless, the influence of the elastic constants on the stress distribution is very small and can be neglected for all practical purposes. Consequently experimental results obtained on models may be transferred to the prototype constructed from any material.

- 5.- In cases where the boundary of the plate has reentrant corners, i.e. discontinuities of the slope of the boundary at points where the boundary is concave (fig.2a), the discontinuity is removed by adjusting a segment of a curve, for example that of a circle. By this substitution the concentration of stresses is avoided and it is possible to confine the stress distribution within the elastic limits. This assumption, which has been also experimentally checked, changes the stress distribution in only a small region near the point of discontinuity and, hence, does not affect the applicability of the present method.

In §2 the equations governing the plane stress:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad 1(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

where $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ the Laplace operator, are transformed into the following equivalent system of four partial differential equation of elliptic type:

$$\Delta S = 0$$

$$\Delta \sigma_x = - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad 2(\alpha, \beta, \delta)$$

$$\Delta \sigma_y = - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$\Delta \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \quad (S = \sigma_x + \sigma_y = \text{sum of normal stresses})$$

each of which contains only one unknown function to be determined. Under the assumption of given boundary stresses ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$), for example experimentally determined, the problem is reduced to the determination of the four unknown functions by solving the corresponding boundary value problems (Dirichlet problems). The equations 2(β, γ, δ) display a form analogous to the Beltrami-Michell equations for the three-dimensional elasticity, when introducing $\nu =$ Poisson ratio = 0. By integration of the eq.(2 α) with given boundary values $S(\Gamma)$ (Γ : the boundary of the region), the function $S(x,y)$ is determined. Then, after calculating the derivatives $\partial^2 S / \partial x^2$, $\partial^2 S / \partial y^2$, $\partial^2 S / \partial x \partial y$, the functions $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ are determined by integration of the eqs.(2 β), (2 γ), (2 δ) with given boundary values $\sigma_x(\Gamma)$, $\sigma_y(\Gamma)$, $\tau_{xy}(\Gamma)$.

For the integration of eqs.(2 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), the numerical method is used. An integration by analytical functions or by the method of separation of variables would be possible only in cases of very simple boundaries. In the general case, where the boundary has any shape, the above mentioned analytical methods would surely fail and the numerical method appears as the most convenient. Especially in the present case, where the boundary values of the functions are not given analytically, but by a finite set of values experimentally determined, the use of the numerical method of integration is almost unavoidable.

In §3 the numerical method of integration of the following equations:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x,y) \quad (\beta)$$

is developed, the above eqs.(α), (β) being representative forms of the eqs (2 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) and U being the unknown function, which has given values on the boundary. The $g(x,y)$ is a given function determined at the interior of the region R on which the eqs.(α) and (β) apply.

The numerical method of integration is well-known. Nevertheless,

it is again developed here, in order to show how to overcome some difficulties arising by the application of the four-point equation and by the evaluation of the function $g(x,y)$ at points near the boundary, when its intersections with the mesh lines do not coincide with mesh points.

The most general four-point equation derived here is the following:

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 = \frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} - \frac{1}{2} g(x,y) \quad (8)$$

where a, b, c, d are the distances of point 0 from its four neighbouring points (fig. 7).

Eq. (8) is put under the form:

$$\left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) U_0 = \frac{U_1}{s_1(s_1+s_3)} + \frac{U_2}{s_2(s_2+s_4)} + \frac{U_3}{s_3(s_1+s_3)} + \frac{U_4}{s_4(s_2+s_4)} - \frac{h^2}{2} g(x,y) \quad (10)$$

by setting $s_1 = a/h$, $s_2 = b/h$, $s_3 = c/h$, $s_4 = d/h$, where h = the standard mesh point distance of a square network superimposed upon the region R .

Using the relations (12), the four point equation is obtained in the form:

$$U_0 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + C_4 U_4 + C_5 g(x,y) \quad (11)$$

Further, the function $g(x,y)$ ($-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2 s}{\partial xy}$) is determined at the mesh points inside the boundary Γ . Two cases are distinguished:

Case 1. $a = b = c = d = h$

$$U_{xx} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_3}{h^2} \quad (13)$$

$$U_{yy} = \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{h^2} \quad (14)$$

Case 2. $a \neq b \neq c \neq d$

$$U_{xx} = 2 \frac{s_3 U_1 - (s_1 + s_3) U_o + s_1 U_3}{s_1 s_3 (s_1 + s_3) h^2} \quad (15)$$

$$U_{yy} = 2 \frac{s_4 U_2 - (s_2 + s_4) U_o + s_2 U_4}{s_2 s_4 (s_2 + s_4) h^2} \quad (16)$$

The derivative U_{xy} is evaluated from the relation

$$U_{xy} = \frac{U_1 - U_2 + U_3 - U_4}{4h^2} \quad (17)$$

for equidistant neighbour mesh points (fig.9α) or from the relation

$$U_{xy} = \frac{U_1 - 2U_o + U_3}{2h^2} \quad (18\alpha)$$

and:

$$U_{xy} = - \frac{U_2 - 2U_o + U_4}{2h^2} \quad (18\beta)$$

according to either the case of fig.(9β) or that of fig.(9γ). For the case of fig.(9δ) U_{xy} us evaluated from the relation (17) after determination of the function values outside the boundary. This is always feasible,because the function U is harmonic.

Thus, on the base of the above mentioned,it becomes possible to apply the four-point equation and to determine the function $g(x,y)$ for any boundary shape.

After the application of the four-point equation at every mesh point inside the boundary,a linear algebraic system is formulated, the solution of which is obtained by using the Gauss-Seidel iteration method. In §4 it is shown that the sufficient conditions of convergence for the Gauss-Seidel method are satisfied. In §5 the necessity of speeding up the iteration method is discussed,by using the overrelaxation method (or extrapolated Liebmann method). In fig. 12 it is shown that considerable computation time may be saved - reduction by $229:48 = 4.8$ times - introducing the relaxation parameter value of $\beta = 1.7$. The tedious work of the exact determination of the optimum β may be avoided by simply accepting the β - value

between 1.5 and 1.8.

In §6 the numerical method of integration is organized so that the computer program in FORTRAN language may be formulated. The program, which is given the name SOLAPEQ (Solution of the Laplace and Poisson equation), is displayed on pages 26-37, as was used for the application of §10.

The whole program consists of the main program and the three subroutines BOUND, SOPEQ and SHOW.

The user of the program is responsible for the following jobs:

1.- The preparation of data consisting of:

- a. Determination of the boundary values of the stress components σ_x , σ_y , τ_{xy} .
- b. Determination of the value of ϵ , which expresses the desired accuracy of the overrelaxation method.
- c. Determination of the mesh-point distance h of the square network and the numbers v_x and v_y denoting the amount of mesh points in the directions x and y .
- d. Choise of the value of the relaxatation parameter β .

The boundary values are given in series starting from one point of the boundary and running it clockwise.

$$\sigma_x(i), \quad \sigma_y(i), \quad \tau_{xy}(i) \quad (i = 1 \text{ to } k)$$

where k is the total number of the boundary values.

2.- Formulation of the matrix INDEX(i,j) of the code numbers of the mesh points.

3.- The formulation of the matrices $X(i,j)$, $Y(i,j)$ of the coordinates of the mesh points.

When the above data are given, the program executes the following jobs:

4.- Calculation of $U = \underline{\sigma_x + \sigma_y}$

Reads the boundary values $\sigma_x(i)$, $\sigma_y(i)$, ($i = 1 \text{ to } k$) and calling the subroutine BOUND allocates them on the corresponding

mesh points (i, j) . Formulates the sum $U = \sigma_x + \sigma_y$ on the boundary and calling subroutine SOPEQ integrates the equation:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = q(x, y), g(x, y) = 0$$

Prints the values $U(i, j)$ on calling the subroutine SHOW.

5.- Calculation of σ_x

Formulates the function $g(x, y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, Integrates the equation:
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = g(x, y)$$

on calling SOPEQ. Prints $\sigma_x(i, j)$ on calling SHOW.

6.- Calculation of σ_y

Formulates the function $g(x, y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, Integrates the equation:
$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = g(x, y)$$

on calling SOPEQ. Prints $\sigma_y(i, j)$ on calling SHOW.

7.- Calculation of τ_{xy}

Reads the boundary values $\tau_{xy}(i)$ ($i = 1$ to k) and calling BOUND allocates them on the corresponding mesh points (i, j) .

Formulates the function $g(x, y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, integrates the equation:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = g(x, y)$$

on calling SOPEQ. Prints $\tau_{xy}(i, j)$ on calling SHOW.

In all the above integrations the number of the demanded iterations for the convergence of the iteration method is also printed.

8.- Isochromatic fringes

Reproduces the isochromatic fringes to compare them with the photography of the corresponding isochromatic fringes of the photoelastic experiment, when the boundary values are determined by the photoelastic method.

In §8 the stress components of the plate of fig.15 are calculated in two ways. First, from the eqs. α, β, γ (§8) (exact known solution of the stress distribution) and secondly from the program SOLAPEQ after the evaluation of the boundary values of the stress components from the same eqs. α, β, γ .

The dimensions of network applied on the plate was $v_x = 49$, $v_y = 31$. The numerical results obtained by the two ways are given on pages 40-63. Comparing the corresponding results, the numerical integration proves accurate enough.

The program PRINCST of §9 calculates the principal stresses σ_1, σ_2 and the angle $\omega = n_1 \times$ between the direction n_1 of σ_1 and the x-axis. The program PRINCST consists of its main part and the subroutine SHOW, which prints the results.

An application of the method is given in §10, referring to the determination of the stress distribution in the nodal region of the plane frame of fig.17, loaded by two concentrated forces $P_1 = 36.0t$ and $P_2 = 54.0t$ applied at points shown in the figure. The frame is clamped along its lower edge. The material of the frame is concrete - considered homogenous and elastic -. The boundary stresses are to be determined photoelastically. For this purpose a model from Araldite B is made. Its dimensions and loading are given in Fig.18 according to the similitude laws for scaling the model with respect to the prototype. Fig.19 shows the arrangement for the photoelastic experiment. In Figs.20 and 21 the isochromatic fringe patterns of integer-and semi integer fringe order (dark and light field) are depicted, as obtained by experiment.

The stresses on the free boundary are calculated from the relation:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma| = \frac{S}{d'} \delta$$

where S = the photoelastic constant of the material, d' = the thickness of the model (here 1cm) and δ = the order of the isochromatic fringe. The other principal stress, normal to the boundary, is zero. Along the sections I-I₁, II-II and III-III the stresses are calculated by referring to the points of zero bending moment (figs. 22, 23), where the distribution of the normal stress is linear (the

other one being zero) and that of the shear stress is parabolic. Fig.24 demonstrates the distribution of the boundary stresses (principal on the free boundary and normal on the sections I-I, II-II, III-III). The boundary stresses σ_x , σ_y , τ_{xy} for the sides parallel to the coordinate axes are obtained directly from the diagrams of Fig.24. For the segments of the boundary, that are inclined to the axes, the stresses σ_x , σ_y and τ_{xy} are calculated from the equations:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 \sin^2 \phi \\ \sigma_y &= \sigma_1 \cos^2 \phi \\ \tau_{xy} &= -\sigma_1 \sin \phi \cos \phi\end{aligned}\quad (30)$$

which are obtained from the equilibrium of the element near the boundary (fig.27 α, β, γ). The angle ϕ is taken from figs.28 and 29.

In the table of pages 87-90 the boundary values of σ_x , σ_y and τ_{xy} are listed for all the points of intersection of the boundary with the mesh lines (see fig.30).

After determining the boundary values the matrix INDEX(I,J) of the code numbers is established and printed in fig.32. The numerical results obtained by using the program SOLAPEQ are given on pages 94-113. The convergence accuracy of the iteration method is $\epsilon = 0.0005$. Fig.33 depicts the isochromatic fringe pattern as reproduced from the calculated stresses σ_x , σ_y , τ_{xy} . This figure appears identical to the photograph of fig.24, and thus the accuracy of the obtained results by application of the present method is verified. The minor deformation of the isochromatic fringe pattern is due to different scale of the printer. Another check for the accuracy of the program results is made by cutting a small square piece of the plate and by examining its equilibrium, when applying on the boundaries the calculated stresses as external loads. In figs.34 α, β, γ the element abcd of fig.30 is shown with the corresponding stresses σ_x , σ_y and τ_{xy} acting on its boundary. The equilibrium conditions of the stress resultants (fig.35) are actually well satisfied i.d.

Projection on the x-axis $\Sigma X = 0.22 \text{ Kg} \approx 0$ error 0.7%

Projection on the y-axis $\Sigma Y = 0.38 \text{ Kg} \approx 0$ error 0.73%

Momements with respect to O $\Sigma M = -0.08 \text{ Kgm} \approx$ error 0.3%

In figs. 36 α, β, γ and 37 α, β, γ the diagrams of the calculated stress are drawn on sections normal to the x- and y-axes respectively. From figs. 36 α, β, γ it is seen that the usual assumptions for linear members, as far as the distribution of stresses is concerned, cease to be valid when approaching the nodal region. Namely, the distribution of σ_x is not any more linear, neither that of τ_{xy} parabolic. Moreover the stress component σ_y acquires values different from zero. The same conclusions are drawn from figs. 37 α, β, γ by interchanging σ_x with σ_y .

Finally, using the program PRINCST the principal stresses σ_1 and σ_2 and the angle $\omega = (\hat{n}_1 \cdot \mathbf{x})$ are calculated. Their values are given on pages 125-139. By using the angles ω the direction fields of the principal stresses σ_1 (fig. 38) and σ_2 (fig. 39) are drawn. In these last two figures the flow of the principal stresses within the modal region is very clearly demonstrated.

In pages 142-144 the references used in the thesis are given. In the attached appendix the Dirichlet problem for the Laplace equation is stated and the reasons leading to the numerical integration are explained. Finally, the thesis is closed with a brief description of the mathematical foundation of the Gauss-Seidel iteration method for solving linear systems.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟΝ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Έγεννηθη είς Πειραιά ἐν ἔτει 1937.

Μετά τάς ἑγκυλίους σπουδάς, εἰσήχθη είς τὴν Ἀνωτάτην Σχολήν Πολιτικῶν Μηχανικῶν τοῦ Ε.Μ.Πολυτεχνείου (1957), ὅποδεν ἀπεφοίτησεν ἐν ἔτει 1962.

Τάς στρατιωτικάς αύτοῦ ὑποχρεώσεις ἐξεπλήρωσεν κατά τό διάστημα 1962-1965 ὑπηρετήσας είς τὴν Ἑλλ. Αεροπορίαν, ἐνῶ ταυτοχρόνως ἡσχολεῖτο μέ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἔργων ἐπεκτάσεως Αεροδρομίου Σούδας ὡς συνεργάτης τῆς ἀναδόχου ἐταιρείας "ΑΤΛΑΣ".

Ἀπό τοῦ 1969 ἕως τό 1970 ὑπηρέτησεν ὡς ἐπιστημονικός συνεργάτης παρά τῇ ἔδρᾳ Στατικῆς τοῦ Ε.Μ.Πολυτεχνείου, ἀπό δέ τοῦ Μαρτίου τοῦ 1970 μέχρι σήμερον ὑπηρετεῖ ὡς ἔμμισθος Βοηθός παρά τῇ αὐτῇ ἔδρᾳ ἀσχολούμενος μέ τὴν διεξαγωγήν τῶν ἀσκήσεων τοῦ μαθήματος τῆς Στατικῆς είς τό Ε' ἔτος τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Πολιτικῶν Μηχανικῶν, ἐνῶ παραλλήλως καταγίνεται μέ ἐρευνητικά θέματα εἰς τὴν περιοχήν τῆς Ἑλαστικότητος. Ἐπιπροσθέτως τύχανει ἀπό διετίας ἐπιστημονικός συνεργάτης τῆς ἔδρας τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν Β' τοῦ Ε.Μ.Πολυτεχνείου.

Ἐπαγγελματικῶς, ἀσχολεῖται μέ μελέτας καί ἐπιβλέψεις κατασκευῶν, διατηρῶν ἀπό τοῦ 1965 ἰδιωτικόν γραφεῖον μελετῶν.

BLANK PAGE

